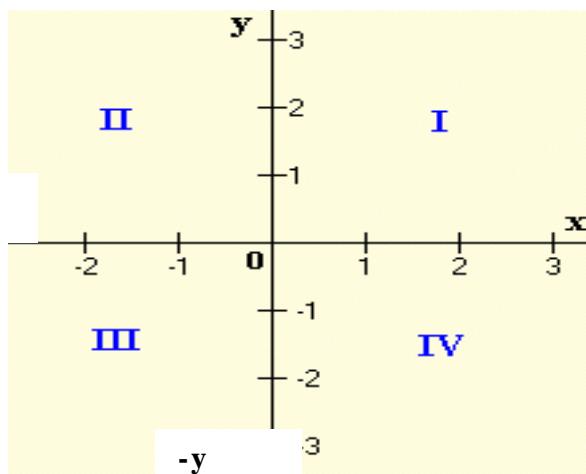


Rectas y Paráolas

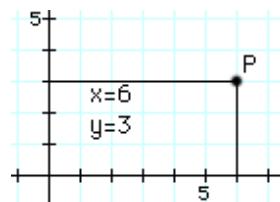
Prof. Gabriel Rivel Pizarro

Sistemas de coordenadas rectangulares (Plano Cartesiano)

El sistemas de coordenadas rectangulares se representa en un plano, mediante dos rectas perpendiculares.

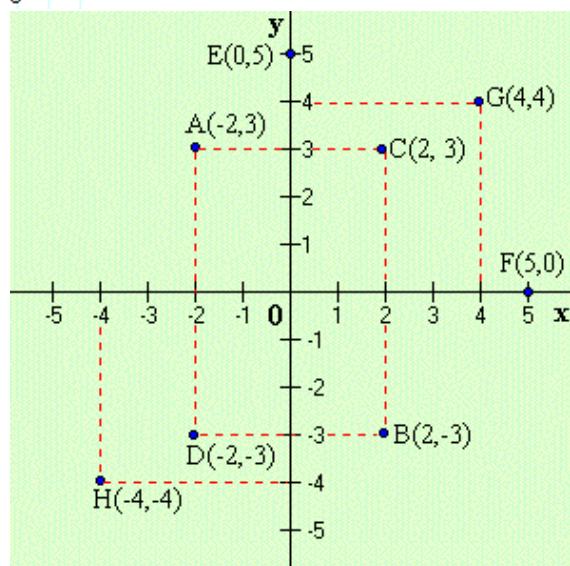


Ejemplo Ubique en el plano el punto $P(6,3)$.



Ejemplo:

Ubique en el plano cartesiano los puntos los puntos $A(-2,3)$, $B(2,-3)$, $C(2,3)$, $D(-2,-3)$, $E(0,5)$, $F(5,0)$, $G(4,4)$, $H(-4,-4)$



Rectas

$y = mx + b$ tal que $m \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, m es la pendiente de la recta y b es la ordenada que interseca el eje y.

Ejemplo:

Trace en el plano cartesiano la recta $y = 3 - x$,

Interseca al eje y en $(0,b) := (0,3)$

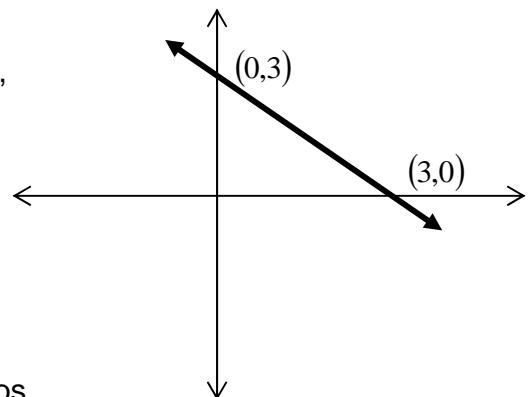
Interseca al eje x en $(x,0) := (3,0)$

$$y = 3 - x$$

$$0 = 3 - x$$

$$x = 3$$

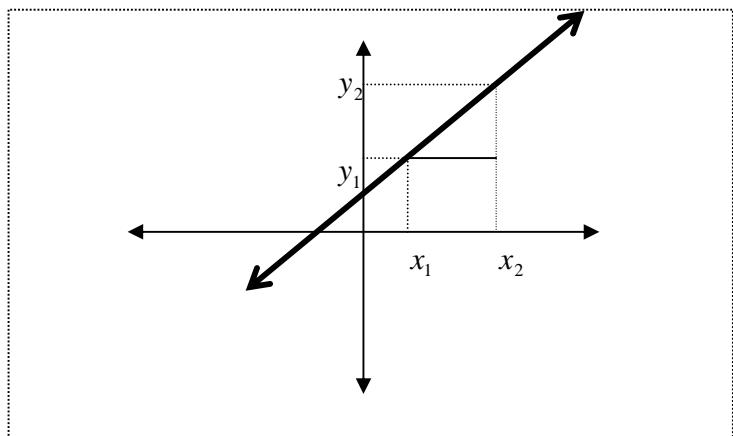
Nota: Para trazar una recta, basta con dos puntos.



Pendiente de una recta

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos de la una recta l que no es paralela al eje y, entonces la pendiente de dicha recta es

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$



Ejemplo:

Determine la pendiente de una recta paralela al eje y.

Se tiene que $x_2 = x_1$ entonces no se define su pendiente.

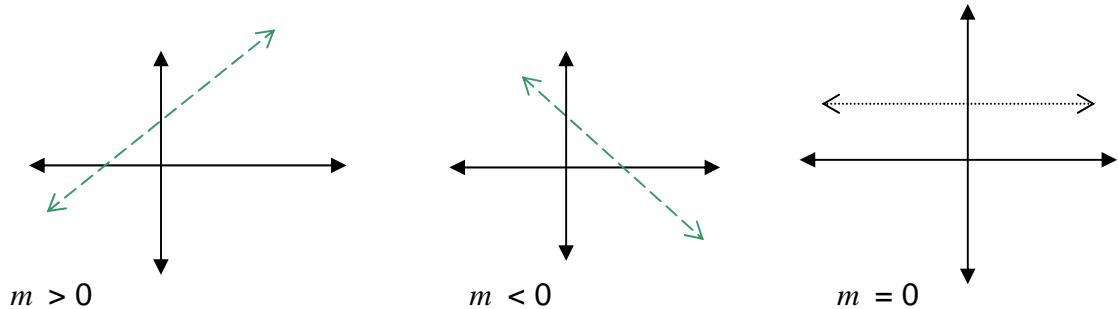
Ejemplo:

Determine la pendiente de la recta que pasa por los puntos $(-2,5)$ y $(8,-5)$

$$m = \frac{5 - (-5)}{-2 - 8} = \frac{10}{-10} = -1$$

Ejemplo.

De acuerdo con las graficas determine si $m > 0$, $m < 0$ o $m = 0$



Ejemplo.

Determine la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(0,2)$ y $(3,4)$

$$m = \frac{4 - 2}{3 - 0} = \frac{2}{3}$$

$$y = mx + b$$

$$\begin{aligned} 2 &= \frac{2}{3} \cdot 0 + b \\ 2 &= b \end{aligned}$$

$$\therefore y = \frac{2}{3}x + 2$$

Otras formas de representar una recta

1. Ecuación punto y pendiente:

Sea l una recta que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$ con pendiente m , entonces la ecuación de la recta es

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ejemplo.

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por $(2,1)$ con pendiente $\frac{2}{3}$

$$y - 1 = \frac{2}{3}(x - 2)$$

1. Forma general

$$ax + by = c$$

$$m = \frac{-a}{b} \quad \text{y} \quad \text{la intersección con el eje } y \text{ es } \frac{c}{b}.$$

Ejemplo.

Determine la pendiente y su intersección con el eje y de la recta $2x - 5y = 8$

$$m = \frac{-2}{-5} = \frac{2}{5} \quad \text{Corta el eje } y: \quad \frac{8}{-5} = -\frac{8}{5}$$

Teoremas

1. Si la pendiente de l_1 es m_1 y la pendiente de l_2 es m_2 entonces $l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow m_1 = m_2$.

Ejemplo:

Hallar la ecuación de la recta paralela a $y = 3x - 2$ que pasa por el punto $(-1, 3)$

La recta tiene pendiente 3 y pasa por $(-1, 3)$

$$y - 3 = 3(x + 1)$$

2. Si la pendiente de l_1 es m_1 y la pendiente de l_2 es m_2 entonces $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1$

Ejemplo.

Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, -7)$ y sea

perpendicular a la recta $6x + 3y = 4$.

$$\text{R/ } y = \frac{1}{2}x - \frac{19}{2}$$

Paráolas

Las paráolas son curvas que representan a las ecuaciones de la forma y $y = ax^2 + bx + c$ tal que $a \in \mathbb{R} - \{0\}$, $b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$.

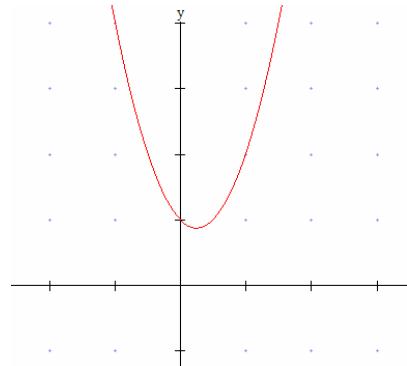
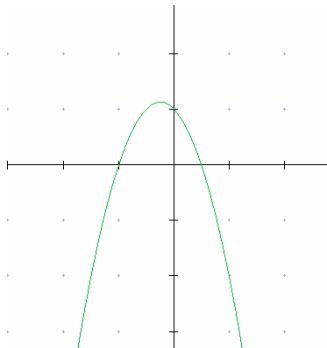
Intersección con los ejes

Eje y En $(0, c)$

Eje x En $(x_1, 0)$ y $(x_2, 0)$
tal que x_1 y x_2 son las soluciones de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$
 $x_i = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ donde $\Delta = b^2 - 4ac$

Concavidad

Si a es mayor que cero entonces la paráola es cóncava hacia arriba.



Si a es menor que cero entonces la paráola es cóncava hacia abajo.

Vértice

Es el punto más bajo o más alto de una paráola. Dicho punto es el par ordenado:

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$$

Si la paráola es cóncava hacia arriba, entonces el vértice es un mínimo.

Si la paráola es cóncava hacia abajo, entonces el vértice es un máximo.

Eje de simetría

Es la recta vertical $x = \frac{-b}{2a}$

Ejemplo

Trace la curva $y = x^2 - 4x - 12$

$$a = 1, \quad b = -4, \quad c = -12$$

- Intersección con los ejes

Eje y en $(0, c) = (0, -12)$

$$\begin{aligned} \text{Eje } x \text{ en } (x_1, 0) \text{ y } (x_2, 0) = (-2, 0) \text{ y } (6, 0) \quad & x^2 - 4x - 12 = 0 \\ & (x + 2)(x - 6) = 0 \\ & x_1 = -2 \quad y \quad x_2 = 6 \end{aligned}$$

- Concavidad

Como $a = 1$ entonces es cóncava hacia arriba.

- Vértice

$$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right) = (2, -16)$$

$$\begin{aligned} \frac{-b}{2a} &= \frac{-4}{2 \cdot 1} = \frac{4}{2} = 2 \\ \frac{-\Delta}{4a} &= \frac{-16 + 4 \cdot 1 \cdot -12}{4 \cdot 1} = -16 \end{aligned}$$

Otra forma si se tiene que $x = 2$, se sustituye en $y = x^2 - 4x - 12$

$$\begin{aligned} y &= 2^2 - 4 \cdot 2 - 12 \\ y &= -16 \end{aligned}$$

- Eje de simetría

Es la recta vertical $x = 2$

Ejemplo

Determine el punto máximo o mínimo de la parábola $y = x^2 - 3x - 2$

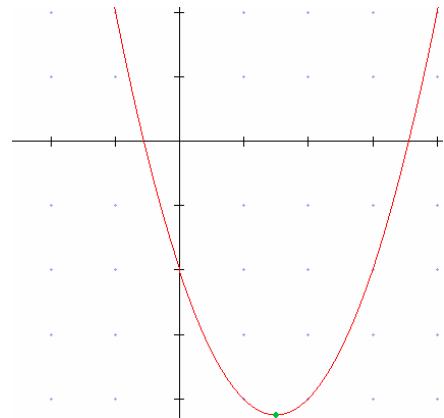
Como $a = 1$ entonces es cóncava hacia arriba
entonces el vértice es un mínimo de la parábola.

$$\text{Vértice} \quad x = \frac{-b}{2a} = \frac{3}{2}$$

$$y = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{3}{2}\right) - 2$$

$$y = \frac{-17}{4}$$

$$\left(\frac{3}{2}, \frac{-17}{4}\right)$$



La intersección de rectas y parábolas

Determine los puntos donde las curvas $y = x$, $y = 2 - x^2$ se intersecan.

$$2 - x^2 = x$$

$$\text{Si } x = -2, \quad y = -2$$

$$-x^2 - x + 2 = 0$$

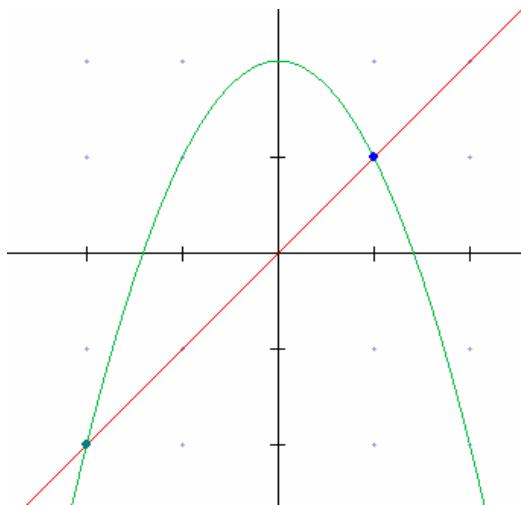
$$\text{Si } x = 1, \quad y = 1$$

$$(x + 2)(x - 1) = 0$$

$$x = -2, \quad x = 1$$

∴ La intersección se da en $(1,1)$ y en $(-2,2)$

Trace las dos curvas en un mismo plano y verifique lo anterior.



Ejemplos

- En que punto la tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ es paralela a la recta $5x + y - 3 = 0$.

La pendiente de la recta es $m = \frac{-a}{b} = \frac{-5}{1} = -5$

La derivada de la parábola es $y = 2x - 7$.

Como debe ser paralela entonces las pendientes son iguales,

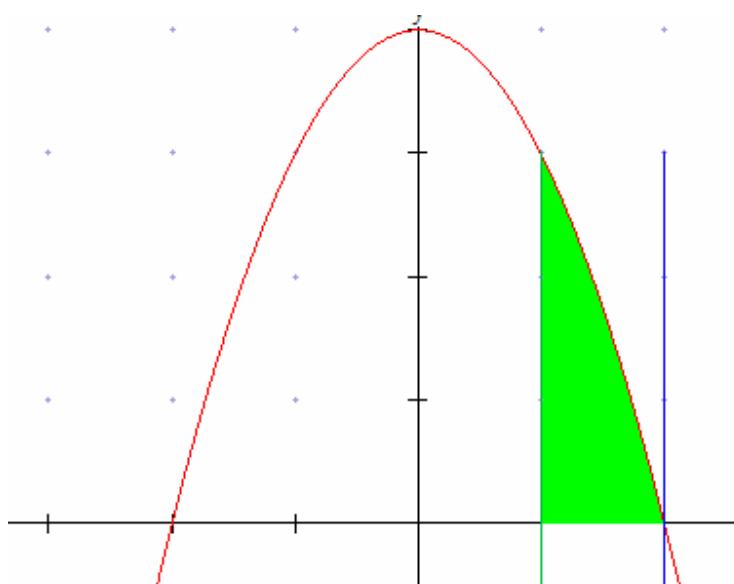
$$\begin{aligned} -5 &= 2x - 7 & y &= x^2 - 7x + 3 \\ -5 + 7 &= 2x & y &= 1^2 - 7 \cdot 1 + 3 \\ 2 &= 2x & y &= -3 \\ 1 &= x \end{aligned}$$

La tangente a la parábola $y = x^2 - 7x + 3$ por el punto $(1, -3)$ es paralela a la recta $y = x^2 - 7x + 3$.

- Determine los puntos donde las curvas $y = -x^2$, $y = x^2 - 8$ se intersecan.

$$\begin{aligned} -x^2 &= x^2 - 8 & \text{Si } x = -2 \rightarrow y &= -4 \\ -2x^2 &= -8 & \text{Si } x = 2 \rightarrow y &= -4 \\ 2x^2 &= 8 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

- Trace la parábola $y = 4 - x^2$ y subraye la región comprendida entre la parábola, el eje x y las rectas verticales $x = 1$ y $x = 2$.



Ejercicios propuestos.

1. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por el punto $(5, -7)$ y es paralela a la recta $6x + 3y = 4$.

$$\mathbb{R}/ \quad y = -2x + \frac{4}{3}$$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, -1)$ y es perpendicular a la recta $2x - 3y = 5$

$$\mathbb{R}/ \quad 3x + 2y = 4$$

3. Trace en un mismo plano la $y = 3 - x$ y la parábola $y = 3 - x - x^2$

4. Encuentre los ceros de $y = x^2 - 5x - 12$

$$\mathbb{R}/ \frac{5 \pm \sqrt{73}}{2}$$

5. Encuentre los puntos de intersección de $y = x^2 - x - 5$, $y = x + 3$

$$\mathbb{R}/ \begin{pmatrix} -2, 1 \\ 4, 7 \end{pmatrix}$$

6. Trace en un plano la parábola $y = 4 - x^2$ y subraye la región comprendida entre la parábola, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$.

7. Trace en un plano la parábola $y = 4 - x^2$, $y = 2 - x$, $y = 0$ y subraye la región comprendida entre la parábola y las rectas.