UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

I CICLO DEL 2005
CURSO PROPEDEUTICO

ELABORADO POR: MSC. MARIA ALICIA LEON

EXPRESIONES FRACCIONARIAS: OPERACIONES BÁSICAS

RECORDAR QUE: cuando estamos trabajando con expresiones fraccionarias, nuestro objetivo primordial es reducir a términos más simples, el resultado que se obtiene de sumar, restar, multiplicar y dividir expresiones algebraicas.

NOTA: La atención en este apartado la centraremos en el trabajo de formas fraccionarias. Al cociente de dos expresiones algebraicas se le llama **expresión fraccionaria**, (recuerde que la división entre cero se excluye), si el numerador y el denominador de una expresión algebraica son polinomios, la expresión se conoce como **expresión racional**.

REDUCCIÓN A TÉRMINOS MÁS SIMPLES.

Una expresión fraccionaria está reducida a términos más simples si el numerador y el denominador no tienen factores comunes.

EJEMPLO

1) $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}=\dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}=\dfrac{x-3}{x+3}$ se divide tanto numerador y denominador por $(x-3)$

2) $\dfrac{x^4-8x}{3x^3-2x^2-8x}=\dfrac{x(x^3-8)}{x(3x^2-2x-8)}=\dfrac{(x-2)(x^2+2x+4)}{(3x+4)(x-2)}=\dfrac{x^2+2x+4}{3x+4}$ se divide tanto numerador como denominador por x y por $(x-2)$.

MULTIPLICACION Y DIVISIÓN DE EXPRESIONES FRACCIONARIAS

NOTA: es importante recordar que cuando se efectúa la operación, se debe de reducir el resultado a términos más simples, siempre que esto sea posible.

$$\frac{10x^3y}{3xy+9y}\cdot\frac{x^2-9}{4x^2-12x}=$$
$$\frac{10x^3y(x^2-9)}{(3xy+9y)(4x^2-12x)}$$

En una multiplicación de expresiones fraccionarias se procede de la misma manera que en una multiplicación de números fraccionarios, numerador con numerador y denominador con denominador, con la diferencia de no efectuar los productos indicados, hasta no proceder a factorizar las expresiones y simplificar al máximo.

$$\frac{10x^3y(x-3)(x+3)}{3y(x+3)4x(x-3)}=\frac{5x^2}{6}$$

Se factorizan los términos del numerador y denominador, se simplifica la expresión al máximo y luego se procede a efectuar la operación, tanto en el numerador como en el denominador.

$$\frac{2x^3-2x^2y+2xy^2}{x^3y-xy^3}\div\frac{x^3+y^3}{x^2+2xy+y^2}$$

$$\frac{\left(2x^3-2x^2y+2xy^2\right)\left(x^2+2xy+y^2\right)}{\left(x^3y-xy^3\right)\left(x^3+y^3\right)}$$

La división de expresiones fraccionarias se efectúa de la misma manera que se efectúa una división de números fraccionarios, tomando en cuenta que las operaciones planteadas tanto en el numerador como en el denominador se realizan, después de factorizar y simplificar al máximo.

$$\frac{2x\left(x^2-xy+y^2\right)(x+y)^2}{xy(x+y)(x-y)(x+y)\left(x^2-xy+y^2\right)}=$$

$$\frac{2}{y(x-y)}$$

Se factoriaza y se simplifican las expresiones resultantes tanto en el numerador como en el denominador.

SUMA Y RESTA DE EXPRESIONES FRACCIONARIAS

1)

$$\frac{1}{4x^2}-\frac{2x+1}{2x^3}+\frac{3}{12x}$$

MCM=$12x^3$

Se debe de encontrar el MCM de las expresiones que corresponden a los denominadores. Recuerde: se debe de factorizar cada denominador completamente, luego identificar cada factor primo diferente de todos los denominadores y por último formar un producto usando cada factor diferente a la más alta potencia que aparece en cualquiera de los denominadores, este producto es el MCM.

$$\frac{3x-6(2x+1)+3x^2}{12x^3}=$$

$$\frac{3x-12x-6+3x^2}{12x^3}=$$

$$\frac{-9x-6+3x^2}{12x^3}$$

El procedimiento para sumar y restar expresiones algebraicas fraccionarias es el mismo que se utiliza en la aritmética para sumar y restar números fraccionarios. Nota: si al encontrar el resultado final, éste se puede simplificar, es deber hacerlo.

2)

$$\frac{y-3}{y^2-4}-\frac{y+2}{y^2-4y+4}-\frac{2}{2-y}=\frac{y-3}{(y-2)(y+2)}-\frac{y+2}{(y-2)^2}-\frac{2}{-(-2+y)}=$$

$$\frac{(y-2)(y-3)-(y+2)^2+2(y-2)(y+2)}{(y-2)^2(y+2)}=\frac{y^2-5y+6-y^2-4y-4+2y^2-8}{(y-2)^2(y+2)}=\frac{2y^2-9y-6}{(y-2)^2(y+2)}$$

FRACCIONES COMPUESTAS:

En la fracciones compuestas lo que se busca es poder transformar la expresión como una fracción simple reducida a los términos mínimos.

Para realizar operaciones de este tipo, se debe primero de realizar las operaciones que aparecen tanto en el denominador como en el numerador, luego colocar los resultados obtenidos y tratar la expresión como un cociente. Nota: es importante simplificar los resultados al máximo, para ahorrar procedimientos innecesarios, para llegar al resultado final.

EJEMPLOS:

1) $$\frac{\frac{y}{x^2}-\frac{x}{y^2}}{\frac{y}{x}-\frac{x}{y}}=\frac{\frac{y^3-x^3}{x^2y^2}}{\frac{y^2-x^2}{xy}}=\frac{xy\left(y^3-x^3\right)}{x^2y^2\left(y^2-x^2\right)}=\frac{(y-x)\left(y^2+xy+x^2\right)}{xy(y-x)(y+x)}=\frac{y^2+xy+x^2}{xy(y+x)}$$

2) $$\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+2+\frac{b}{a}}=\frac{\frac{a^2-b^2}{ab}}{\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}}=\frac{ab\left(a^2-b^2\right)}{ab\left(a^2+2ab+b^2\right)}=\frac{ab(a-b)(a+b)}{ab(a+b)^2}=\frac{(a-b)}{(a+b)}$$

APLICACIÓN AL CÁLCULO

1) Derivada por la definición de $f(x)=\frac{1}{x}$

$$\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-x-h}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{xh(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

2) Máximos y mínimos $f(x)=\frac{x^2}{x+2}$

$f'(x)=\frac{2x(x+2)-x^2}{(x+2)^2}=\frac{2x^2+4x-x^2}{(x+2)^2}=\frac{x^2+4x}{(x+2)^2}=\frac{x(x+4)}{(x+2)^2}$, para luego encontrar los valores que hacen cero la primera derivada.

3) Concavidad, posibles puntos de inflexión

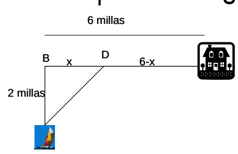
Segunda derivada de la función del ejercicio anterior

$$f''(x)=\frac{(2x+4)(x+2)^2-\left(x^2+4x\right)2(x+2)}{(x+2)^4}=\frac{(x+2)\left[(2x+4)(x+2)-2\left(x^2+4x\right)\right]}{(x+2)^4}=$$

$$=\frac{2x^2+4x+4x+8-2x^2-8x}{(x+2)^3}=\frac{8}{(x+2)^3}$$

4) Resolución de problemas de máximos y mínimos

Antonio se encuentra en una lancha a dos millas de B, el punto más cercano a una playa rectilínea, y ve salir humo de su casa que está 6 millas playa arriba de B. Él se imagina que puede remar a 6 millas por hora y correr a 10 millas por hora. ¿Cómo puede proceder para llegar a su casa en el mínimo tiempo?



Para resolver este problema se debe plantear una función que represente el tiempo que tardará Antonio en llegar a su casa, se debe tomar en cuenta que rema y corre, por tanto la función sería

$T(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+4}}{6}+\dfrac{6-x}{10}$, donde el primer término representa el tiempo de remar y el segundo término el tiempo de correr.

EJERCICIOS

1) Simplifique al máximo las siguientes expresiones

a) $\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}2x-x^2\left(\frac{1}{2}\right)(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}(2x)}{1+x^2}=$

b) $\dfrac{x^{-2}-y^{-2}}{x^{-1}+y^{-1}}=$

c) $1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x}}}=$

d) $\left(\dfrac{x}{x^2-16}-\dfrac{1}{x+4}\right)\div\dfrac{4}{x+4}=$

e) $\left(\dfrac{x^3-y^3}{y^3}\cdot\dfrac{y}{x-y}\right)\div\dfrac{x^2+xy+y^2}{y^2}=$

2) Halle la derivada por la definición de $f(x)=\dfrac{2x+3}{x}$

3) Resuelva el siguiente problema

Una pequeña isla está a 2 millas, en línea recta del punto más cercano P de la ribera de un gran lago. Si un hombre puede remar en su bote a 3 millas por hora y caminar 4 millas por hora. ¿Dónde debe desembarcar para llegar a un pueblo que está 10 millas playa abajo del punto P, en el tiempo más corto?

4) De ser posible encuentre los máximos y mínimos de:

a) $f(x)=\dfrac{64}{senx}+\dfrac{27}{\cos x}$ en el intervalo de $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$

b) $f(x)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$ en el intervalo de $(0,\infty)$

c) $f(x)=x^2+\dfrac{16x^2}{(8-x)^2}$ en el intervalo $(8,\infty)$