UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

I CICLO DEL 2005
CURSO PROPEDEUTICO

ELABORADO POR: MSC. MARIA ALICIA LEON

ECUACIONES Y DESIGUALDADES

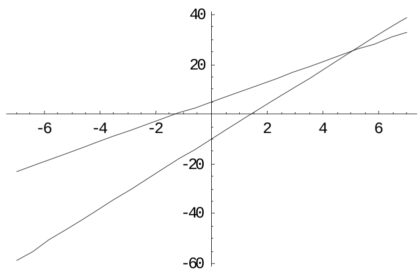
RECORDAR QUE: Uno de los usos importantes del álgebra en la matemática es la solución de ecuaciones y desigualdades. Tema fundamental en la resolución de problemas cotidianos.

ECUACIONES E INECUACIONES LINEALES

Las ecuaciones lineales pueden darse en términos de una sola variable o con más de una variable.

Resuelva: $7x-10=4x+5$ (ecuación en términos de una sola variable)

$7x-10=4x+5$	Ecuación original
$7x-10+10=4x+5+10$	Sume 10 en ambos lados
$7x=4x+15$	Combine términos semejantes
$7x-4x=4x-4x+15$	Reste 4x en ambos lados
$3x=15$	Combine términos semejantes
$\frac{3x}{3}=\frac{15}{3}$	Divida ambos lados entre 3
$x=5$	Simplifique
	Conjunto solución de la ecuación: $\{5\}$



Solución gráfica de la ecuación, se reduce a la intersección de dos rectas.

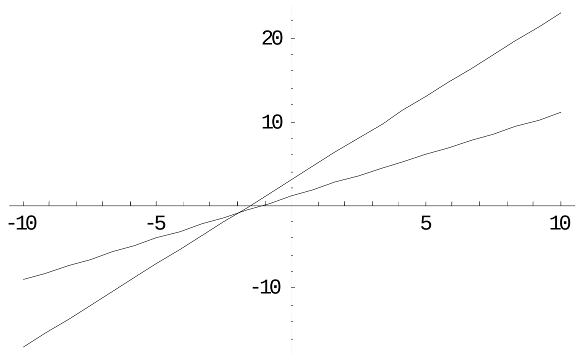
EJERCICIO:

Justifique por qué? La ecuación $2x-3=2x+5$ no tiene soluciones reales y la ecuación $3x-4=3(x-3)+5$ tiene infinitas soluciones reales.

Resuelva: Encuentre P en términos de las otras variables: $A=P+\Pr t$

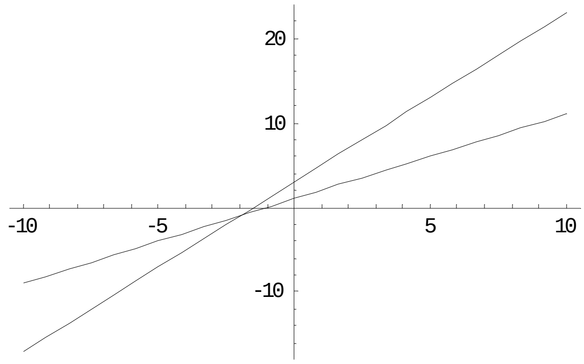
$A=P+\Pr t$	Ecuación original, considere A, r y t como constante
$A=P(1+rt)$	Factorizar P para aislarlo de las otras variables
$\frac{A}{1+rt}=P$	Divida ambos lados entre $1+rt$
$P=\frac{A}{1+rt}$	Al llegar al resultado final se debe de restringir el denominador $1+rt\neq 0$, pues recuerde que no se puede dividir por 0

Una ecuación como la siguiente $x+1=2x+3$, se convierte en una inecuación cuando el signo igual es sustituido por un signo de mayor o mayor e igual que, menor o menor e igual que. Observemos que representa esto gráficamente.

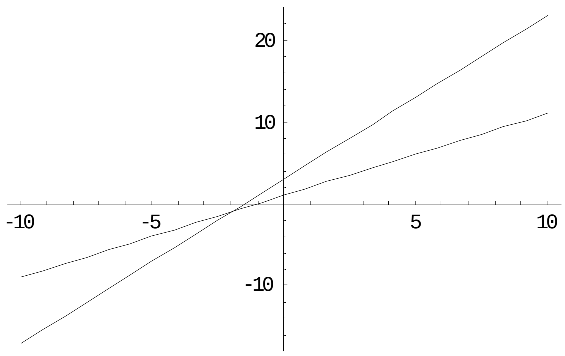


Si resolvemos la ecuación $x+1=2x+3$, encontramos que las dos rectas se cortan en el punto $x=-2$

Si resolvemos la desigualdad $x+1<2x+3$ encontramos que la recta $x+1$es menor que la recta $2x+3$ en el intervalo $\left]-2,\infty\right[$ o sea que en este intervalo la recta $x+1$ está por debajo de la recta $2x+3$.



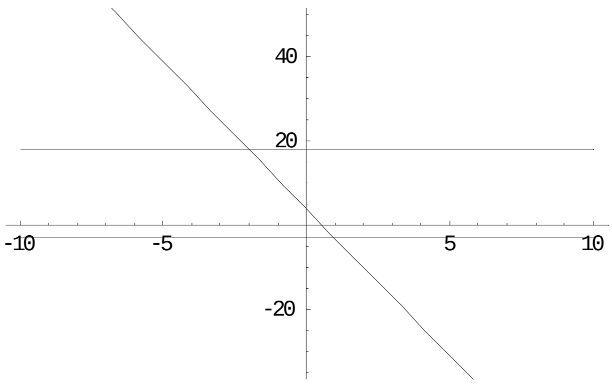
Por tanto, si la desigualdad es en la otra dirección $x+1>2x+3$ el intervalo solución será $\left]-\infty,-2\right[$.



Algebraicamente, para encontrar la solución de una inecuación como la anterior se procede de la siguiente manera:

$x+1 \le 2x+3$	Inecuación original
$x \le 2x+2$	Se resta 1 en ambos lados
$-x \le 2$	Se resta 2x en ambos lados
$x \ge -2$	Se divide por -1 en ambos lados, debe de tener cuidado con el orden inverso de la desigualdad al dividir por un número negativo
$x \in \left]-2,+\infty\right[$	Intervalo solución de la desigualdad

Que sucede cuando estamos ante una inecuación de la forma: $-3 \le 4-7x \le 18$



En la gráfica de la situación planteada anterior mente es claro determinar que la recta se encuentra encerrada entre la recta $y=-3$ y $y=18$ en el intervalo que va de $[-2,1]$, cerrado porque las desigualdades incluyen los extremos.

EJERCICIO: Resuelva algebraicamente.

Que sucede con las situaciones que involucran valor absoluto?

Recuerde:

$|2x-6| = 3 \leftrightarrow 2x-6=3 \text{ o } 2\text{x} - 6 = -3$ y se reduce a dos ecuaciones lineales simples.

$|2x-6| \le 3 \leftrightarrow -3 \le 2x-6 \le 3$ se reduce a una situación entre rectas como la ilustrada anteriormente.

$|2x-6| \ge 3 \leftrightarrow 2x-6 \ge 3 \quad \text{o} \quad 2\text{x} - 6 \le \text{-}3$ y se deduce a una situación de desigualdad simple.

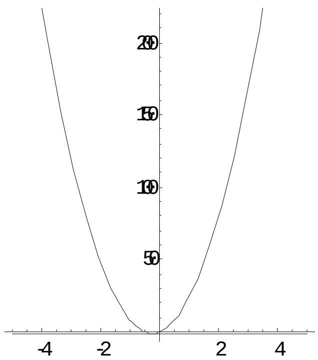
ECUACIONES E INECUACIONES CUADRÁTICAS

$16x^2+8x=-1$

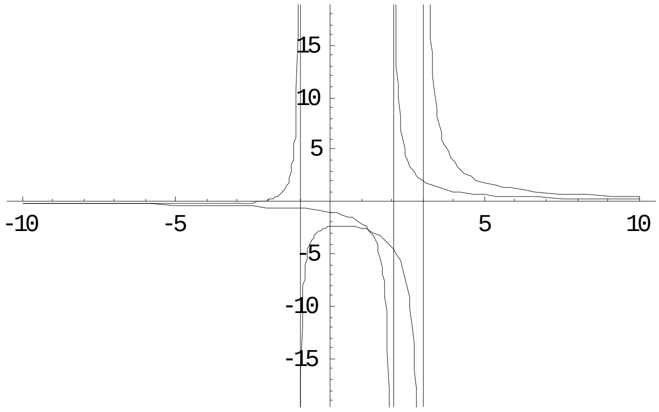
La ecuación se reduce a encontrar cuando $16x^2+8x+1=0$,
para ello se utiliza cualquier método
de factorización utilizado para cuadráticas.

Inspección, fórmula general, completando cuadrados, etc.

De acuerdo con la gráfica, $16x^2+8x+1 \ge 0$ en todo IR.



Que sucede en el caso de $\frac{2}{x-2}=\frac{4}{x-3}-\frac{1}{x+1}$, pues bien, veamos



$$\frac{2}{x-2}-\frac{4}{x-3}+\frac{1}{x+1}=0$$

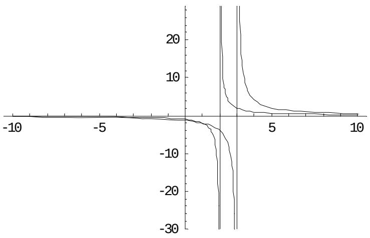
$$\frac{2(x-3)(x+1)-4(x-2)(x+1)+(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-3)(x+1)}=0$$

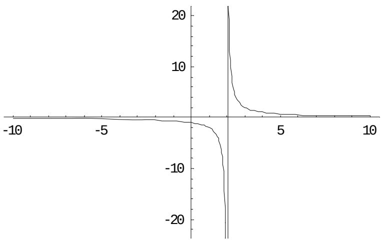
$$\frac{-x^2-5x+8}{(x-2)(x-3)(x+1)}=0$$

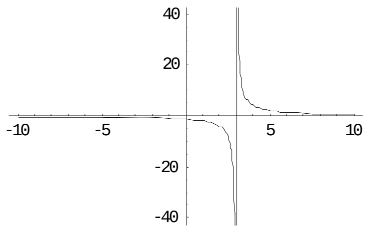
$$-x^2-5x+8=0\rightarrow x=\frac{-5\pm\sqrt{57}}{2}$$

Por tanto, se cuenta con dos soluciones, lo que indica que las curvas se cortan en dos puntos distintos.

Que sucede con las desigualdades? Pues bien, nos interesa encontrar para que valores de IR, se cumple que: $\frac{2}{x-2}\geq\frac{4}{x-3}$







Gráfica de las dos curvas Gráfica de f(x)= $\frac{2}{x-2}$ Gráfica de f(x) = $\frac{4}{x-3}$

De acuerdo con la gráfica esto se cumple para los valores que se localizan en los intervalos: $]-\infty,1]$ y $]2,3[$

$$\frac{2}{x-2}\geq\frac{4}{x-3}$$

$$\frac{2}{x-2}-\frac{4}{x-3}\geq 0$$

$$\frac{2(x-3)-4(x-2)}{(x-2)(x-3)}\geq 0$$

$$\frac{-2(x-1)}{(x-2)(x-3)}\geq 0$$

$$x\in]-\infty,1]y]2,3[$$

Algebraicamente:

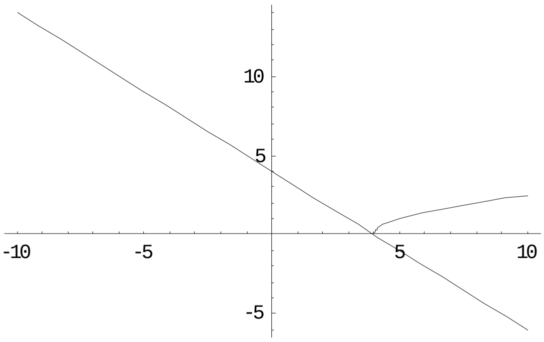
Para resolver la inecuación resultante se debe de tomar en cuenta varios casos, se utiliza una tabla para facilitar el cálculo, el numerador se hace cero en 1, y el denominador en 2 y 3, por tanto son los puntos que se localizan en la tabla

	1	2	3	
-2(x+1)	+	-	-	-
(x-2)	-	-	+	+
(x-3)	-	-	-	+
resultado	+	-	+	-

Nos interesan los casos donde el resultado es positivo:

Ecuaciones que implican radicales:

$\sqrt{x-4} = 4 - x$



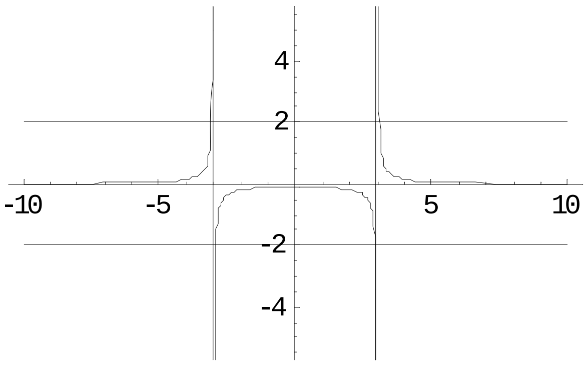
En este caso nos interesa obtener el punto donde las dos se cortan.

$$\sqrt{x-4} = 4 - x$$
$$x - 4 = (4 - x)^2$$
$$x - 4 = 16 - 8x + x^2$$
$$x^2 - 9x + 20 = 0$$
$$(x-5)(x-4) = 0$$
$$\rightarrow x = 5 \text{ y } x = 4$$

El único valor solución es x=4, por qué? El otro valor se excluye.

Qué sucede con las expresiones con valor absoluto?

$\left|\frac{1}{x^2-9}\right| \le 2 \rightarrow -2 \le \frac{1}{x^2-9} \le 2$, luego se separa en dos: $\frac{1}{x^2-9} \le 2$ y $\frac{1}{x^2-9} \ge -2$ y se trabaja como en el caso anterior, cada una de las expresiones y luego se intersecan los resultados para la solución final.



EJERCICIOS

Resuelva los siguientes ejercicios:

1) Halle los intervalos en los que f es creciente, o decreciente
   Halle los valores máximos o mínimos de f
   Halle los intervalos de concavidad y los puntos de inflexión

$$f(x) = \frac{x}{(1+x)^2} \qquad f(x) = x + \sqrt{1-x} \qquad f(x) = 5 - 3x^2 + x^3$$

2) Trace la gráfica de $f(x) = \dfrac{2x^2}{x^2-1}$

3) Resuelva los siguientes problemas

   a) Se va a producir una lata para que contenga 1L de aceite. Encuentre las dimensiones que minimizarán el costo del metal para fabricar la lata.

   b) Encuentre el área del rectángulo más grande que se puede inscribir en un semicírculo de radio r.

4) Encuentre f si $f''(x)=12x^2+6x-4$, $f(0)=4$, $f(1)=1$

5) Si x,y,z son números positivos pruebe que $\frac{(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1)}{xyz}\geq 8$

6) Halle el área aproximada de la región limitada por las curvas $y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ y $y=x^4-x$

7) Resuelva las siguientes ecuaciones e inecuaciones:

   a) $\frac{x+2}{x+3}-\frac{x^2}{x^2-9}=1-\frac{x-1}{3-x}$

   b) $|12+7x|=x^2$

   c) $\sqrt{2x-1}-\sqrt{x-4}=2$

   d) $\frac{3}{x-3}\leq\frac{2}{x+2}$

   e) $\left|\frac{x+1}{x}\right|>2$

8) Resuelva los siguientes problemas:

   a) Una artesa para agua está construida con una placa rectangular de metal de 4 por 6 pies, con los extremos doblados de tal forma que al unirse entre si exactamente en medio del rectángulo, forman un triángulo en cada lado. Si el volumen de la artesa es de 9 pies cúbicos, encuentre el ancho correcto con dos cifras decimales.

   b) Si un objeto se dispara hacia arriba con una velocidad inicial de 112 pies sobre segundo, la distancia d (en pies) que asciende después de t segundos (desprecie la resistencia del aire) está dada por $d=112t-16t^2$. Encuentre el intervalo de tiempo en el que el objeto está a 160 pies más.