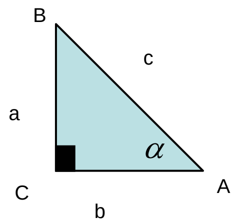
UNIVERSIDAD DE COSTA RICA
ESCUELA DE MATEMÁTICA

I CICLO DEL 2005
CURSO PROPEDEUTICO

ELABORADO POR: MSC. MARIA ALICIA LEON

# IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS Y FÓRMULAS IMPORTANTES EN EL USO DEL CÁLCULO

## TRIÁNGULO RECTÁNGULO




$$sen\alpha = \frac{a}{c}, \qquad \csc\alpha = \frac{c}{a}$$
$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \qquad \sec\alpha = \frac{c}{b}$$
$$\tan\alpha = \frac{a}{b} \qquad \cot\alpha = \frac{b}{a}$$

## IDENTIDADES RECÍPROCAS

$$\csc x = \frac{1}{senx}, \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x}, \qquad cotx = \frac{1}{\tan x}$$

## IDENTIDADES DE COCIENTE

$$\tan x = \frac{senx}{\cos x}, \qquad \text{cotx} = \frac{\text{cosx}}{\text{senx}}$$

## IDENTIDADES PARA NEGATIVOS

$$sen(-x) = -senx, \qquad \cos(-x) = \cos x, \qquad \tan(\text{-}\,\text{x}) = -\tan x$$

## IDENTIDADES PITAGÓRICAS

$$sen^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x, \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

## IDENTIDADES DE SUMA

$$sen(x \pm y) = senx\cos y \pm seny\cos x$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp senxseny$$
$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$$

## IDENTIDADES DE COFUNCIÓN

$$sen\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cos y$$

$$sen\left(90^{\circ}-\theta\right)=\cos\theta$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=seny$$

$$\cos\left(90^{\circ}-\theta\right)=sen\theta$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-y\right)=\cot y$$

$$\tan\left(90^{\circ}-\theta\right)=\cot\theta$$

## IDENTIDADES DE DOBLE ÁNGULO

$$sen2x=2senx\cos x$$

$$\cos 2x=\begin{cases}\cos^2 x-sen^2 x\\ 1-2sen^2 x\\ 2\cos^2 x-1\end{cases}$$

$$\tan 2x=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}=\frac{2\cot x}{\cot^2 x-1}=\frac{2}{\cot x-\tan x}$$

## IDENTIDADES DE MITAD DE ÁNGULO

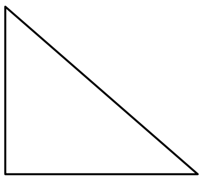
$$sen\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

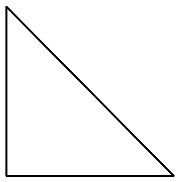
$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\tan\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{senx}=\frac{senx}{1+\cos x}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

## TRIÁNGULOS ESPECIALES

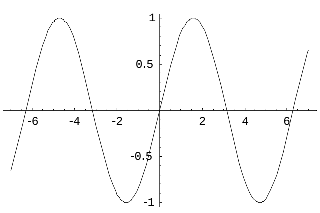
| | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ |
|---|---|---|---|
| senx | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| cosx | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ |
| tanx | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ |
| secx | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ | $\sqrt{2}$ | 2 |
| cscx | 2 | $\sqrt{2}$ | $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ |
| cotx | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |



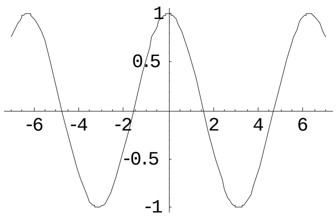


## GRAFICAS DE LAS FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

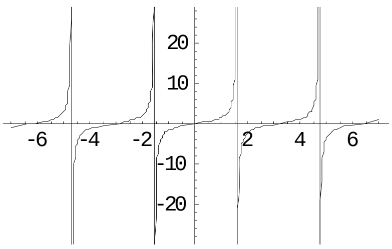
### SENO



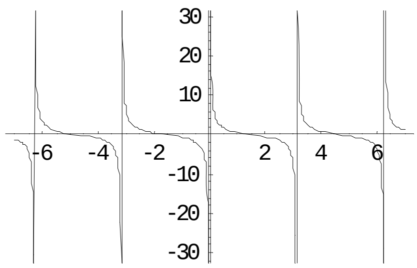

### COSENO



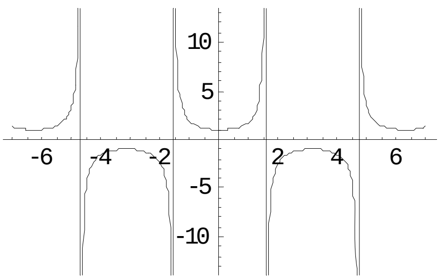

### TANGENTE



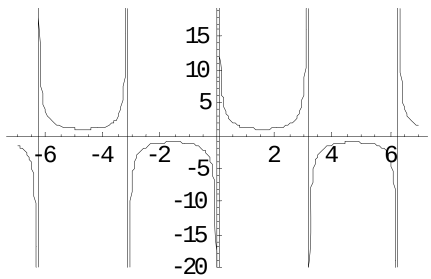

### COTANGENTE




### SECANTE




### COSECANTE




## EJERCICIOS RESUELTOS

1) Demuestre la identidad $\cot x \cos x + senx = \csc x$

$$\cot x \cos x + senx = \frac{\cos x}{senx}\cos x + senx$$
$$= \frac{\cos^2 x}{senx} + senx$$
$$= \frac{\cos^2 x + sen^2 x}{senx}$$
$$= \frac{1}{\text{senx}}$$
$$= \text{cscx}$$

2) Encuentre el valor de $\tan\frac{5\pi}{12}$ en forma radical exacta

$$\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$$

$$\tan\frac{5\pi}{12}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\pi}{6}}$$

$$=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$

$$=2+\sqrt{3}$$

3) Demuestre la identidad: $\tan x+\cot y=\frac{\cos(x-y)}{\cos x seny}$

$$\frac{\cos(x-y)}{\cos x\cos y}=\frac{\cos x\cos y+senxseny}{\cos xseny}$$

$$=\frac{\text{cosxcosy}}{\cos xseny}+\frac{senxseny}{\cos xseny}$$

$$=\text{coty}+\text{tanx}$$

$$=\text{tanx}+\text{coty}$$

3) Calcule el valor exacto de $sen\frac{11\pi}{12}$ sin usar calculadora, mediante una identidad de ángulo medio.

$$sen\frac{11\pi}{12}=sen\frac{\frac{11\pi}{6}}{2}$$

$$sen\frac{11\pi}{12}=sen\frac{\frac{11\pi}{6}}{2}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{11\pi}{6}}{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

5) Demuestre la identidad $sen^2 \frac{x}{2} = \frac{\tan x - senx}{2\tan x}$

$$sen\frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

$$sen^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2}$$

$$= \frac{\text{tanx}}{\text{tanx}} \cdot \frac{1-\cos x}{2}$$

$$= \frac{\text{tanx - tanxcosx}}{2\tan x}$$

$$= \frac{\text{tanx - senx}}{\text{2tanx}}$$

PRACTICA

Demuestre las siguientes identidades trigonométricas

1) $\frac{1+senx}{\cos x} + \frac{\cos x}{1+senx} = 2senx$

2) $\cot y - \cot x = \frac{sen(x-y)}{senxseny}$

3) $\cos^2\frac{x}{2} = \frac{\tan x + senx}{2\tan x}$

Encuentre los siguientes valores, debe de convertir los ángulos a radianes.

1) $\cos 15^\circ$

2) $\tan 105^\circ$

APLICACIONES AL CÁLCULO

Calcule los siguientes límites

1) $\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{2}} \frac{sen2\alpha}{2\alpha - \pi} =$

2) $\lim_{\alpha \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos\left(2\alpha + \frac{\pi}{6}\right)}{sen6\alpha} =$

3) $\lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} =$

Calcule la derivada por la definición de las siguientes funciones

1) $f(x) = sen2x$

2) $f(x) = \cos 3x$

Encuentre la ecuación de la recta tangente a la curva

1) $y = x\cos x$ en el punto $(-\pi, \pi)$

2) $y = \sec x - 2\cos x$ en el punto $\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$

Encuentre los puntos sobre la curva $y = \frac{\cos x}{2 + senx}$ en los cuales la recta tangente es horizontal.