

Funciones II Parte

Por: Prof. Gabriel Rivel

Sea $f(x) = -3x + 2$

Determine: $f(-2)$, $f(a)$, $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

$$f(-2) = -3(-2) + 2 = 6 + 2 = 8$$

$$f(a) = -3(a) + 2 = -3a + 2$$

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-3(a+h) + 2 - (-3a + 2)}{h} = \frac{-3a - 3h + 2 + 3a - 2}{h} = \frac{-3h}{h} = -3$$

Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{si } x \geq 0 \\ x + 3, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

Determine: $f(-2)$, $f(0)$, $f(2)$, $f(a)$

$$f(-2) = (-2) + 3 = 1$$

$$f(0) = 0^2 + 2 = 2$$

$$f(2) = 2^2 + 2 = 6$$

$$f(a) = \begin{cases} a^2 + 2, & \text{si } a \geq 0 \\ a + 3, & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

Dominio Máximo de funciones

Determine el dominio máximo de las siguientes funciones:

- $f(x) = 5x - 4$

$$D_f = \mathbb{R}$$

- $g(x) = \frac{5-x}{x+2}$ $x+2=0$
 $x=-2$

$$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$$

- $h(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$ $x^2 + 2x - 8 \geq 0$
 $(x+4)(x-2) \geq 0$

	$-\infty$	-4	2	$+\infty$
$(x+4)$		-	+	+
$(x-2)$		-	-	+
$(x-4)(x-2)$		+	-	+

$$D_h :=]-\infty, -4] \cup [2, +\infty[$$

- $i(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2x - 8}$

$$D_i = \mathbb{R}$$

- $j(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + 2x - 8}}$

$$\begin{aligned} x^2 + 2x - 8 &= 0 \\ (x + 4)(x - 2) &= 0 \\ x &= -4 \quad x = 2 \end{aligned}$$

$$D_j = \mathbb{R} - \{-4, 2\}$$

Ejercicio:

Determine el dominio máximo de las siguientes funciones:

- $k(x) := \sqrt{\frac{1-2x}{x+1}}$

- $l(x) := |x - 2|$

- $m(x) = \lfloor x \rfloor$

Operaciones con funciones

Recuerde que:

$$\checkmark \quad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x)$$

$$\checkmark \quad (fg)(x) = f(x)g(x)$$

$$\checkmark \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

$$\checkmark \quad \text{Composición de funciones}$$

La función composición $f \circ g$ de dos funciones f y g está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de toda x

Sea $f(x) = x^2 - 1$ y $g(x) = 3x + 5$

Encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 5) = (3x + 5)^2 - 1 = 9x^2 + 30x + 24$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2 - 1) = 3(x^2 - 1) + 5 = 3x^2 + 2$$

Ejercicio

1. Sea $f(x) = x^2 - 16$ y $g(x) = \sqrt{x}$

Encuentre $(f \circ g)(x)$ y $(g \circ f)(x)$

La inversa de una función

Sea $f(x) = 3x - 5$ $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Determine la función inversa de f .

$$y = 3x - 5$$

$$y + 5 = 3x - 5 + 5$$

$$y + 5 = 3x$$

$$\frac{y + 5}{3} = \frac{3x}{3}$$

$$\frac{y + 5}{3} = x$$

$$\frac{x + 5}{3} = f^{-1}(x)$$

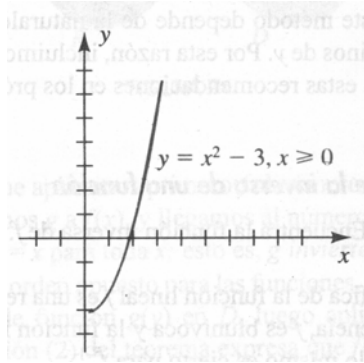
$$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x + 5}{3} \quad f^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

Observe que $(f \circ f^{-1})(x) = x$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Sea $f(x) = x^2 - 3$ para $x \geq 0$.

Encuentre la función inversa de f .



En todo $\mathbb{R}$ no se puede determinar la inversa ya que no es inyectiva, por lo tanto hay que limitar el dominio para tal efecto.

$$f : [0, +\infty[\rightarrow [-3, +\infty[$$

$$y = x^2 - 3$$

$$y + 3 = x^2 - 3 + 3$$

$$y + 3 = x^2$$

$$\pm \sqrt{y + 3} = x$$

$$\sqrt{y + 3} = x, \text{ ya que } x \geq 0.$$

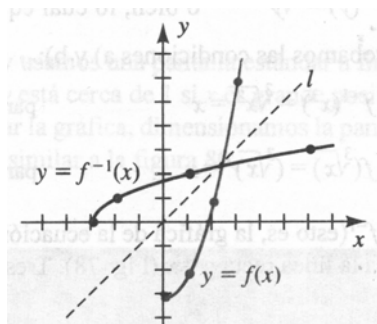
$$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3},$$

$$f^{-1} : [-3, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$$

Observe que $(f \circ f^{-1})(x) = x$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

Trace en un mismo plano las gráficas de las funciones $f(x) = x^2 - 3$, $f^{-1}(x) = \sqrt{x + 3}$ y la función identidad.



Ejercicios adicionales

1. Determine el dominio máximo de las siguientes funciones:

- $f(x) = \frac{\sqrt{x+4} + \sqrt{2-x}}{x^2 + 4x - 5}$

- $g(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{\sqrt{x-7} - 3}$

- $h(x) = |x^2 + 3x - 10|$

2. Determine las asíntotas verticales de las siguientes funciones:

- $f(x) = \frac{x^2 - 3}{x^3}$

- $g(x) = \frac{x^2}{x^2 - 4}$

- $h(x) = \frac{2x^2}{9 - x^2}$

- $i(x) = \frac{x^2(x+1)^3}{(x-2)^2(x-4)^4}$

3. Considere la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2, & \text{si } x \geq 0 \\ 3x + 2, & \text{si } x < 0 \end{cases}$

a. Grafique la función dada por $y = f(x)$

b. Encuentre la función $y = f^{-1}(x)$

c. Grafique la función dada por $y = f^{-1}(x)$