

ELABORADO POR: MSC. MARIA ALICIA LEON

## DIVISION DE POLINOMIOS Y TEOREMA DEL FACTOR

**RECORDAR:** Se pueden encontrar cocientes de polinomios mediante dos procesos de división:

- 1) la división larga similar al usado en la aritmética, y que se utiliza para cuando el divisor es un polinomio, en una o mas variables.
- 2) La división sintética apta solamente para cuando el divisor es un binomio y por lo general en una sola variable

### PASOS CLAVES EN EL PROCESO DE LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

- 1) Ordenar los términos del polinomio, tanto del dividendo como del divisor en orden descendente con respecto a una variable.
- 2) Completar con 0 el coeficiente de la potencia faltante.

### ALGORITMO DE LA DIVISIÓN PARA POLINOMIOS

Si  $f(x)$  y  $g(x)$  son polinomios y si  $g(x) \neq 0$ , entonces existen polinomios únicos  $q(x)$  y  $r(x)$  tales que  $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$  en donde  $r(x) = 0$  o bien el grado de  $r(x)$  es menor que el de  $g(x)$ . El polinomio  $q(x)$  se llama **cociente** y  $r(x)$  se llama **residuo** de la división de  $f(x)$  entre  $g(x)$ .

### TEOREMA DEL RESIDUO

Si un polinomio  $f(x)$  se divide entre  $x - c$ , entonces el residuo es  $f(c)$ .

### TEOREMA DEL FACTOR

Un polinomio  $f(x)$  tiene un factor  $x - c$  si y solo si  $f(c) = 0$ .

## EJERCICIOS RESUELTOS

1) División algebraica larga : Divida  $5 + 4x^3 - 3x$  entre  $2x - 3$

$4x^3 + 0x^2 - 3x + 5 \div 2x - 3$  ordene los términos del dividendo y divisor en potencias descendentes de la variable, complete con coeficiente 0 cualquier término que falte de grado menor que 3 en el dividendo.

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 0x^2 - 3x + 5 \div 2x - 3 \\ -4x^3 + 6x^2 \phantom{-3x + 5} \quad 2x^2 \\ \hline 0 + 6x^2 \phantom{-3x + 5} \end{array}$$

Divida el primer término del dividendo con el primer término del divisor, multiplique el divisor por  $2x^2$ , alinee los términos semejantes, réstelos como en aritmética y colóquelos debajo de  $-3x$ .

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 0x^2 - 3x + 5 \div 2x - 3 \\ -4x^3 + 6x^2 \phantom{-3x + 5} \quad 2x^2 + 3x + 3 \\ \hline 0 + 6x^2 - 3x + 5 \\ -6x^2 + 9x \phantom{+ 5} \\ \hline 0 + 6x + 5 \\ -6x + 9 \\ \hline + 14 \text{ residuo} \end{array}$$

Repita el proceso anterior hasta que el grado del residuo sea menor que el del divisor.

Así que,  $\frac{4x^3 - 3x + 5}{2x - 3} = 2x^2 + 3x + 3 + \frac{14}{2x - 3}$

2) Divida  $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$  entre  $x + 2$

$$2x^4 + 3x^3 - x - 5 \div x + 2$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x - 5 \div x + 2 \\ 2x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 5 \div x + 2 \\ -2x^4 - 4x^3 \phantom{+ 0x^2 - x - 5} \quad 2x^3 - x^2 + 2x - 5 \\ \hline 0 - x^3 + 0x^2 \phantom{- x - 5} \\ x^3 + 2x^2 \phantom{- x - 5} \\ \hline 0 + 2x^2 - x \phantom{- 5} \\ -2x^2 - 4x \phantom{- 5} \\ \hline 0 - 5x - 5 \\ + 5x + 10 \\ \hline 0 + 5 \text{ residuo} \end{array}$$

Recuerde: Debe de ordenar y completar los términos tanto de dividendo como de divisor, de acuerdo a las potencias de la variable.

Así que,

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - x - 5}{x + 2} = 2x^3 - x^2 + 2x - 5 + \frac{5}{x + 2}$$

2) DIVISION SINTÉTICA: Se utiliza para dividir de forma rápida un polinomio  $P(x)$  entre un polinomio lineal de la forma  $x - r$

Ejemplo anterior, efectuado por división sintética. Recuerde también deben de ordenarse y completarse los términos del dividendo de acuerdo a las potencias de la variable.

coeficientes del dividendo				
2	3	0	-1	-5
	4	-2	4	-10
<u>2</u>	<u>2</u>	-1	<u>2</u>	-5
divisor	coeficientes del cociente			residuo
proceso de la división sintética solo se utilizan los coeficientes numéricos				

El segundo y tercer renglón de números se generan como sigue: el primer coeficiente, 2, del dividendo se baja y multiplica por 2 del divisor; y el producto 4, se coloca debajo del segundo coeficiente del dividendo 3, y se resta. La diferencia -1, se multiplica de nuevo por el 2 del divisor y el producto se coloca debajo del tercer coeficiente del dividendo, 0, y se resta. Este proceso se repite hasta obtener el residuo.

coeficientes del dividendo				
2	3	0	-1	-5
	-4	2	-4	10
<u>-2</u>	<u>2</u>	<u>-1</u>	<u>2</u>	<u>-5</u>
divisor	coeficientes del cociente			residuo
proceso de la división sintética solo se utilizan los coeficientes numéricos				

El proceso puede hacerse más rápido, si se cambia el signo del 2 del divisor por -2 y se suma en vez de restar.

### 3) DOS MÉTODOS PARA EVALUAR POLINOMIOS

A) TEOREMA DEL RESIDUO: Si  $P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$  encontrar  $P(-3)$

$$P(-3) = 4(-3)^4 + 10(-3)^3 + 19(-3) + 5 = 2$$

B) UTILIZANDO DIVISIÓN SINTÉTICA

	4	10	0	19	5
		-12	6	-18	-3
-3	4	-2	6	1	<u>2</u>
RESIDUO = P(-3)					

**NOTA:** La división sintética nos sirve para evaluar funciones polinomiales y obtener así la imagen del punto bajo la función a la hora de graficar. también nos sirve para factorizar y poder simplificar expresiones, en el cálculo de límites. la división de polinomios en general la utilizamos para encontrar asíntotas oblicuas, en la graficación de funciones.

**EJERCICIO:** Grafique  $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$ ,  $-3 \leq x \leq 5$ .

	1	-4	-4	16	
-3	1	-7	17	-35	$\rightarrow P(-3)$
-2	1	-6	8	0	$\rightarrow P(-2)$
-1	1	-5	1	15	$\rightarrow P(-1)$
0	1	-4	-4	16	$\rightarrow P(0)$
1	1	-3	-7	9	$\rightarrow P(1)$
2	1	-2	-8	0	$\rightarrow P(2)$
3	1	-1	-7	-5	$\rightarrow P(3)$
4	1	0	-4	0	$\rightarrow P(4)$
5	1	1	1	21	$\rightarrow P(5)$

El polinomio tiene tres cortes con el eje  $x$ , por tanto factoriza como:

$$(x+2)(x-2)(x-4) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = P(x)$$

Observe que -2, 2 y 4 son divisores de 16.

## PRACTICA

Divida utilizando la división larga

- $(4m^2 - 1) \div (2m - 1) =$
- $(x^3 - 1) \div (x - 1) =$
- $(3y - y^2 + 2y^3 - 1) \div (y + 2) =$
- $(16x - 5x^3 - 8 + 6x^4 - 8x^2) \div (2x - 4 + 3x^2) =$
- $(8x^2 - 7 - 13x + 24x^4) \div (3x + 5 + 6x^2) =$

Divida utilizando división sintética

- $(2x^6 - 13x^5 + 75x^3 + 2x^2 - 50) \div (x - 5)$
- $(4x^3 + 4x^2 - 7x - 6) \div \left(x + \frac{3}{2}\right)$
- $(3x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 7x - 3) \div (x + 0.8)$

Encuentre todas las raíces racionales para  $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

Encuentre todas las raíces racionales para  $P(x) = 12x^3 - 16x^2 - 5x + 3$

Encuentre la asíntota oblicua de la función:  $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$

Encuentre la asíntota oblicua de la función:  $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

Descomponga como fracciones parciales la expresión:  $\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

Descomponga como fracciones parciales la expresión:  $\frac{x^3 + x^2 - 13x + 11}{x^2 + 2x - 15}$

Calcule:

a)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

b)  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^5 - 7x^2 - 5x + 5}{2x^4 + 3x + 1}$

c)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{3x^3 - 10x - 4}$