

ELABORADO POR: MSC. MARIA ALICIA LEON

DIVISION DE POLINOMIOS Y TEOREMA DEL FACTOR

RECORDAR: Se pueden encontrar cocientes de polinomios mediante dos procesos de división:

- 1) la división larga similar al usado en la aritmética, y que se utiliza para cuando el divisor es un polinomio, en una o mas variables.
- 2) La división sintética apta solamente para cuando el divisor es un binomio y por lo general en una sola variable

PASOS CLAVES EN EL PROCESO DE LA DIVISIÓN DE POLINOMIOS

- 1) Ordenar los términos del polinomio, tanto del dividendo como del divisor en orden descendente con respecto a una variable.
- 2) Completar con 0 el coeficiente de la potencia faltante.

ALGORITMO DE LA DIVISIÓN PARA POLINOMIOS

Si $f(x)$ y $g(x)$ son polinomios y si $g(x) \neq 0$, entonces existen polinomios únicos $q(x)$ y $r(x)$ tales que $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ en donde $r(x) = 0$ o bien el grado de $r(x)$ es menor que el de $g(x)$. El polinomio $q(x)$ se llama **cociente** y $r(x)$ se llama **residuo** de la división de $f(x)$ entre $g(x)$.

TEOREMA DEL RESIDUO

Si un polinomio $f(x)$ se divide entre $x - c$, entonces el residuo es $f(c)$.

TEOREMA DEL FACTOR

Un polinomio $f(x)$ tiene un factor $x - c$ si y solo si $f(c) = 0$.

EJERCICIOS RESUELTOS

1) División algebraica larga : Divida $5 + 4x^3 - 3x$ entre $2x - 3$

$4x^3 + 0x^2 - 3x + 5 \div 2x - 3$ ordene los términos del dividendo y divisor en potencias descendentes de la variable, complete con coeficiente 0 cualquier término que falte de grado menor que 3 en el dividendo.

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 0x^2 - 3x + 5 \\ - 4x^3 + 6x^2 \\ \hline 0 + 6x^2 \end{array}$$

Divida el primer término del dividendo con el primer término del divisor, multiplique el divisor por $2x^2$, alinee los términos semejantes, restelos como en aritmética y colóquelos debajo de $-3x$.

$$\begin{array}{r} 4x^3 + 0x^2 - 3x + 5 \\ - 4x^3 + 6x^2 \\ \hline 0 + 6x^2 - 3x + 5 \\ - 6x^2 + 9x \\ \hline 0 + 6x + 5 \\ - 6x + 9 \\ \hline + 14 \text{ residuo} \end{array}$$

Repita el proceso anterior hasta que el grado del residuo sea menor que el del divisor.

Así que, $\frac{4x^3 - 3x + 5}{2x - 3} = 2x^2 + 3x + 3 + \frac{14}{2x - 3}$

2) Divida $P(x) = 2x^4 + 3x^3 - x - 5$ entre $x + 2$

$$2x^4 + 3x^3 - x - 5 \div x + 2$$

$$\begin{array}{r} 2x^4 + 3x^3 - x - 5 \\ 2x^4 + 3x^3 + 0x^2 - x - 5 \\ - 2x^4 - 4x^3 \\ \hline 0 - x^3 + 0x^2 \\ x^3 + 2x^2 \\ 0 + 2x^2 - x \\ - 2x^2 - 4x \\ 0 - 5x - 5 \\ + 5x + 10 \\ \hline 0 + 5 \text{ residuo} \end{array}$$

Recuerde: Debe de ordenar y completar los términos tanto de dividendo como de divisor, de acuerdo a las potencias de la variable.

Así que,

$$\frac{2x^4 + 3x^3 - x - 5}{x + 2} = 2x^3 - x^2 + 2x - 5 + \frac{5}{x + 2}$$

2) DIVISION SINTÉTICA: Se utiliza para dividir de forma rápida un polinomio $P(x)$ entre un polinomio lineal de la forma $x - r$

Ejemplo anterior, efectuado por división sintética. Recuerde también deben de ordenarse y completarse los términos del dividendo de acuerdo a las potencias de la variable.

coefficientes del dividendo				
2	3	0	-1	-5
	4	-2	4	-10
2	2	-1	2	-5
divisor	coefficientes del cociente			5 residuo
proceso de la división sintética solo se utilizan los coeficientes numéricos				

El segundo y tercer renglón de números se generan como sigue: el primer coeficiente, 2, del dividendo se baja y multiplica por 2 del divisor; y el producto 4, se coloca debajo del segundo coeficiente del dividendo 3, y se resta. La diferencia -1, se multiplica de nuevo por el 2 del divisor y el producto se coloca debajo del tercer coeficiente del dividendo, 0, y se resta. Este proceso se repite hasta obtener el residuo.

coefficientes del dividendo				
2	3	0	-1	-5
	-4	2	-4	10
-2	2	-1	2	-5
divisor	coefficientes del cociente			5 residuo
proceso de la división sintética solo se utilizan los coeficientes numéricos				

El proceso puede hacerse más rápido, si se cambia el signo del 2 del divisor por -2 y se suma en vez de restar.

3) DOS MÉTODOS PARA EVALUAR POLINOMIOS

A) TEOREMA DEL RESIDUO: Si $P(x) = 4x^4 + 10x^3 + 19x + 5$ encontrar $P(-3)$

$$P(-3) = 4(-3)^4 + 10(-3)^3 + 19(-3) + 5 = 2$$

B) UTILIZANDO DIVISIÓN SINTÉTICA

4	10	0	19	5
	-12	6	-18	-3
-3	4	-2	6	1
			2	
			RESIDUO=P(-3)	

NOTA: La división sintética nos sirve para evaluar funciones polinomiales y obtener así la imagen del punto bajo la función a la hora de graficar. también nos sirve para factorizar y poder simplificar expresiones, en el cálculo de límites. la división de polinomios en general la utilizamos para encontrar asíntotas oblicuas, en la graficación de funciones.

EJERCICIO: Grafique $P(x) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16$, $-3 \leq x \leq 5$.

	1	-4	-4	16	
-3	1	-7	17	-35	$\rightarrow P(-3)$
-2	1	-6	8	0	$\rightarrow P(-2)$
-1	1	-5	1	15	$\rightarrow P(-1)$
0	1	-4	-4	16	$\rightarrow P(0)$
1	1	-3	-7	9	$\rightarrow P(1)$
2	1	-2	-8	0	$\rightarrow P(2)$
3	1	-1	-7	-5	$\rightarrow P(3)$
4	1	0	-4	0	$\rightarrow P(4)$
5	1	1	1	21	$\rightarrow P(5)$

El polinomio tiene tres cortes con el eje x , por tanto factoriza como:

$$(x+2)(x-2)(x-4) = x^3 - 4x^2 - 4x + 16 = P(x)$$

Observe que -2,2 y 4 son divisores de 16.

PRACTICA

Divida utilizando la división larga

a) $(4m^2 - 1) \div (2m - 1) =$

b) $(x^3 - 1) \div (x - 1) =$

c) $(3y - y^2 + 2y^3 - 1) \div (y + 2) =$

d) $(16x - 5x^3 - 8 + 6x^4 - 8x^2) \div (2x - 4 + 3x^2) =$

e) $(8x^2 - 7 - 13x + 24x^4) \div (3x + 5 + 6x^2) =$

Divida utilizando división sintética

a) $(2x^6 - 13x^5 + 75x^3 + 2x^2 - 50) \div (x - 5) =$

b) $(4x^3 + 4x^2 - 7x - 6) \div \left(x + \frac{3}{2}\right) =$

c) $(3x^5 + 2x^4 + 5x^3 - 7x - 3) \div (x + 0.8) =$

Encuentre todas las raíces racionales para $P(x) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

Encuentre todas las raíces racionales para $P(x) = 12x^3 - 16x^2 - 5x + 3$

Encuentre la asíntota oblicua de la función: $f(x) = \frac{x^2 - 3x - 4}{x - 2}$

Encuentre la asíntota oblicua de la función: $f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$

Descomponga como fracciones parciales la expresión: $\frac{x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 5x + 1}{x^2 - 2x + 1}$

Descomponga como fracciones parciales la expresión: $\frac{x^3 + x^2 - 13x + 11}{x^2 + 2x - 15}$

Calcule:

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{3x^5 - 7x^2 - 5x + 5}{2x^4 + 3x + 1}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 - 3x^2 - 4}{3x^3 - 10x - 4}$