UNIDAD 3.2

NOCION DE LIMITE

Los temas tratados hasta ahora, constituyen lo que se conoce como: **precálculo**; es decir, proporcionan las herramientas básicas para el cálculo, pero no constituyen el cálculo. Se trata ahora de establecer, inicialmente de una manera intuitiva por medio de ejemplos, y posteriormente de forma precisa, el concepto mas importante del cálculo: el de **Límite**.

Algunos autores definen el cálculo como el estudio de los límites.

La noción de límite aparece no sólo en los temas objeto de este curso, sino que muestra una gran importancia en cursos de Análisis y de Cálculo vectorial.

2.1. NOCIÓN INTUITIVA DE LÍMITE

Considérese la función definida por: $y = f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$; $x \neq 1$. El único punto real en el cual *f(x)* no está definida es en $x = 1$; pero, en puntos tan cercanos a 1 como se desee, la función se encuentra definida. Esta situación da lugar a la siguiente pregunta: ¿Se aproxima *f(x)* a algún valor específico, cuando x se aproxima a 1?

En las tablas siguientes se hace un seguimiento de *f(x)*, cuando x se aproxima a 1 por la izquierda (valores menores que 1) o por la derecha (valores mayores que 1).

x	*f(x)*	
0	1	
0.3	1.6	
0.5	2	*
0.75	2.5	
0.9	2.8	
0.95	2.9	
0.99	2.98	
0.995	2.99	**
0.999	2.998	
0.9995	2.999	
0.9999	2.9998	
.	.	
.	.	
.	.	
1.000	No Definido	

Tabla 2.1

x	*f(x)*	
2	5	
1.7	4.4	
1.5	4	*
1.25	3.5	
1.1	3.2	
1.05	3.1	
1.01	3.02	
1.005	3.01	**
1.001	3.002	
1.0005	3.001	
1.0001	3.0002	
.	.	
.	.	
.	.	
1.000	No Definido	

Tabla 2.2

La observación atenta de ambas tablas sugiere una respuesta a la pregunta formulada antes. Nótese que a medida que los valores de x, se "acercan" a 1, sin tomar el valor de 1, los valores de *f(x)* se "acercan" a 3. Dándole a la palabra límite un significado intuitivo, se dice que:

El **"límite"** de la función *f(x)* es 3 cuando x tiende a 1.

La afirmación anterior se expresa simbólicamente por cualquiera de las formas:

$f(x) \to 3$ cuando $x \to 1$ (se lee: *f(x)* tiende a 3 cuando x tiende a 1).

O también, $\underset{x \to 1}{Lim} f(x) = 3$ (se lee: límite, cuando x tiende a 1, de *f(x)* es 3)

De una manera mas general, pero conservando el significado intuitivo de la palabra "límite", se dice que:

$\underset{x \to a}{Lim} f(x) = L$, si se puede hacer que *f(x)* esté tan "cerca" de L como se quiera, haciendo que x esté suficientemente "cerca" de a, pero siendo distinta de a.

Volviendo al ejemplo inicial, supóngase que se quiere que *f(x)* difiera de 3 en valor absoluto en menos de 1; es decir, se quiere que: $|f(x) - 3| < 1$ (1).

Pregunta: ¿Cómo elegir los valores de x para que se cumpla (1)?

Nótese que la desigualdad (1) puede escribirse en las formas equivalentes:

$$\begin{aligned} |f(x) - 3| < 1 &\Leftrightarrow -1 < f(x) - 3 < 1 \\ &\Leftrightarrow 2 < f(x) < 4 \qquad (2) \end{aligned}$$

En las tablas 2.1 y 2.2 se señalaron con * los valores de x para los cuales *f(x)* = 2 y *f(x)* = 4. Para que la desigualdad (2) se cumpla, nótese que se pueden elegir los valores de x de tal modo que: $0.5 < x < 1.5$, $x \neq 1$ (3) o equivalentemente,

$$\begin{aligned} & 0.5 < x < 1.5, \quad x \neq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 0.5 - 1 < x - 1 < 1.5 - 1, \quad x \neq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & -0.5 < x - 1 < 0.5, \quad x \neq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & |x - 1| < 0.5, \quad x \neq 1 \\ \Leftrightarrow \quad & 0 < |x - 1| < 0.5 \qquad (4). \end{aligned}$$

El anterior procedimiento nos indica que para que se satisfaga la desigualdad (2), basta que se satisfaga la desigualdad (4). Esto es,
si $0 < |x - 1| < 0.5$, entonces, $|f(x) - 3| < 1$ (5).

Supóngase ahora que se quiere que $|f(x) - 3| < 0.01$ (6).

La pregunta que surge nuevamente es la siguiente: ¿Cómo elegir los valores de x para que se cumpla (6)?.

Un procedimiento similar al del caso anterior, permite escribir la desigualdad (6) en la forma equivalente:

$|f(x) - 3| < 0.01 \Leftrightarrow 2.99 < f(x) < 3.01$ (7).

En las tablas se señalaron con ** los valores de x para los cuales $f(x) = 2.99$ y $f(x) = 3.01$.

Ahora, para que la desigualdad (7) se cumpla, los valores de x deben elegirse de tal manera que:

$$
\begin{aligned}
& 0.995 < x < 1.005 \quad , \quad x \neq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 0.995 - 1 < x - 1 < 1.005 - 1 \, , \quad x \neq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & -0.005 < x - 1 < 0.005 \quad , \quad x \neq 1 \\
\Leftrightarrow \quad & 0 < |x - 1| < 0.005 \qquad\qquad (8).
\end{aligned}
$$

Esto nos indica nuevamente que para que se cumpla la desigualdad (7) es suficiente que se cumpla la desigualdad (8).

Esto es,

Si $0 < |x - 1| < 0.005$, entonces, $|f(x) - 3| < 0.01$ (9).

Mas generalmente, se podría preguntar cómo elegir los valores de x, de tal forma que la diferencia $|f(x) - 3|$ sea menor que cualquier número positivo, tan pequeño como se quiera. Se usa frecuentemente la letra griega ε (Epsilón) para denotar tales números positivos.

La pregunta en su forma mas general es: ¿Para cuáles valores de x, $x \neq 1$, se cumple que: $|f(x) - 3| < \varepsilon$?

Un procedimiento similar al desarrollado en los dos casos particulares anteriores, permite verificar que es suficiente elegir los valores de x, de tal manera que la diferencia $|x - 1|$ sea menor que **cierto número positivo**, corriéntemente denotado por la letra griega δ (Delta).

Resumiendo:

Si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces, $|f(x) - 3| < \varepsilon$.

La cantidad de ensayos que se pueden efectuar con valores pequeños dados de ε, es innumerable y no se demostraría nada con respecto a la existencia del límite de $f(x)$; sólo serviría para convencernos intuitivamente de que $f(x)$ tiende al valor 3 cuando x tiende a 1. Solamente, cuando se logre demostrar que para cualquier número positivo ε **dado**, **existe** al menos otro número positivo δ, tal que:

Si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $|f(x) - 3| < \varepsilon$, se le dará a nuestra intuición una formulación exenta de ambigüedades.

Observación:

Muchas veces las cosas no son tan simples como parece, cuando se analiza intuitivamente la existencia de límite de una función. En algunos casos, la propia intuición o el uso de calculadora, pueden desorientar.

Así, por ejemplo, si se desea calcular: $\underset{x \to 0}{Lim}\left[x^2 - \dfrac{\cos x}{10000}\right]$, y se usa la calculadora, se puede construir la tabla que aparece a continuación:

x	$x^2 - \dfrac{\cos x}{10000}$
±1	0.99995
±0.5	0.24991
±0.1	0.00990
±0.01	0.000000005
.	.
.	.
.	.
0	?

Tabla 2.3

Si se toma la tabla como guía, la intuición llevará a concluir que $\underset{x \to 0}{Lim}\left[x^2 - \dfrac{\cos x}{10000}\right] = 0$

Pero, dicho resultado es incorrecto, ya que cerca de <u>0</u> la función coseno, toma el valor 1. Asi que:

$$\underset{x \to 0}{Lim}\left[x^2 - \frac{\cos x}{10000}\right] = 0^2 - \frac{1}{10000} = -0.0001 \ .$$