

LIMITE Y CONTINUIDAD

Ejercicios Resueltos

1) Calcular $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^4 - 4x + 3} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x^2 + x - 2)}{(x-1)(x^3 + x^2 + x - 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)}{(x^3 + x^2 + x - 3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + 2x + 3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x+2)}{(x^2 + 2x + 3)} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

2) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$

Racionalizando tenemos:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1+x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x(\sqrt{1+x} + \sqrt{1-x})} = 1 \end{aligned}$$

3) Calcular $\lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$

Haciendo $x = u^6$ Si $x \rightarrow 64$, $u^6 \rightarrow 64$ y $u \rightarrow \sqrt[6]{64} = 2$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4} &= \lim_{u \rightarrow 2} \frac{\sqrt{u^6} - 8}{\sqrt[3]{u^6} - 4} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{u^3 - 8}{u^2 - 4} = \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(u-2)(u^2 + 2u + 4)}{(u-2)(u+2)} \\ &= \lim_{u \rightarrow 2} \frac{(u^2 + 2u + 4)}{(u+2)} = 3 \end{aligned}$$

4) Calcular $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}} \cdot \frac{\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-2}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-2}} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2+x-3x+2)}{(4x+1-5x+1)} \cdot \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-2}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2(2-x)}{(2-x)} \frac{\sqrt{4x+1} + \sqrt{5x-1}}{\sqrt{2+x} + \sqrt{3x-2}} = 3$$

5) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 5}{x^4 + 2x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 5}{x^4 + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{5}{x^4}}{1 + \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0$$

6) Calcular $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x} + x}{x + 5}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 5x} + x}{x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{5}{x}} + 1}{1 + \frac{5}{x}} = 2$$

7) Determinar $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ con $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

$$f(x+h) = 3(x+h)^2 - 2(x+h) + 5$$

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3(x+h)^2 - 2(x+h) + 5 - 3x^2 + 2x - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{3x^2 - 6hx + 3h^2 - 2x - 2h + 5 - 3x^2 + 2x - 5}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{-6hx + 3h^2 - 2h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(-6x + 3h - 2)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} -6x + 3h - 2 = -6x - 2 \end{aligned}$$

8) Si $f(x) = \begin{cases} x & \text{Si } x < 1 \\ 2 & \text{Si } x = 1 \\ x+2 & \text{Si } x > 1 \end{cases}$ encuentre los límites laterales en $x = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$$

9) Calcular: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right)$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right)$ c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right) = \frac{1}{2}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right) = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x}}} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1}{1 + \frac{1}{2^{\frac{-1}{x}}}} \right) = 1$

10) Sea f función de variable real definida por $f(x) = \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4}$

- a) Determine él (o los) puntos de discontinuidad de la función.
b) Indique si se trata de discontinuidad evitable. Fundamente su respuesta.

- a) La función no está definida para los puntos de abscisa

$x = 2$ y $x = -2$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x^2 + 2x + 4)}{(x-2)(x+2)} = \frac{12}{4} = 3$

En $x = 2$ la discontinuidad es evitable, basta definir $f(2) = 3$

$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 4} = \frac{-16}{0} = \text{indefinido}$

En $x = -2$ la discontinuidad no es evitable.

Ejercicios Propuestos:

I.- Calcular :

1) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 1}$

2) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 5x + 10}{x^2 - 25}$

3) $\lim_{u \rightarrow -2} \frac{u^3 + 4u^2 + 4u}{(u+2)(u-3)}$

4) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - (a+1)x + a}{x^3 - a^3}$

$$5) \lim_{x \rightarrow 64} \frac{\sqrt{x} - 8}{\sqrt[3]{x} - 4}$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$$

$$7) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x - a}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \quad a > 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2+x} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{4x+1} - \sqrt{5x-1}}$$

$$10) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - x + 3}{x^3 - 8x + 5}$$

$$11) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{10 + x\sqrt{x}}$$

$$12) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x+3)^3 (3x-2)^2}{x^5 + 5}$$

$$13) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x + \sqrt[3]{x}}$$

$$14) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$15) \lim_{x \rightarrow -8} \frac{\sqrt{1-x} - 3}{2 + \sqrt[3]{x}}$$

$$16) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^4}$$

$$17) \text{ Encuentre: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

$$\text{siendo } f(x) = 2x^2 - 1$$

$$18) \text{ Encuentre: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

$$\text{siendo } f(x) = x^2 - 3x + 5$$

$$19) \text{ Encuentre: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h};$$

$$\text{siendo } f(x) = x^3$$

II.- Calcular:

$$1.-a) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x}{x-2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x}{x-2}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x}{x-2}$$

$$2.-a) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}} \right)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2^{\frac{1}{x}}}{3 + 2^{\frac{1}{x}}} \right)$$

III.- Resolver:

1.- Encuentre los límites laterales en $x = 0$ de la función :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-1}{x-1} & \text{Si } x < 0 \\ 0 & \text{Si } x = 0 \\ x & \text{Si } 0 < x < 1 \\ 2 & \text{Si } 1 \leq x \end{cases}$$

2.- La función f está definida por :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{x - 2} & \text{Si } x \neq 2 \\ A & \text{Si } x = 2 \end{cases}$$

¿Qué valor debe tomar A para que la función f sea continua?

3.- Determine si son continuas en $\mathbb{R}$, las siguientes funciones. En caso negativo, responda si se trata de una discontinuidad evitable.

a) $f(x) = \frac{x^2}{x - 2}$

b) $f(x) = \frac{\sqrt{7 + x} - 3}{x^2 - 4}$

4.- Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{Si } x \leq 2 \\ ax - b & \text{Si } 2 < x < 3 \\ 6 - bx & \text{Si } 3 \leq x \end{cases}$

Determine el valor que debe tener a y b para que f sea continua en $\mathbb{R}$.

IV.- Resolver:

- 1) En un grupo de investigación sobre el aprendizaje se propone como modelo para la proporción P de respuestas correctas tras n intentos.

$$P = \frac{0.83}{1 + e^{-0.2n}}$$

- a) Calcular la proporción de respuestas correctas tras $n = 10$ intentos.
b) Calcular la proporción límite de respuestas correctas cuando n tiende a infinito.

- 2) En una academia de mecanografía, el número medio N de palabras por minuto escritas después de t semanas de lecciones viene dado por

$$N = \frac{157}{1 + 5.4e^{-0.12t}}$$

- a) Calcular el número medio de palabras por minuto tras $t = 10$ semanas.
b) Calcular el número medio límite de palabras cuando t tiende a infinito.

3) Un cultivo de bacterias crece siguiendo la función

$$y = \frac{1,25}{1 + 0,25e^{-0,4t}}, \quad t \geq 0$$

donde y denota el peso en gramos del cultivo y t el tiempo en horas. Calcular el peso del cultivo cuando t se hace lo suficientemente grande.

Respuestas :

- I.** 1) 0 2) ∞ 3) 0 4) $\frac{a-1}{3a^2}$ 5) 3
- 6) $\frac{3}{2}$ 7) 0 8) 1 9) 3 10) 0
- 11) ∞ 12) 72 13) 2 14) 1 15) -2
- 17) $4x$ 18) $2x-3$ 19) $3x^2$

- II.-** 1 a) $-\infty$ b) ∞ c) $\exists$
- 2 a) 1 b) $\frac{1}{3}$ c) $\exists$ ya que los límites laterales son distintos.

III.- 1) $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0$

2) $A=4$

3) a) Discontinua en $x = 2$

b) Discontinua en $x=2$; $x=-2$. En $x=2$ discontinuidad evitable $f(2)=\frac{1}{24}$

4) $a = 2$ y $b = 0$.

IV.- 1) a) 0,731 b) 0,83 3) 1,25 g.