EJERCICIOS RESUELTOS DE LIMITES

2.4.1. Sobre límites de funciones:

1. Usando la definición de límite de una función , pruébese que: $\underset{x \to 5}{Lim}\,(9 - 3x) = -6$

Solución:

Sea ε un número positivo cualquiera dado. Se debe hallar un $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - 5| < \delta \;\Rightarrow\; |(9 - 3x) - (6)| < \varepsilon \qquad (1)$$

Para ello considérese la desigualdad de la derecha de (1).

$$\begin{aligned}
|(9 - 3x) - (-6)| < \varepsilon &\Leftrightarrow |9 - 3x + 6| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |15 - 3x| < \varepsilon \\
&\Leftrightarrow |3x - 15| < \varepsilon \qquad \text{(V.A.5)} \\
&\Leftrightarrow 3|x - 5| < \varepsilon \qquad \text{(factorizando)} \\
&\Leftrightarrow |x - 5| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (2)
\end{aligned}$$

Comparando la desigualdad del lado izquierdo de (1) con la desigualdad (2), se puede escoger $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$. (Por supuesto, cualquier valor menor funcionará para δ).

Prueba formal.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{3} > 0$, tal que,

$$\begin{aligned}
0 < |x - 5| < \delta &\Rightarrow |x - 5| < \frac{\varepsilon}{3} \\
&\Rightarrow |3x - 15| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |15 - 3x| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |9 - 3x + 6| < \varepsilon \\
&\Rightarrow |(9 - 3x) - (-6)| < \varepsilon
\end{aligned}$$

En particular, si una persona A escoge un $\varepsilon = 0.01$, en este ejemplo, entonces otra persona B responderá con un $\delta = 0.01/3 = 0.0033$.

Si A propone $\varepsilon = 0.000003$, B escogerá $\delta = 0.000001$ (cualquier valor menor también satisface).

Al graficar la recta $y = f(x) = 9 - 3x$ (fig. 2.9.), se nota que para "obligar" a (9 – 3x) a estar cerca de – 6, se debe "obligar" a x a que esté cerca de 5.

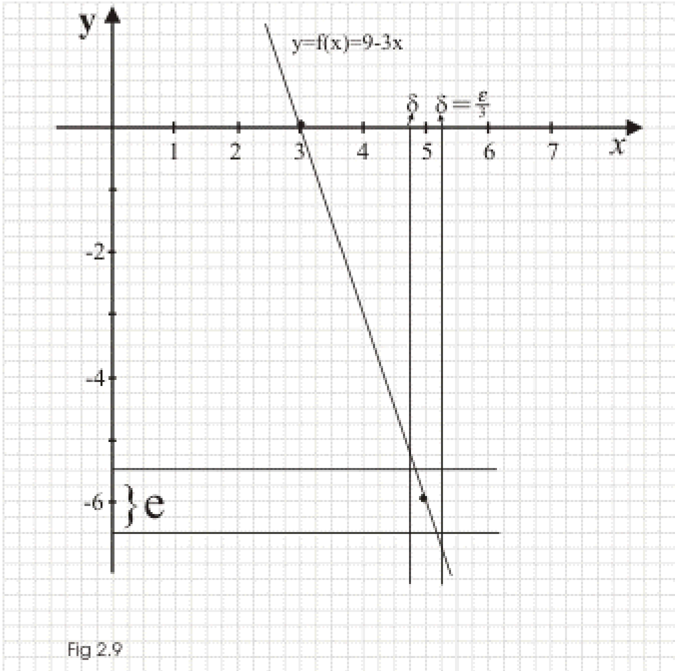

fig. 2.9.

2. Usando la definición del límite de una función, demuéstrese que: $\displaystyle \lim_{x \to 1} \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} = 3$

Solución:

Análisis preliminar.

Sea ε un número positivo cualquiera dado. Se debe hallar un $\delta > 0$ tal que:

Si $0 < |x - 1| < \delta$, entonces $\left| \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon$ (1)

Para ello, considérese inicialmente la desigualdad de la derecha de (1).

$\left| \dfrac{2x^2 - x - 1}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \dfrac{(2x+1)(x-1)}{(x-1)} - 3 \right| < \varepsilon$ (factorizando)

$\Leftrightarrow |(2x+1) - 3| < \varepsilon$ (simplificando, puesto que x – 1 ≠ 0)

$\Leftrightarrow |2x - 2| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow |x - 1| < \dfrac{\varepsilon}{2} \wedge x \neq 1$ (2)

Comparando la desigualdad del lado izquierdo de (1) con la desigualdad (2), se puede escoger $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ (cualquier valor menor funciona).

Prueba formal.

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{2} > 0$, tal que,

$$
\begin{aligned}
0 < |x - 1| < \delta \;&\Rightarrow\; |x - 1| < \delta \;\wedge\; x \neq 1 \\
&\Rightarrow\; |x - 1| < \frac{\varepsilon}{2} \;\wedge\; x \neq 1 \\
&\Rightarrow\; |2x - 2| < \varepsilon \;\wedge\; x \neq 1 \\
&\Rightarrow\; |(2x + 1) - 3| < \varepsilon \;\wedge\; x \neq 1 \\
&\Rightarrow\; \left| \frac{(2x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} - 3 \right| < \varepsilon \\
&\Rightarrow\; \left| \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1} - 3 \right| < \varepsilon
\end{aligned}
$$

En particular, si en este ejemplo una persona A escoge un $\varepsilon = 0.01$, entonces otra persona B responderá con un $\delta = 0.005$. Si A propone $\varepsilon = 0.0002$, B escogerá $\delta = 0.0001$ (cualquier valor menor también cumple).

La gráfica de la función $y = f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x - 1}$ es la misma que corresponde a la recta de ecuación $y = 2x + 1$, con $x \neq 1$.

En la fig. 2.10., aparece la gráfica de la función dada. Nótese que si el ancho de la banda alrededor del punto $y = 3$ es ε, entonces, el ancho de la banda alrededor del punto $x = 1$ es $\delta = \varepsilon / 2$.

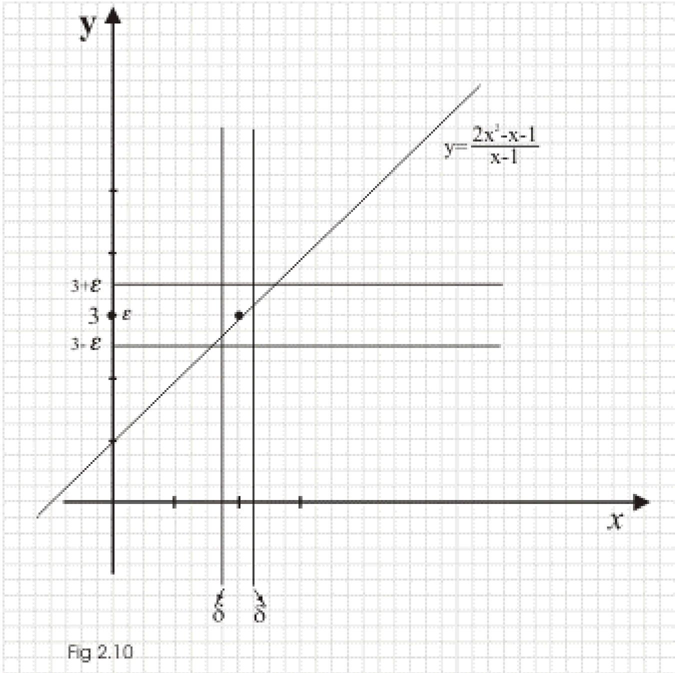

fig. 2.10.

3. Considérese la función definida por $f(x) = x^n$, con $n \in N$. Evalúese: $\displaystyle \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

Solución:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^n - 2^n}{h} \qquad (1)$$

Si se intentase evaluar directamente el último límite, se obtendría $\dfrac{(2+0)^n - 2^n}{0} = \dfrac{0}{0}$ (indeterminado).

Se puede eliminar la indeterminación, factorizando el numerador de la fracción (1):

$$\lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^n - 2^n}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{[(2+h) - 2][(2+h)^{n-1} + (2+h)^{n-2} \cdot 2 + (2+h)^{n-3} \cdot 2^2 + ... + 2^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h[(2+h)^{n-1} + (2+h)^{n-2} \cdot 2 + (2+h)^{n-3} \cdot 2^2 + ... + 2^{n-1}]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \underbrace{\left[(2+h)^{n-1} + (2+h)^{n-2}\cdot 2 + (2+h)^{n-3}\cdot 2^2 + \ldots + 2^{n-1}\right]}_{n-\text{términos}}$$

$$= \underbrace{2^{n-1} + 2^{n-1} + 2^{n-1} + \ldots + 2^{n-1}}_{n-\text{terminos}}$$

$$= n\cdot 2^{n-1}$$

4. Evaluar: $\lim_{x\to 4} \dfrac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

Solución:

Si se aplica directamente el límite de un cociente, se llega a la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$.
Se puede eliminar la indeterminación, racionalizando el denominador y simplificando. Así:

$$\lim_{x\to 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2} = \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{x}\right)^2 - 2^2}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}{x-4} = \lim_{x\to 4}\left(\sqrt{x}+2\right) = \sqrt{4}+2 = 4$$

5. Evalúese: $\lim_{x\to 4} \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

Solución:

Al sustituir directamente x por 4, se llega a la forma indeterminada $\dfrac{0}{0}$. Para tratar de eliminar la indeterminación, se multiplican numerador y denominador de la fracción por la expresión conjugada del denominador. Asi:

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{x-2}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-2)-2}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{x-4}$$

Al sustituir nuevamente x por 4, en la última expresión, continúa la indeterminación $\frac{0}{0}$. Para eliminarla, se multiplica numerador y denominador de la última fracción por $\left(\sqrt{2x+1}+3\right)$.

Luego,

$$\lim_{x \to 4} \frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}} = \lim_{x \to 4} \frac{\left(\sqrt{2x+1}-3\right)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{[2x+1-9]\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{2(x-4)\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{(x-4)\left(\sqrt{2x+1}+3\right)}$$

$$= \lim_{x \to 4} \frac{2\left(\sqrt{x-2}+\sqrt{2}\right)}{\sqrt{2x+1}+3} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

6. Encuéntrese el valor del siguiente límite, o establezca que no existe:

$$\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}, \; x \neq 1 .$$

Solución:

De acuerdo con la definición de valor absoluto, se tiene:

$$|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & si \quad x-1 < 0 \end{cases}$$

Es decir, $|x-1| = \begin{cases} x-1 & si \quad x \geq 1 \\ 1-x & si \quad x < 1 \end{cases}$

De esta forma:

$$\frac{|x-1|}{x-1} = \frac{x-1}{x-1} = 1, \; si \;\; x > 1$$

$$\frac{|x-1|}{x-1}=\frac{(A-x)}{(x-1)}=-1, si \quad x<1$$

La función: $f(x)=\dfrac{|x-1|}{x-1}, x \neq 1$, puede escribirse entonces como una función a tramos, asi:

$$f(x)=\frac{|x-1|}{x-1}=\begin{cases} 1 & si \quad x>1 \\ -1 & si \quad x<1 \end{cases}$$

Su gráfica aparece en la fig. 2.12.

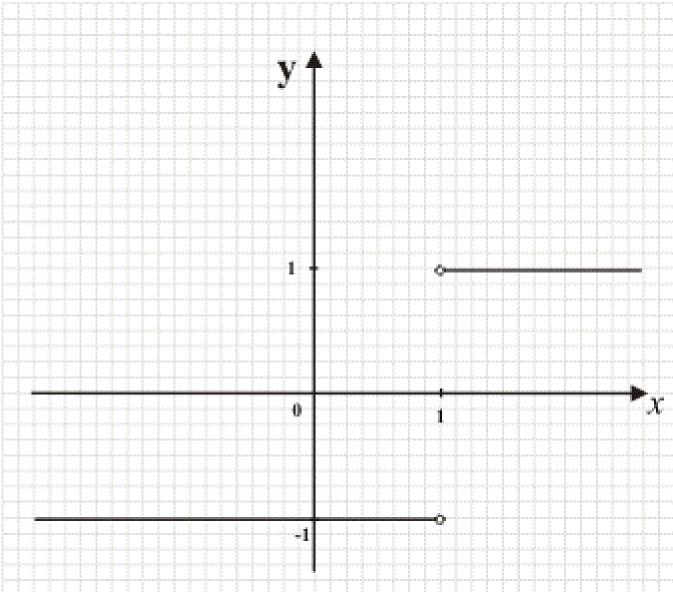

Fig 2.12

Ahora, $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(-1)=-1 \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}(1)=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} f(x)$ NO EXISTE

7. Considérese la función a tramos definida así:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\leq -2 \\ ax+b & si \quad -2<x<2 \\ 2x-5 & si \quad x\geq 2 \end{cases}$$

Encuéntrense los valores de las constantes a y b para que: $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ existan.

Solución:

El siguiente diagrama recoge la información obtenida de *f*.

$f(x) = x^2$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $f(x) = ax + b$

$f(x) = 2x - 5$

$$\lim_{x\to -2} f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) \text{ y } \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \text{ existen} \\ \text{y además: } \lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} f(x) \end{cases}$$

Pero, $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^+} (ax + b) = -2a + b$ (1).

$\lim\limits_{x\to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to -2^-} (x^2) = 4$ (2).

Para que el límite de $f(x)$ en -2 exista, es preciso que: $-2a + b = 4$ (3).

Igualmente,

$$\lim_{x\to 2} f(x) \text{ existe } \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) \text{ y } \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \text{ existen} \\ \text{y además: } \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \end{cases}$$

Pero, $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x - 5) = -1$ (4).

$\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (ax + b) = 2a + b$ (5).

De (4) y (5) se sigue que $2a + b = -1$ (6).

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones (3) y (6) se obtiene: $a = -\dfrac{5}{4}$ y $b = \dfrac{3}{2}$.

Con estos valores, la función f se transforma en:

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & si \quad x\le -2 \\ -\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{2} & si \quad -2<x<2 \\ 2x-5 & si \quad x\ge 2 \end{cases}$$

La gráfica de f aparece en la fig. 2.13.

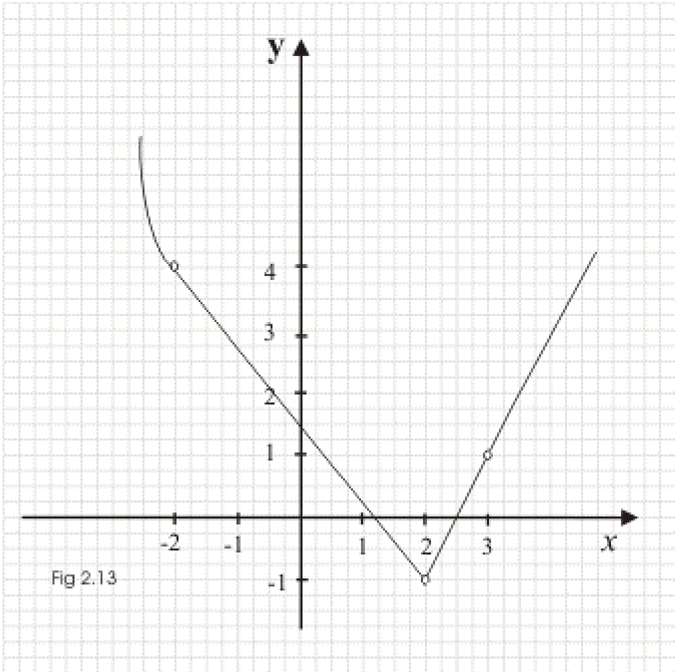

fig. 2.13