TAREA DE LÍMITES y CONTINUIDAD

I. En los ejercicios 1 a 8 diga si la afirmación dada es falsa o verdadera (explique).

1. Si *f* es una función tal que $\lim_{x \to 3} f(x) = 7$ entonces podemos asegurar que *f(3)* = 7.
2. Si *f(5)* no está definido entonces $\lim_{x \to 5} f(x)$ no existe.
3. Para cualquier función polinomial *p* se tiene que $\lim_{x \to -4} p(x) = p(4)$
4. Si *f* y *g* son funciones tales que $\lim_{x \to c} \left[f(x) + g(x) \right]$ existe entonces podemos asegurar que $\lim_{x \to c} f(x)$ *y* $\lim_{x \to c} g(x)$ existen.
5. Si $\lim_{x \to -1} f(x)/g(x) = 3/5$, entonces podemos asegurar que $\lim_{x \to -1} g(x)$ es diferente de 0.
6. Si $\lim_{x \to c} f(x)$ es diferente de $\lim_{x \to c} g(x)$ es diferente de 0 entonces $\lim_{x \to c} \left[f(x)\, g(x) \right]$ existe y es diferente de 0.
7. Si $\lim_{x \to 8} f(x) = \lim_{x \to 8} g(x)$ entonces podemos asegurar que *f(8) = g(8)*.
8. Sea *f* una función tal que $\lim_{x \to 3} f(x) = 8$. . Con base en esto diga cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas (¿por qué?).
   (a) Necesariamente *f(3)* = 8.
   (b) Para valores de *x* "suficientemente próximos" a 3, los valores de *f(x)* son suficientemente próximos a 8.
   (c) Necesariamente existe un valor *c* muy cercano a 3 tal que *f(c)* = 8.
   (d) Necesariamente, a partir de un cierto valor de *x* cercano a 3 los valores de *f(x)* son iguales a 8.

II. En los ejercicios 9 a 19 escoja la opción que conteste o complete correctamente el enunciado propuesto.

9. Si $\lim_{x \to 3} f(x) = 2$ *y* $\lim_{x \to 3} g(x) = 0$ entonces podemos asegurar que

(a) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)}$ no existe, (b) $\lim_{x \to 3} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$, (c) $\lim_{x \to 3} \frac{g(x)}{f(x)}$ no existe, (d) $\lim_{x \to 3} \frac{g(x)}{f(x)} = 0$

10. Si $\lim_{x \to -2} f(x) = 3$ entonces $\lim_{x \to -2} \left(f^2(x) - x^2 \right)$ es igual a: (a)13 (b) 5 (c) 8 (d) 0
11. El valor de $\lim_{x \to 1} \frac{|x-1|}{x-1}$ es: (a) 2 (b) 1 (c) -1 (d) 0
12. El límite $\lim_{x \to -3} \frac{1/x - 1/3}{x-3}$ es igual a: (a) 0 (b) 1/3 (c) -1/9 (d) No existe
13. El límite $\lim_{x \to -1} \frac{|x+1|}{x+1}$ es igual a: (a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) No existe

14. El límite $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{|x-1|}$ es igual a: (a) 3 (b) -3 (c) 2 (d) No existe

15. El límite $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2xh+h^2}{x+h}$ es igual a: (a) x (b) h (c) 0 (d) No existe

16. Una función cuyo límite no existe cuando x tiende 2 es la siguiente:

$(a)\ f(x)=\dfrac{x-2}{x+2} \quad (b)\ \ f(x)=\dfrac{x^2+x-6}{x-2} \quad (c)\ f(x)=\dfrac{2x}{x+2}$

17. Para cierta función *f* se obtuvieron las siguientes tablas de valores:

Hacia 1 por la izquierda					1	Hacia 1 por la derecha				
x	0,8	0,88	0,888	...	0,8...8	1,0...2	...	1,002	1,02	1,2
f(x)	3	3	3	...	3	3	...	3	3	3

De acuerdo con esto, sobre $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ podemos decir que

(a) es igual a 2
(b) es igual a 3
(c) es igual a algún número en el intervalo [2,3]
(d) no existe

III. Problemas y preguntas de desarrollo

18. La figura 2.49 representa la gráfica de una función *f*. Con base en ella dé el valor de cada límite o establezca que el límite no existe.

$(a)\lim\limits_{x\to -4} f(x)\ \ (b)\lim\limits_{x\to 0} f(x)\ \ (c)\ \lim\limits_{x\to 1} f(x)\ (d)\ \lim\limits_{x\to -4} f(x)$

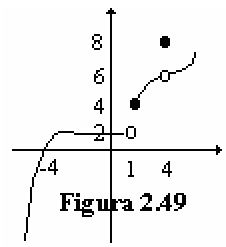


Figura 2.49

19. La figura 2.50 representa la gráfica de una función *g*. Con base en ella dé el valor de cada límite o establezca que el límite no existe

$(a)\ \lim\limits_{x\to -8} g(x)\ \ (b)\lim\limits_{x\to -8} g(x)\ \ (c)\ \lim\limits_{x\to 0} g(x)\ (d)\lim\limits_{x\to -4} g(x)\ (e)\lim\limits_{x\to 8} g(x)$

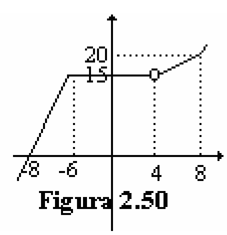


Figura 2.50

20. La figura 2.51 representa la gráfica de una función *h*. En cada caso determine el valor de cada límite o establezca que el límite no existe.

$(a)\lim\limits_{x\to -3} h(x)\ \ (b)\lim\limits_{x\to 0} h(x)\ \ (c)\ \lim\limits_{x\to 2} h(x)\ \ (d)\lim\limits_{x\to 3} h(x)$

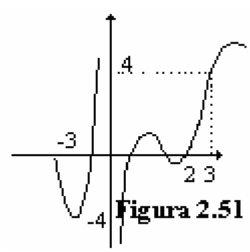


Figura 2.51

21. Considere la función $f\left(x\right)=\dfrac{3^x-1}{x}$ Utilice una calculadora para completar la siguiente tabla

x	0,01	0,01	0,001	-0,001	-0,01	-0,1
$f(x)$	_	_	_	_	_	_

22. De acuerdo con los resultados obtenidos, ¿es posible que exista $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}$?

23. Completando una tabla como la del ejemplo anterior estime el valor de $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{2^x-1}$ en caso de que exista. ¿Puede dar un valor exacto o solamente una aproximación?

IV. En los ejercicios 24 a 27 calcule el límite indicado utilizando los teoremas sobre limites y los límites de la función identidad y la función constante, justifique cada paso.

24. $\underset{x\to 2}{Lim}\left(3x+4\right)$ 25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x-1}{x^2+2}$

26. $\lim\limits_{s\to -1}\sqrt{s^2-s+2}$ 27. $\underset{x\to 1/2}{Lim}\left(x^3+x+4\right)$

V. En los ejercicios 28 a 30 encuentre los límites que se piden suponiendo que

$\underset{x\to c}{Lim}\ f\left(x\right)=4 \quad y \quad \underset{x\to c}{Lim}\ g\left(x\right)=-2$

28. $\lim\limits_{x\to c}\left(3f\left(x\right)+4g\left(x\right)\right)$	29. $\lim\limits_{x\to c}\sqrt{2f\left(x\right)+g^2\left(x\right)}$	30. $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{2g\left(x\right)+f\left(x\right)}{f\left(x\right)-g\left(x\right)}$

VI. En los ejercicios 31 a 53 calcule el límite que se pide o determine que no existe.

31. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{x^2-49}{x-7}$ 32. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{x-3}$ 33. $\lim\limits_{t\to -3}\dfrac{t^3+27}{t+3}$ 34. $\lim\limits_{t\to 4}\dfrac{t^2+2t-24}{t-4}$

35. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-2x}{x^2-4}$ 36. $\underset{x\to 1}{Lim}\dfrac{x^3-2x+1}{x^2+3x-4}$ 37. $\underset{x\to 5}{Lim}\dfrac{x^2-5x+10}{25-x^2}$ 38. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^4-4x+3}$

39. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{2}{x-2}$ 40. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(x+h\right)^3-x^3}{h}$ 41. $\lim\limits_{s\to 9}\dfrac{s-9}{\sqrt{s}-3}$ 42. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+5-3}}{x-4}$

43. $\lim\limits_{s\to 2}\dfrac{2s-4}{\sqrt{s+2}-2}$ 44. $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\sqrt{1+t}-\sqrt{1-t}}{t}$ 45. $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{2-\sqrt{x-3}}{x^2-49}$ 46. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-\sqrt{5+r}}{1-\sqrt{5-r}}$

47. $\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{2+x-2}}{\sqrt{7+x-3}}$ 48. $\lim_{y\to 2}\frac{1/y-1/2}{y-2}$ 49. $\lim_{h\to 0}\frac{1+h\frac{1}{h-1}}{h}$ 50. $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{|x-1|}$

51. $\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2x+2h}-\sqrt{2x}}{h}$ 52. $\lim_{t\to -1}\frac{\sqrt[3]{t+1}}{t+1}$ 53. $\lim_{t\to x}\frac{\sqrt{x^2+1}}{t-x}$

54. Dada $f(x)=\sqrt{x+3}$ calcular $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$

55. Dada *g(x)* = $x^2 + 3x$ calcular $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}$

56. Dada $h(x)=\frac{1}{x^2}$ *calcule* $\lim_{x\to 3}\frac{h(x)-h(3)}{x-3}$

57. Bosqueje la gráfica de la función *f* definida por.

$$f(x)=\begin{cases} 2-x\ si\ x<2 \\ x-2\ si\ 2<x<3 \\ 10-x^2\ si\ \geq 3 \end{cases}$$

Y luego encuentre los siguientes límites o establezca que no existen

$(a)\lim_{x\to 2} f(x)$ $(b)\lim_{x\to 3} f(x)$ $(c)\lim_{x\to 1} f(x)$ $(d)\lim_{x\to 5} f(x)$

58. Dibuje la gráfica de una función f que satisfaga simultáneamente todas las condiciones siguientes:

(a) Su dominio sea [-2,2] - {1}, (b) *f(-2) = 0, f(2) = 3, f(-1) = -1, (c) , (d)* $\lim_{x\to 1} f(x)=2$

59. Escriba un ejemplo de dos funciones f y g tales que $\lim_{x\to 2}\left[f(x)+g(x)\right]$ existe y sin embargo $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe o $\lim_{x\to 2} g(x)$ no existe.

60. Suponga que *f* y *g* son funciones tales que $\lim_{x\to c} f(x)=0$ y $\lim_{x\to c}[f(x)\ g(x)=1]$. Explique por qué, bajo esa condiciones, se puede concluir que no existe.

61. Se tiene una función *g* tal que *g(x) distinto de* 0 para todo *x pertenecientes a* ***R*** y $\lim_{x\to 0} g(x)=1$:

a) Determine una función f tal que $\lim_{x\to 0}\left[g(x)\ f(x)\right]=1$

b) Determine una función h tal que $\lim_{x\to 0}\left[g(x)\ h(x)\right]=-3$

c) Determine una función p tal que $\lim_{x\to 0}\left[g(x)\ p(x)\right]$, no exista

VII. Interpretación gráfica

1. La figura 3.18 representa la gráfica de una función *f*; con base en ella determine cada uno de los siguientes límites o establezca que no existe:

$(a)\lim_{x\to -2^-} f(x)$ $(b)\lim_{x\to -2^+} f(x)$ $(c)\lim_{x\to -2} f(x)$ $(d)\lim_{x\to 3^-} f(x)$ $(e)\lim_{x\to 3^+}(x)$ $(f)\lim_{x\to 3} f(x)$

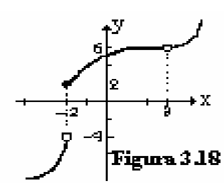


Figura 3.18

2. La figura 3.19 representa la gráfica de una función *h*; con base en ella determine cada límite o establezca que no existe:

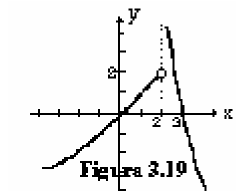


Figura 3.19

$(a)\lim\limits_{x\to-2^-} h(x)$ $(b)\lim\limits_{x\to-2^+} h(x)$ $(c)\lim\limits_{x\to-2} h(x)$ $(d)\lim\limits_{x\to3^-} h(x)$

$(e)\lim\limits_{x\to3^+} h(x)$ $(f)\lim\limits_{x\to3} h(x)$

3. La figura 3.20 representa la gráfica de una función *h*; con base en ella determine cada límite o establezca que no existe:

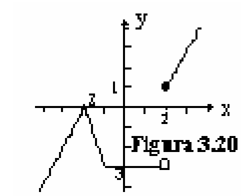


Figura 3.20

$(a)\lim\limits_{x\to-2^-} h(x)$ $(b)\lim\limits_{x\to-2^+}$ $(c)\lim\limits_{x\to-2} h(x)$ $(d)\lim\limits_{x\to2^+} h(x)$

$(e)\lim\limits_{x\to2^-} h(x)$ $(f)\lim\limits_{x\to2} h(x)$

VIII. En los ejercicios 4 a 7 se da la gráfica de una función. En cada caso diga cuáles son los puntos de discontinuidad de la función.

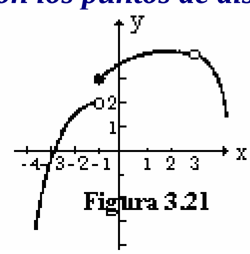
4 

Figura 3.21

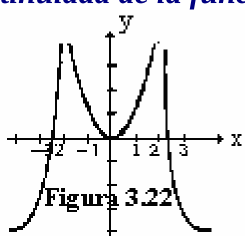
5 

Figura 3.22

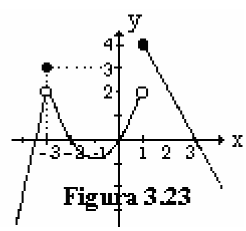
6 

Figura 3.23

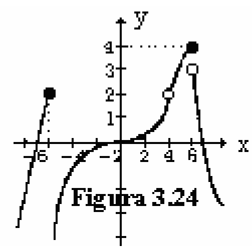
7 

Figura 3.24

IX. Falso o Verdadero

8. Suponga que *g* es una función tal que $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)=5$. En cada caso diga si la afirmación es verdadera o falsa (explique).

1. Necesariamente $\lim\limits_{x\to2^-} g(x)=5$
2. Necesariamente $\lim\limits_{x\to2} g(x)=5$
3. Necesariamente existe un número $c > 2$, muy cercano a 2 tal que $g(c)=5$.
4. A medida que tomamos valores de *x* muy próximos a 2, pero mayores que 2, los valores de *f(x)* se aproximan a 5.

X. En los ejercicios 9 a 13 diga si la afirmación dada es falsa o verdadera (explique).

9. Si $\lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-} f(x)$ entonces se puede asegurar que *f* es continua en 3.
10. Siempre que *f* y *g* sean continuas en *c* se tiene que *f/g* es continua en *c*.
11. Si *f* es continua en 5 y $\lim\limits_{x\to5^+} f(x)=4$ entonces podemos asegurar que $\lim\limits_{x\to5} f(x)=4$.
12. La suma de dos funciones continuas en $x=5$ es continua en $x=5$.
13. Si *f* es una función continua en 2 y $f(2)=4$ entonces $\sqrt{f(x)}$ es continua en 2.

XI. En los ejercicios 14 a 23 escoja la opción que complete o conteste correctamente el enunciado propuesto.

Dr. José Luis Díaz Gómez. Departamento de Matemáticas, Módulo #7, cubículo No. 1

14. La siguiente es una función que tiene exactamente dos puntos de discontinuidad:

$$(a)\ f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1} \quad (b)\ f(x)=\frac{x+1}{x^2-1} \quad (c)\ f(x)=\frac{x-1}{x^2+2x+1} \quad (d)\ f(x)=\frac{x^2-1}{x^3+1}$$

15. ¿En cuántos valores de *x* es discontinua la función $f(x)=\frac{1}{x^3+8}$?

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

16. Los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x)\begin{cases} x+2 & si\ x\le 0 \\ x^2 & si\ 0<x<3 \\ 2x+3 & si\ x\ \ge 3 \end{cases}$$

son : (a) 0 y 3 (b) Solo el 3 (c) Solo el 0 (d) Ninguno.

17. ¿Para qué valor o valores de k la función

$$f(x)=\begin{cases} x^2+4 & si\ x\le k \\ 2x^3+3 & si\ x>k \end{cases}$$

es continua en todo **R**?

(a) Solo para *k*=1 (b) Para *k*=1 o *k*=2 (c) Para cualquier valor de *k* (d) Para ningún valor de *k*.

18. Sea f una función para la cual se cumple que $\lim_{x\to 2^-} f(x)=-1$, $\lim_{x\to 2^+} f(x)=-1$ y f(2)=1.

Considere las siguientes proposiciones:

I. $\lim_{x\to 2} f(x)$ no existe,

II. *f* es continua en *x*=2,

III. 2 no pertenece al dominio de *f*.

De las anteriores proposiciones, son verdaderas:

(a) Todas (b) I y III (c) Solo II (d) Ninguna.

19. Si *f* es una función continua en 2 y se tiene que $\lim_{x\to 2^+} f(x) = y$

$\lim_{x\to 2^-} f(x)=-w$ entonces podemos asegurar que

(a) *w=1* (b) *w* puede ser cualquier número real (c) *w=2* (d) *w=0*

20. Sea *f* una función continua en todo **R** y sea *g* una función que satisface: $\lim_{x\to 1} g(x)=2$ y *g*(1)=0; podemos afirmar que el límite $\lim_{x\to 1} f(g(x))$ es igual a:

(a) *f(0)* (b) *f(1)* (c) *f(2)* (d) No existe.

21. Sea *f* una función tal que *f*(4)=2 y $\lim_{x\to 4} f(x)=3$. Entonces, podemos afirmar lo siguiente:

(a) *f* es continua en *x=4* (b) $\lim_{x\to 4^+} f(x)=2$ (c) $\lim_{x\to 4^+} f(x)=3$ (d) *f* es discontinua en *x=4*

22. Sea *f* una función definida por $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{3x+2}$ $f\left(x\right)=\dfrac{2x-1}{3x+2}$. Podemos afirmar lo siguiente:
(a) *f* está definida y es continua en todo **R**
(b) *f* está definida y es continua en **R**-{-2/3}
(c) *f* está definida y es continua en **R**-{1/2}
(d) *f* está definida y es continua en **R**-{-2/3,1/2}

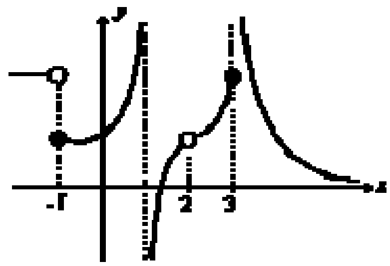


Figura 3.25

23. Si la figura 3.25 representa la gráfica de una función *f*, ¿en cuáles puntos *f* está definida y no es continua?
(a) -1, 1, 2 y 3 (b) -1 y 3 (c) -1 y 2 (d) -1, 2 y 3

XII. En los ejercicios 24 a 31 calcule los límites laterales que se indican o establezca que no existe.

24. $\lim\limits_{x\to 6^+}\sqrt{x-6}$ 25. $\lim\limits_{x\to 6^-}\sqrt{x-6}$ 26. $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt[3]{x^3-8}$ 27. $\lim\limits_{x\to 2^+}\sqrt[3]{x^3-8}$

28. $\lim\limits_{t\to 5^+}\sqrt{t^2-25}+3$ 29. $\lim\limits_{t\to 2^+}\dfrac{\sqrt{\left(t-2\right)^2}}{t-2}$ 30. $\lim\limits_{t\to 2^-}\dfrac{\sqrt{\left(t-2\right)}^2}{t-2}$ 31. $\lim\limits_{y\to 6^+}\dfrac{\sqrt{y^2-36}}{t+6}$

XIII. En los ejercicios 32 a 39 pruebe que la función f dada es continua en el valor c indicado.

32. $f\left(x\right)=x^2-3x+1,\ \ c=3$ 33. $f\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $c=2$

34. $f\left(t\right)=\sqrt{t-2,}\ \ c=3$ 35. $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+1 \ si \ x\leq 2\\ x^2+1 \ si \ x<2\end{cases}$, c=2

36. $f\left(x\right)=\begin{cases}x^3-3 si\, x>-1| \ , \ c\ =1\\ -2x \ si \ \ x\leq 1\end{cases}$ 37. $f\left(x\right)=\begin{cases}-3x+1 \ si \ x\geq -1\\ 3-x \quad si \ x<-1, \quad c=-1\end{cases}$

38. $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+3 \ si \ >2\\ x^2+1 \ si \ \ x \ <2\end{cases}$, $c=3$

XIV. En los ejercicios 39 a 52 determine en qué intervalos es continua la función dada.

39. $g(x)=x^4+x^2-x-1$ 40. $f\left(x\right)=\dfrac{x+2}{x^2-3x+2}$ 41. $g\left(x\right)=\dfrac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$

42. $q\left(x\right)=\dfrac{x^2-16}{x-4}$ 43. $h\left(x\right)=\dfrac{x}{x^2+2}$ 44. $f\left(x\right)=\dfrac{\sqrt{10-x}}{x-5}$

45. $f\left(x\right)=\dfrac{\left|x+2\right|}{x+2}$ 46. $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+4 & si\ x>2\\ x^2+1 & si\ x\le 2\end{cases}$ 47. $f\left(x\right)=\begin{cases}x^3-3 & si\ x<1\\ -2x & si\ 1\le x\le 3\\ x+3 & si\ 3<x\end{cases}$

48. $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+4 & si\ x<-1\\ 3+x & si\ -1\le x\end{cases}$ 49. $f\left(x\right)=\begin{cases}2x+3 & si\ x>2\\ x^2+3 & si\ x<2\end{cases}$

50. $f\left(x\right)=\begin{cases}2x-1 & si\ x<0\\ \dfrac{1}{x-1} & si\ 0\le x<1\\ 2x+1 & si\ 1\le x\end{cases}$ 51. $f\left(x\right)=\begin{cases}2x & si\ x<-2\\ \dfrac{x+1}{x-1} & si\ -2\le x<2\ y\,x\ne 1\\ -3x+1 & si\ 2\le x\end{cases}$

52. Determine un valor de *c* para el cual la función

$$f(x)=\begin{cases}cx^2-3 & si\ x\le 2\\ cx+2 & si\ x>2\end{cases}$$

sea continua en todo **R**.

53. Determine los valores de *c* para los que la función

$$f(x)=\begin{cases}2cx+1 & si\ x\le 1\\ c^2x-2 & si\ x<1\end{cases}$$

sea continua en todo **R**.