LA INTEGRAL DEFINIDA.

El origen del cálculo integral se remonta a la época de **Arquímedes** (287-212 a.C.), matemático griego de la antigüedad, que obtuvo resultados tan importantes como el valor del área encerrada por un segmento parabólico. La derivada apareció veinte siglos después para resolver otros problemas que en principio no tenían nada en común con el cálculo integral. El descubrimiento más importante del cálculo infinitesimal (creado por **Barrow, Newton y Leibniz**) es la íntima relación entre la derivada y la integral definida, a pesar de haber seguido caminos diferentes durante veinte siglos. Una vez conocida la conexión entre derivada e integral (**teorema de Barrow**), el cálculo de integrales definidas se hace tan sencillo como el de las derivadas.

Además, el cálculo integral se usa para estudiar magnitudes variables en aquellos casos en los que utilizaríamos un producto si las magnitudes permanecieran constantes. Así, el área de una región de base b, y altura constante h, viene dada por el producto $A = b \cdot h$. Si la altura varía dependiendo del punto de la base sobre el que se encuentre, no podremos aplicar el mismo argumento para encontrar el área.

1. La estimación de un área.

La idea que vamos a tener en cuenta en este capítulo para llegar al concepto de integral definida, es la misma que en esencia utilizó **Arquímedes**:

> *"dada una región del plano, su área puede calcularse por medio de regiones poligonales inscritas o circunscritas a la misma, tales que al aumentar el número de lados, el área de estos polígonos tiende a aproximarse al área de la pedida"*

La idea de integral definida es una generalización práctica y sutil de este proceso. El método arquimediano de aproximación ha adquirido nuevamente importancia, ya que el cálculo de las integrales definidas puede hacerse con los ordenadores actuales con tanta precisión como deseemos. Esto es útil cuando el cálculo de una primitiva resulta imposible o muy difícil, y para la mayoría de las aplicaciones científicas es más que suficiente.

Ejemplo 1: Usando cinco rectángulos de amplitud *2/5*, tratar de encontrar dos aproximaciones al área de la región situada entre la gráfica de $f(x) = -x^2 + 5$ y el eje x entre $x = 0$ y $x = 2$.

Solución: Podemos hallar la altura de los cinco rectángulos "inferiores", mediante la evaluación de la función en los puntos terminales derechos de cada uno de los intervalos siguientes:

$$\left[0\,,\frac{2}{5}\right],\left[\frac{2}{5}\,,\frac{4}{5}\right],\left[\frac{4}{5}\,,\frac{6}{5}\right],\left[\frac{6}{5}\,,\frac{8}{5}\right],\left[\frac{8}{5}\,,\frac{10}{5}\right]$$

Puesto que el ancho de cada rectángulo es 2/5, la suma de las áreas de los cinco rectángulos es

$$\sum_{i=1}^{5} f\left(\frac{2i}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right) = \sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i}{5}\right)^2+5\right]\cdot\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{162}{25} = 6{,}48$$

Y dado que cada uno de estos cinco rectángulos está dentro de la región dada, concluimos que el área de la región es *mayor que* 6,48.

Para calcular la suma de las áreas de los cinco rectángulos "superiores" usamos el mismo procedimiento básico, excepto que evaluamos la función en los puntos iniciales izquierdos de los intervalos, obteniendo:

$$\sum_{i=1}^{5} f\left(\frac{2i-2}{5}\right)\cdot\left(\frac{2}{5}\right) = \sum_{i=1}^{5}\left[-\left(\frac{2i-2}{5}\right)^2+5\right]\cdot\left(\frac{2}{5}\right) = \frac{202}{25} = 8{,}08$$

Observamos que el área de la región dada es *menor que* 8,08. Por tanto, combinando los dos resultados obtenemos que:

$$6{,}48 < \text{área de la región} < 8{,}08$$

Además, aumentando el número de rectángulos usados en este procedimiento, podemos obtener aproximaciones cada vez más cercanas para el área de la región. Por ejemplo, usando 25 rectángulos de anchura 2/25 cada uno de ellos, podemos concluir que:

$$7{,}17 < \text{área de la región} < 7{,}49$$

Ahora, vamos a formalizar y generalizar este procedimiento.

Comenzaremos estudiando el área limitada por la gráfica de una función positiva f, y el eje OX, sobre un cierto intervalo $[a,b]$.

Sea f una función continua cuyo dominio contenga al intervalo $[a,b]$, y supongamos que $f(x)\geq 0 \quad \forall x\in[a,b]$. La continuidad de f asegura que la región A entre la gráfica, el eje OX y las rectas $x=a \quad y \quad x=b$, al menos intuitivamente, está perfectamente determinada.

Conocemos fórmulas para calcular el área de triángulos, rectángulos, trapecios y algunas otras regiones planas, pero la región A no tiene por qué tener ninguna de estas formas. Ya que sabemos calcular el área de rectángulos, podríamos aproximar el área A usando rectángulos con la base en el eje OX. La suma de las áreas de estos rectángulos dará una aproximación del área A. Los rectángulos que usaremos para dicha aproximación pueden ser determinados dando las longitudes de sus bases y alturas correspondientes. Las bases de los rectángulos dividen $[a,b]$ en subintervalos, por lo que consideraremos la siguiente definición:

Definición: Una *partición* de $[a,b]$ en n subintervalos, es un subconjunto ordenado y finito de $n+1$ números reales

$$P=\{x_0\,,\, x_1, x_2\,,\, ..., x_n\}$$

tales que

$$a=x_0< \ x_1< \ x_2 \ < \ .... < \ x_n=b$$

La partición P determina en el intervalo $[a,b]$, los subintervalos

$$[x_0\,,x_1],[x_1\,,x_2],[x_2\,,x_3],.....,[x_{n-1}\,,x_n]$$

Una partición que tiene $n+1$ puntos, determina n subintervalos o segmentos.

La longitud de la base del i-ésimo intervalo $[x_{i-1}\,,\,x_i]$, se representará por Δx_i, es decir, tenemos que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Análogamente, la altura de cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ estará determinada por el valor que tome la función f en un punto x_i^* , es decir, $f(x_i^*)$.

Por lo tanto, se deduce que el área del i-ésimo rectángulo valdrá: $f(x_i^*)\cdot\Delta x_i$.

Se deduce de lo anterior, que una aproximación del área A, será:

$$R_P = f(x_1^*)\cdot\Delta x_1 + f(x_2^*)\cdot\Delta x_2 + ... + f(x_n^*)\cdot\Delta x_n$$

(se representa por R_P en honor de B. Riemann).

Definición: La expresión

$$\boxed{R_P = f(x_1^*)\cdot\Delta x_1 + f(x_2^*)\cdot\Delta x_2 + ... + f(x_n^*)\cdot\Delta x_n}$$

se llama *suma de Riemann* de orden n para la función f sobre el intervalo $[a,b]$.

Además, en el cálculo práctico con máquinas u ordenadores, las particiones se eligen de modo que los intervalos o segmentos que determinan, sean de la misma longitud. Esta elección no quita generalidad a la definición de integral definida y resulta cómodo para un desarrollo elemental de la misma.

Definición: Decimos que una partición P de orden n de $[a,b]$, es una *partición regular* si todos los subintervalos tienen la misma longitud.

Como la longitud de $[a,b]$ es $b-a$, para una partición P regular de orden n de $[a,b]$ tendremos que

$$\Delta x_i = \frac{b-a}{n} \qquad i = 1,....,n$$

y, así, la suma de Riemann de una partición regular, sería:

$$\boxed{R_P = \frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)}$$

Definición: Para una partición P del intervalo $[a,b]$, en n subintervalos, llamamos *norma* de la partición P, y lo representamos por $\|P\|$, al máximo de los Δx_i, es decir:

$$\boxed{\|P\| = \max_{1\le i\le n} \Delta x_i}$$

Intuitivamente, parece lógico que si $\|P\|$ de una partición es suficientemente pequeña, entonces R_P estará muy próxima a A, es decir:

$$\boxed{A \approx R_P = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\cdot\Delta x_i}$$

2. La integral definida.

Definición: Sea f una función positiva y continua en $[a,b]$. Se define el *área* limitada entre el eje OX, la gráfica de la función y las rectas $x=a$ y $x=b$ como la integral $\int_a^b f(x)\,dx$.

Teorema: Sea f una función continua en $[a,b]$, $\{P_n\}$ una sucesión de particiones cuya norma tiende a cero, y R_{P_n} cualquier suma de Riemann de f. Entonces:

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} R_{P_n} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx} \qquad \blacksquare$$

Observaciones:

a) Dada una función f continua en $[0,1]$, si consideramos una partición regular del intervalo $[0,1]$, entonces:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\cdot\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

Evidentemente, no todas las integrales se van a poder calcular por métodos geométricos.

El siguiente teorema nos facilitará muchas veces el cálculo de integrales.

Teorema: Sean f y g dos funciones continuas sobre $[a,b]$, entonces se verifica:

a) $\int_a^b \big(f(x)\pm g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$

b) $\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx \qquad \forall k\in\mathbb{R}$

c) Si $f\geq 0$ en $[a,b]$ $\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

d) Si $f(x)\leq g(x)\ \ \forall x\in[a,b] \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

e) $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \qquad \forall c\in[a,b]$

f) $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

g) $\int_a^a f(x)\,dx = 0 \qquad \blacksquare$

A veces, es posible calcular el valor exacto de una integral definida mediante el límite de sumas de Riemann convenientemente elegidas. Para ello es útil conocer las siguientes fórmulas:

Teorema (Fórmulas de suma):

a) $\sum_{i=1}^{n} c = c \cdot n$

b) $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$

c) $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

d) $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

3. El teorema fundamental del cálculo.

Ya hemos entrado en las dos partes más importantes del cálculo: el cálculo diferencial que fue introducido al estudiar el problema de la tangente, y el cálculo integral, que ha sido introducido con el problema del área. En principio, no parece que estén relacionados, sin embargo existe una estrecha relación entre ambos, que fue descubierta independientemente por Newton y Leibniz, denominada teorema fundamental del cálculo.

Aproximadamente, el teorema nos dice que la derivación y la integración (definida) son operaciones inversas, en forma parecida a como lo son la multiplicación y la división.

Tras definir el concepto de integral y haber estudiado sus propiedades, es natural plantearse si podemos definir alguna función usando la integral (recuérdese que tras definir el concepto de derivada de una función f en un punto, inmediatamente definimos la función derivada cuando f era derivable en todo su dominio).

Una posibilidad sería la siguiente:

Definición: Sea f una función continua en $[a,b]$, llamaremos <u>*función integral*</u> a:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad para\ \ a \le x \le b$$

Obsérvese que si $f \ge 0 \Rightarrow F(x)$ es el área de la gráfica de f sobre $[a,x]$. Además al ser f continua entonces F tiene sentido en todo $[a,b]$. ¿Qué propiedades tiene la función F ?. ¿Es continua?. ¿Es derivable?. El siguiente teorema responde a estas preguntas.

Teorema (Teorema fundamental del Cálculo): Sea f una función continua en $[a,b]$, y sea $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad para\ \ a \le x \le b$. Entonces F es derivable, y $F'(x) = f(x)$, es decir:

$$\boxed{F'(x) = \frac{d}{dx}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right) = f(x)} \qquad \blacksquare$$

Corolario: Si f es una función continua sobre $[a,b]$, entonces f tiene una primitiva sobre dicho intervalo (la función integral definida). $\blacksquare$

Veamos ahora un resultado muy importante, ya que nos permite calcular directamente una integral definida, con sólo conocer una primitiva de la función:

Teorema (Regla de Barrow): Sea $F(x)$ una función tal que $F'(x) = f(x)$. Entonces:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)} \qquad \blacksquare$$

Observación: Lo interesante es que el teorema es cierto para cualquier primitiva de f, ya que si F y G son dos primitivas de f, entonces sabemos que $F(x) = G(x) + k$, siendo k una constante cualquiera, y por lo tanto, tenemos que:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = \big(G(b) - k\big) - \big(G(a) - k\big) = G(b) - G(a)$$

PROBLEMAS RESUELTOS.

Hallar en los Problemas 1-3 las integrales definidas estableciendo el valor S_n y calculando su límite cuando $n \to +\infty$.

1. $\displaystyle\int_a^b c\,dx = c(b-a)$**, siendo c una constante.**

Dividamos el intervalo $a \le x \le b$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = (b-a)/n$. Como el integrando es $f(x) = c$, resulta $f(x_k) = c$, cualquiera que sea el punto x_k del k-enésimo subintervalo y, por tanto,

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} c(\Delta x) = (c + c + \cdots + c)(\Delta x) = nc \cdot \Delta x = nc\frac{b-a}{n} = c(b-a)$$

Luego
$$\int_a^b c\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} c(b-a) = c(b-a)$$

2. $\displaystyle\int_0^5 x\,dx = 25/2.$

Dividamos el intervalo $0 \le x \le 5$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = 5/n$. Eligiendo los puntos x_k coincidiendo con el extremo derecho de cada subintervalo, es decir, $x_1 = \Delta x$, $x_2 = 2\,\Delta x$, ..., $x_n = n\,\Delta x$, tendremos

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k x = \sum_{k=1}^{n} (k \cdot \Delta x)\,\Delta x = (1 + 2 + \cdots + n)(\Delta x)^2 = \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{5}{n}\right)^2 = \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

$$\int_0^5 x\,dx = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{25}{2}$$

3. $\displaystyle\int_1^3 x^3\,dx = 20.$

Dividir el intervalo $1 \le x \le 3$ en n subintervalos de longitud $\Delta x = 2/n$

I. Tomemos los puntos x_k coincidiendo con el extremo izquierdo de cada subintervalo, como se indica en la Fig. 33-3, es decir, $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + \Delta x$, ..., $x_n = 1 + (n-1)\,\Delta x$. En estas condiciones,

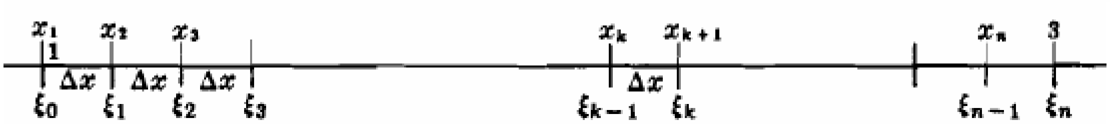


Fig. 33-3

$$
\begin{aligned}
S_n &= \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,\Delta_k n = x_1^3 \cdot \Delta x + x_2^3 \cdot \Delta x + \cdots + x_n^3 \cdot \Delta x \\
&= [1 + (1+\Delta x)^3 + (1 + 2\cdot \Delta x)^3 + \cdots + \{1 + (n-1)\,\Delta x\}^3]\,\Delta x \\
&= [n + 3\{1 + 2 + \cdots + (n-1)\}\,\Delta x + 3\{1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2\}\,(\Delta x)^2 \\
&\qquad + \{1^3 + 2^3 + \cdots + (n-1)^3\}\,(\Delta x)^3]\,\Delta x
\end{aligned}
$$

$$
= \left[n + 3\,\frac{(n-1)n}{1\cdot 2}\left(\frac{2}{n}\right) + 3\,\frac{(n-1)n(2n-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{2}{n}\right)^2 + \frac{(n-1)^2 n^2}{(1\cdot 2)^2}\left(\frac{2}{n}\right)^3\right]\frac{2}{n}
$$

$$
= 2 + \left(6 - \frac{6}{n}\right) + \left(8 - \frac{12}{n} + \frac{4}{n^2}\right) + \left(4 - \frac{8}{n} + \frac{4}{n^2}\right) = 20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2}
$$

$$
\int_1^3 x^3\,dx = \lim_{n \to +\infty}\left(20 - \frac{26}{n} + \frac{8}{n^2}\right) = 20
$$

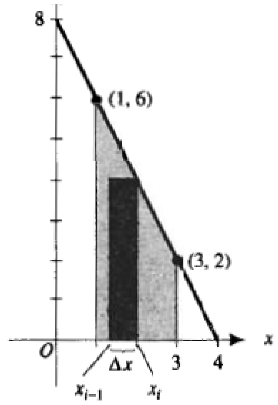


FIGURA 7

EJEMPLO 5 calcular el área de la región trapezoidal limitada por las rectas $x = 1$ y $x = 3$, el eje x y la recta $2x + y = 8$. Verifique la respuesta mediante la fórmula de geometría plana para el área de un trapecio.

Solución En la figura 7 se presentan la región y el i-ésimo rectángulo inscrito. Se divide el intervalo cerrado $[1, 3]$ en n subintervalos, cada uno de longitud Δx: $x_0 = 1$, $x_1 = 1 + \Delta x$, . . . , $x_i = 1 + i\Delta x$, . . . , $x_{n-1} = 1 + (n-1)\,\Delta x$, $x_n = 3$.

$$
\begin{aligned}
\Delta x &= \frac{3-1}{n} \\
&= \frac{2}{n}
\end{aligned}
$$

Al resolver la ecuación de la recta para y se obtiene $y = -2x + 8$. Por tanto, $f(x) = -2x + 8$, y como f es decreciente en $[1, 3]$, el valor mínimo absoluto de f en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ es $f(x_i)$. Debido a que $x_i = 1 + i\Delta x$ y $f(x) = -2x + 8$, entonces $f(x_i) = -2(1 + i\Delta x) + 8$, es decir, $f(x_i) = 6 - 2i\,\Delta x$. De (4),

$$
\begin{aligned}
A &= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\
&= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} (6 - 2i\;\Delta x)\,\Delta x
\end{aligned}
$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} [6\,\Delta x - 2i(\Delta x)^2]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{n} \left[6\left(\frac{2}{n}\right) - 2i\left(\frac{2}{n}\right)^2\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n} \sum_{i=1}^{n} 1 - \frac{8}{n^2} \sum_{i=1}^{n} i\right]$$

$$A = \lim_{n \to +\infty} \left[\frac{12}{n} \cdot n - \frac{8}{n^2} \cdot \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(8 - \frac{4}{n}\right)$$

$$= 8$$

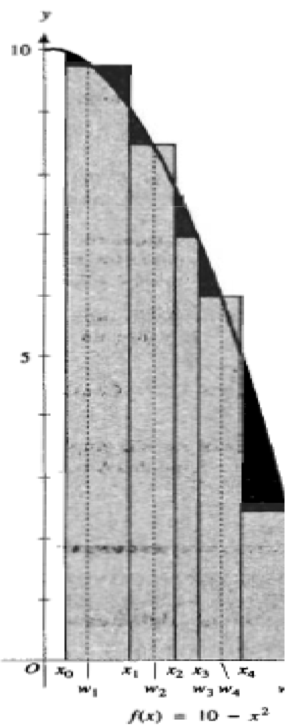


FIGURA 2

▷ **EJEMPLO ILUSTRATIVO 1** Suponga que $f(x) = 10 - x^2$, con $0.25 \leq x \leq 3$. Se calculará la suma de Riemann para la función f en $[0.25, 3]$ para la siguiente partición Δ: $x_0 = 0.25$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1.5$, $x_3 = 1.75$, $x_4 = 2.25$, $x_5 = 3$, y $w_1 = 0.5$, $w_2 = 1.25$, $w_3 = 1.75$, $w_4 = 2$, $w_5 = 2.75$.

La figura 2 muestra la gráfica de f en $[0.25, 3]$ y los cinco rectángulos, cuyas áreas son los términos de la suma de Riemann siguiente:

$$\sum_{i=1}^{5} f(w_i)\,\Delta_i x = f(w_1)\,\Delta_1 x + f(w_2)\,\Delta_2 x + f(w_3)\,\Delta_3 x + f(w_4)\,\Delta_4 x + f(w_5)\,\Delta_5 x$$

$$= f(0.5)(1 - 0.25) + f(1.25)(1.5 - 1) + f(1.75)(1.75 - 1.5) + f(2)(2.25 - 1$$

$$= (9.75)(0.75) + (8.4375)(0.5) + (6.9375)(0.25) + (6)(0.5) + (2.4375)(0.75)$$

$$= 18.09375$$

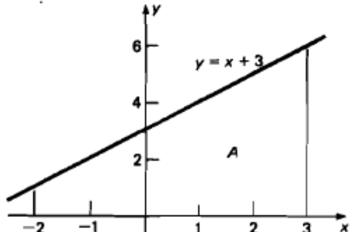
EJEMPLO 3 Evalúe $\int_{-2}^{3} (x + 3)\,dx$.

Solución Divida al intervalo $[-2, 3]$ en n intervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta x = 5/n$. En cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ tome $\bar{x}_i = x_i$ como punto muestra. Entonces,

$$
\begin{aligned}
x_0 &= -2 \\
x_1 &= -2 + \Delta x = -2 + \frac{5}{n} \\
x_2 &= -2 + 2\,\Delta x = -2 + 2\left(\frac{5}{n}\right) \\
&\ \vdots \\
x_i &= -2 + i\,\Delta x = -2 + i\left(\frac{5}{n}\right) \\
&\ \vdots \\
x_n &= -2 + n\,\Delta x = -2 + n\left(\frac{5}{n}\right) = 3
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, $f(x_i) = x_i + 3 = 1 + i(5/n)$ y entonces

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left[1 + i\left(\frac{5}{n}\right)\right]\frac{5}{n} \\
&= \frac{5}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 + \frac{25}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \frac{5}{n}(n) + \frac{25}{n^2}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] \\
&= 5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)
\end{aligned}
$$

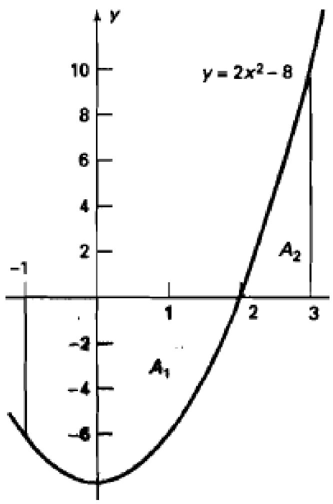


$\int_{-2}^{3} (x+3)\,dx = A = \frac{35}{2}$

FIGURA 8

$$
\begin{aligned}
\int_{-2}^{3} (x + 3)\,dx &= \lim_{|P| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \\
&= \lim_{n \to \infty}\left[5 + \frac{25}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \frac{35}{2}
\end{aligned}
$$

Podemos verificar fácilmente nuestra respuesta, ya que la integral requerida da el área del trapezoide de la figura 8 . La fórmula ya conocida del trapezoide $A = \frac{1}{2}(a + b)h$ da $\frac{1}{2}(1 + 6)^5 = \frac{35}{2}$. ■



Evalúe $\int_{-1}^{3} (2x^2 - 8)\, dx$.

Solución Aquí no hay fórmulas elementales que nos ayuden, si bien la integral corresponde a $-A_1 + A_2$. donde A_1 y A_2 son las áreas de las regiones que se encuentran arriba y abajo del eje de las x en la figura 9.

Sea P una partición regular de $[-1, 3]$ en n subintervalos iguales, cada uno de longitud $\Delta x = 4/n$. En cada subintervalo $[x_{1-1}, x_i]$ escoja una $\bar{x}_i$ que sea el punto frontera de la derecha, así que $\bar{x}_i = x_i$. Entonces,

$$x_i = -1 + i\,\Delta x = -1 + i\left(\frac{4}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} f(x_i) &= 2x_i^2 - 8 = 2\left[-1 + i\left(\frac{4}{n}\right)\right]^2 - 8 \\ &= -6 - \frac{16i}{n} + \frac{32i^2}{n^2} \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i &= \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\,\Delta x \\
&= \sum_{i=1}^{n}\left[-6-\frac{16}{n}\,i+\frac{32}{n^2}\,i^2\right]\frac{4}{n} \\
&= -\frac{24}{n}\sum_{i=1}^{n} 1-\frac{64}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i+\frac{128}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 \\
&= \frac{-24}{n}(n)-\frac{64}{n^2}\,\frac{n(n+1)}{2}+\frac{128}{n^3}\,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
&= -24-32\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{128}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{3}(2x^2-8)\,dx &= \lim_{|P|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i)\,\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[-24-32\left(1+\frac{1}{n}\right)+\frac{128}{6}\left(2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}\right)\right] \\
&= -24-32+\frac{128}{3}=\frac{-40}{3}
\end{aligned}$$

No es sorprendente que la respuesta sea negativa, puesto que la región abajo del eje de las x es mayor que la que está sobre el mismo eje (figura 8).

EJEMPLO 5 El límite de las aproximaciones finitas de un área

Encontrar el valor límite de las aproximaciones mediante sumas inferiores al área de la región R, que está debajo de la gráfica de $y = 1 - x^2$ y sobre el intervalo $[0, 1]$ en el eje x usando rectángulos del mismo ancho, donde el ancho tiende a cero y el número de rectángulos tiende a infinito. (Vea la figura 5.4a).

Solución Calculamos la aproximación mediante sumas inferiores, usando n rectángulos del mismo ancho, $\Delta x = (1 - 0)/n$, y después vemos qué pasa cuando $n \to \infty$. Empezamos por subdividir $[0, 1]$ en n subintervalos del mismo ancho

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \ldots, \left[\frac{n-1}{n}, n\right].$$

Cada subintervalo tiene un ancho $1/n$. La función $1 - x^2$ decrece en $[0, 1]$, y su valor mínimo en un subintervalo se alcanza en el extremo derecho del subintervalo. De manera que una suma inferior se construye con los rectángulos cuya altura en el subintervalo $[(k-1)/n, k/n]$ es $f(k/n) = 1 - (k/n)^2$, dando la suma

$$f\left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right).$$

Escribimos dicha suma en notación sigma y simplificamos,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(1 - \left(\frac{k}{n}\right)^2\right)\left(\frac{1}{n}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{n} - \frac{k^2}{n^3}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{n^3} && \text{Regla de la diferencia} \\
&= n\cdot\frac{1}{n} - \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 && \text{Reglas del valor constante y el múltiplo constante} \\
&= 1 - \left(\frac{1}{n^3}\right)\frac{(n)(n+1)(2n+1)}{6} && \text{Suma de los primeros } n \text{ cuadrados} \\
&= 1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}. && \text{Numerador desarrollado}
\end{aligned}$$

Hemos obtenido una expresión para la suma inferior que se cumple para cualquier n. Tomando el límite de esta expresión cuando $n \to \infty$, vemos que la suma inferior converge cuando el número de subintervalos crece y el ancho de los subintervalos tiende a cero:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6n^3}\right) = 1 - \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

La aproximación de las sumas inferiores converge a $2/3$.