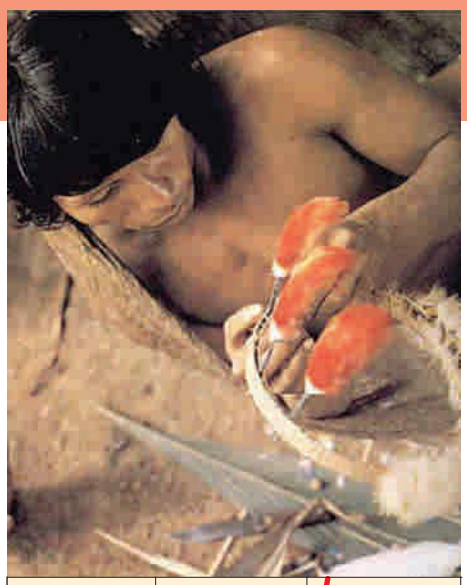
Funciones

Show acrobático,
Palo Negro, estado Aragua.

Además de las funciones lineales y cuadráticas existen otras funciones muy útiles cuando se trata de describir y comprender fenómenos del mundo real. Nos referimos a las funciones exponenciales, logarítmicas y potenciales que ahora conoceremos a través de su forma analítica y sus gráficas.

"Toda ciencia requiere matemática"
Robert Bacon.
Filósofo inglés (ca. 1220-1292)

Últimas **Noticias**
EMPRESAS POLAR



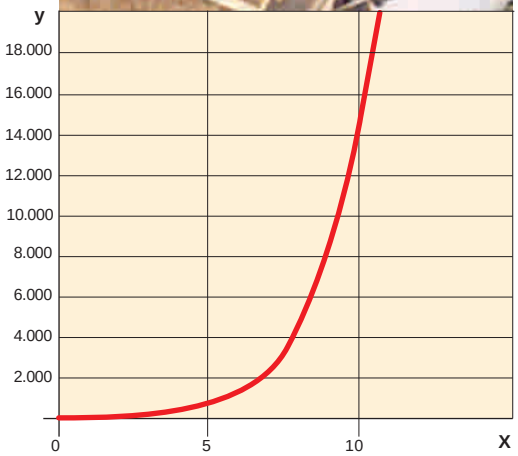
La función exponencial

La función $y = e^x$ en donde e es el famoso número cuyo valor aproximado es 2,718281828459045, se denomina **función exponencial natural**. Una forma más general de la función exponencial es:

$$y = f(x) = me^{kx}$$

en la que m y k pueden ser cualesquiera números reales. En el siguiente gráfico se presenta la forma de la función exponencial para $m=100$ y $k=0,5$:

$$y = 100e^{\frac{x}{2}}$$



x	y
0	100
2	271,8
4	546,0
5	1 218,2
6	2 000,6
8	5 459,8
10	14 841,3

La función exponencial es muy útil en la modelación de diversos fenómenos del mundo real. Por ejemplo, la encontramos cuando queremos datar una lengua cuya historia no está documentada, como ocurre con la mayoría de las lenguas que hablan nuestros indígenas; cuando deseamos estudiar el crecimiento malthusiano de una población biológica, cuando investigamos la desintegración de una sustancia radioactiva o cuando necesitamos establecer cual es el interés continuo que genera un capital determinado.

¿Cómo podemos medir la edad de una lengua particular?

Supongamos que deseamos establecer la ecuación que rige la desaparición de palabras de una lengua particular que en el momento t=0 contaba con N_0 palabras básicas. Estas palabras pueden ser sustantivos como hombre, mujer y casa; verbos como comer y caminar; adjetivos como bueno y grande y partes de palabras como prefijos y sufijos. En la lista básica no se incluyen las palabras técnicas que pueden formar parte de la lengua en estudio. Puesto que las lenguas evolucionan lentamente, el tiempo t se considerará en milenios. El supuesto fundamental que manejan los antropólogos del lenguaje es que la tasa instantánea de variación respecto al tiempo, esto es, la tasa a la que las palabras de la lista básica abandonan la lengua en el momento t, es directamente proporcional al número de palabras $N(t)$ de la lista en ese momento. Simbólicamente podríamos expresar este supuesto como:

Tasa de variación instantánea de $N(t)=-kN(t)$

en donde k es un factor de proporcionalidad (de signo positivo) que depende sólo de la lengua estudiada. El signo negativo en la expresión ocurre porque $N(t)$ decrece en el tiempo, claro está. Determinar N(t) a partir de esa expresión requiere de herramientas de matemáticas superiores. Se demuestra que N(t) está dada por la siguiente función exponencial:

$$N(t)=N_0e^{-kt} \; con \; N_0=N(0).$$

Los expertos en este tipo de estudios han logrado establecer que la proporción de palabras todavía en uso después de un milenio en la mayor parte de las lenguas conocidas usualmente está próximo al valor 0,805, esto es:

$$\frac{N(1)}{N(0)} = \frac{N_0e^{-k}}{N_0} = e^{-k} \approx 0,805$$

por lo tanto $-k \approx Ln(0,805) \approx -0,217$, $luego \; k \approx 0,217$.

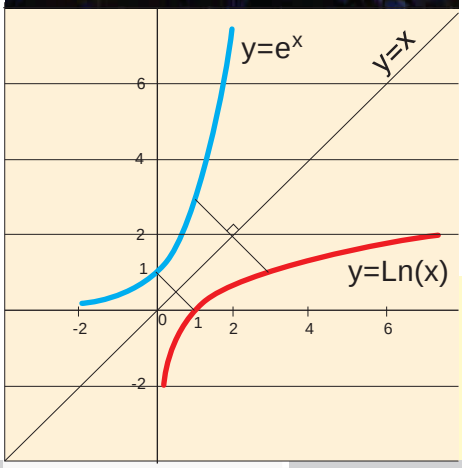
La función logarítmica

Otra función que está emparentada con la función exponencial y que tiene mucha utilidad es la función logarítmica denotada por $y=Ln(x)$ y se calcula de la siguiente manera: Ln(x) = α, si e^{α}= x.

Esta función $y = Ln(x)$ es la inversa de $y = e^x$.

Si reflejamos la gráfica de una función exponencial con relación a la bisectriz del primer cuadrante, encontramos la gráfica de la correspondiente función logarítmica.

En el dibujo presentamos el resultado de esta construcción para la función exponencial $y = e^x$.



La función logarítmica de base e correspondiente a la función exponencial natural $y = e^x$, se expresa como:

$$y = Ln(x) \text{ para todo } x > 0.$$

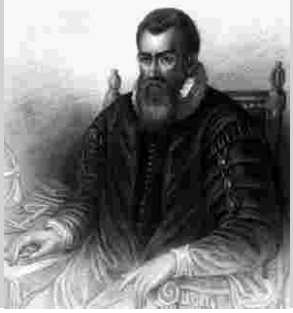
Interesante:

Ln(e^x) = x, para todo x; $e^{Ln(x)}$ = x para todo x > 0. Entonces y = e^x, y=Ln(x) son funciones inversas una de la otra

RETO

Completa los valores de $Ln(x)$ que faltan en la tabla siguiente:

x	1	e	10	100	1000
$Ln(x)$	0	1	2,3026		



¿SABÍAS QUE...?

Los logaritmos fueron una creación del matemático y teólogo escocés John Neper (1550-1617) y fueron ideados con el fin de simplificar cálculos aritméticos. Neper, quien fue un activo participante de la iglesia escocesa protestante durante la monarquía del rey Jacobo VI de Escocia, dedicaba su tiempo libre al estudio de las matemáticas. Además de los logaritmos se le atribuye un prototipo que antecedió lo que hoy conocemos como la regla de cálculo y algunas contribuciones importantes en trigonometría esférica.

Interesante:

El interés que devenga un capital puede obtenerse no sólo mediante la acumulación simple o la compuesta anual, sino también mediante acumulación compuesta instantánea. En este caso se habla de interés continuo y la forma de calcular el valor final VF de un capital inicial P se puede obtener considerando que $VF=P(1+r)^t$, en donde r es la tasa de interés que devenga el capital en un año y t es el número de años que se deposita el capital.

Como una capitalización instantánea requiere de un período de tiempo infinitesimalmente corto, la tasa aplicable en cada período deberá ser, a su vez, extremadamente pequeña y, en este caso, ocurre que el logaritmo natural de 1+r es aproximadamente igual a r y, por lo tanto, la fórmula para el cálculo del valor VF final del capital inicial P se transforma en:

$$VF=P(1+r)^t=Pe^{tLn(1+r)} \approx Pe^{tr}.$$

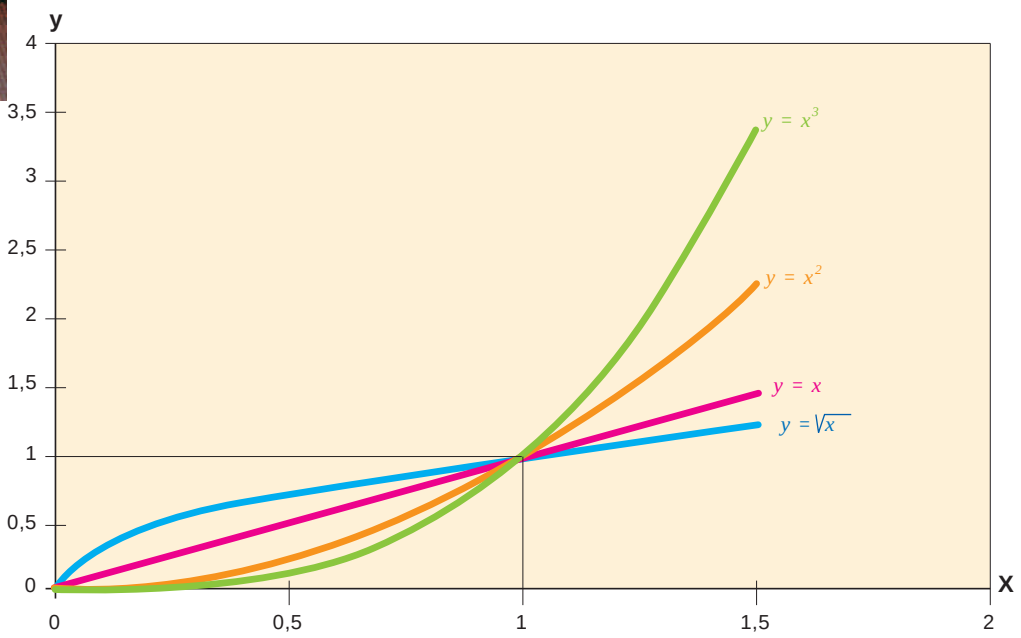
RETO: Calcula cuanto dinero producirá un bolívar al 5% en 50 años. ¿Y en cien años?

El mundo de las funciones

La función potencial

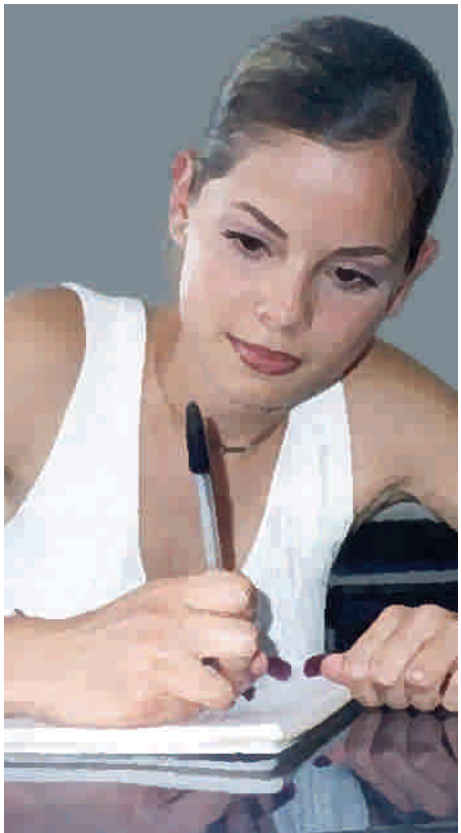
La función $y = x^r$ $(r \neq 0)$ se denomina función potencial de exponente r. Si r=1 la función potencial es una función lineal y si r=2 se obtiene una función cuadrática. El exponente r también puede ser un número entero negativo o un número racional o irracional. Cuando r es entero y positivo se trata de una función polinómica.

En el gráfico presentamos varios casos de funciones potenciales.



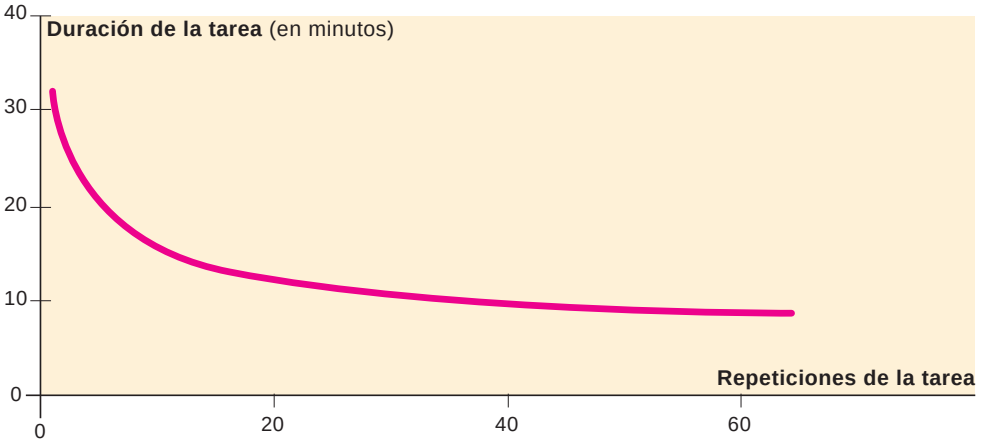
RETO:

Todos las gráficas se cortan en (1,1). ¿Qué deduces de las mismas para valores de x comprendidos entre 0 y 1? ¿Y cuando x>1?



INTERESANTE

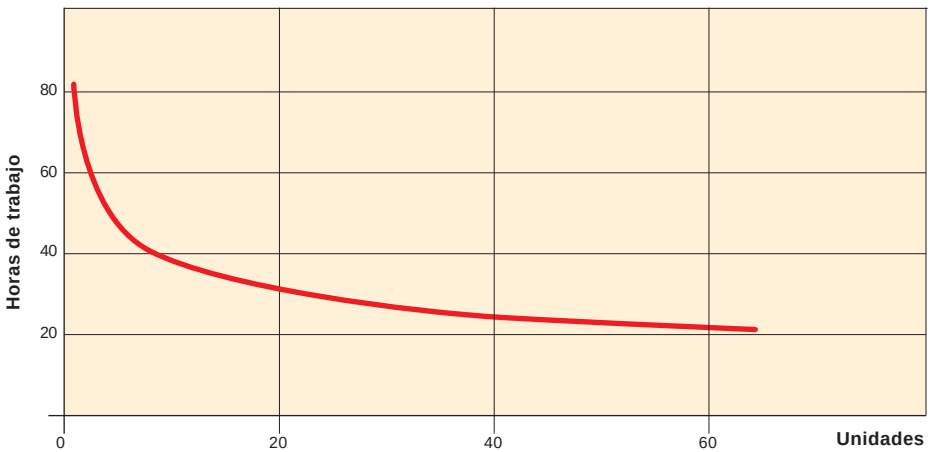
Seguramente has escuchado a tus profesores hablar de la curva del aprendizaje cuya forma general presentamos en el siguiente gráfico:



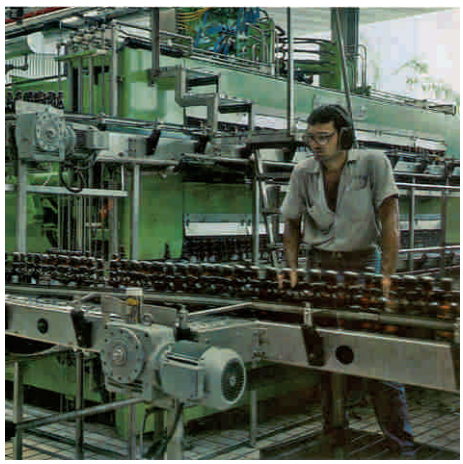
¿Qué dice esta gráfica? Pues que a medida que se repite más una tarea menor es el tiempo necesario para realizarla, es decir, que la práctica logra la perfección. Determina, empleando la gráfica dada, en cuánto tiempo disminuye la duración de la tarea cuando después de haberla realizado 10 veces la repites 10 veces más.

La función potencial en ayuda de la industria

En la industria manufacturera se utilizan las *curvas de aprendizaje* para estimar los costos de producción y los requerimientos de trabajo de los procesos de fabricación. Allí, estas curvas se conocen como *curvas de progreso de la fabricación*. Supongamos que un fabricante opera una línea de producción de un bien que requiere de 80 horas de trabajo para completar la primera unidad. La unidad 2 del bien requiere el 80% del tiempo empleado para la construcción de la primera unidad; la unidad 4 requiere el 80% del tiempo empleado en la segunda y así sucesivamente. En la tabla y gráfico siguiente se presentan los datos correspondientes a la fabricación de varios conjuntos de unidades para el proceso descrito anteriormente:



Horas de trabajo necesarias para elaborar unidades	
Unidad (Factor 2)	Horas (Factor 0,8)
1	80,0
2	64,0
4	51,2
8	41,0
16	32,8
32	26,2
64	21,0



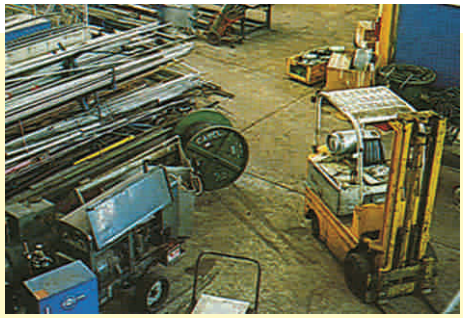
Si suponemos que x designa el número de unidades, que y designa el número de horas de trabajo necesarias para la producción de x unidades, que T denota el número de horas necesarias para producir la primera unidad y que la tasa de progreso de la fabricación (aprendizaje) es r, podemos representar y de acuerdo a la siguiente función potencial:

$$y = Tx^{\log_2(r)} \text{ para todo } x > 0$$

En el caso que estamos estudiando $r=80\%=0,8$; $T=80$, luego $\log_2(0,8) \approx -0,32$, de tal manera que la ecuación queda como:

$$y=80x^{-0,32}$$

Si quisiéramos saber cuánto tiempo llevaría fabricar la unidad número 35, bastaría entonces evaluar $y=f(35) \approx$ 25,64 horas.



RETOS

Encontrar la función de progreso de fabricación para un proceso de trabajo cuando $r=0,6$ y T=150 horas.

Asumiendo que la tasa de progreso de fabricación fue del 80%, ¿cuánto tardará la producción de un bien cuya primera unidad consumió 400 horas?

De las escalas aritméticas

Imagen en color verdadero, escala lineal, del cometa Hale-Bopp, tomada el 3 de febrero de 1997, con un lente 2,8/180 mm, filtro y CCD. El campo de visión es 3,8x2,5º N. El este está a la izquierda. © B. Dintinjana & H. Mikuz.

En ocasiones resulta ventajoso emplear escalas logarítmicas en lugar de escalas aritméticas para llevar a cabo representaciones geométricas, pero antes de proceder a su descripción observa las dos fotografías colocadas a los extremos de estas páginas que muestran dos visiones de un mismo fenómeno astronómico del cometa Hale-Bopp logradas con el empleo de una escala aritmética y una escala logarítmica respectivamente.

En las representaciones gráficas de las funciones obtenidas hasta ahora hemos empleando ejes graduados de acuerdo a escalas aritméticas, esto es, escalas en las que un conjunto de números definidos por una progresión aritmética de razón r>0:

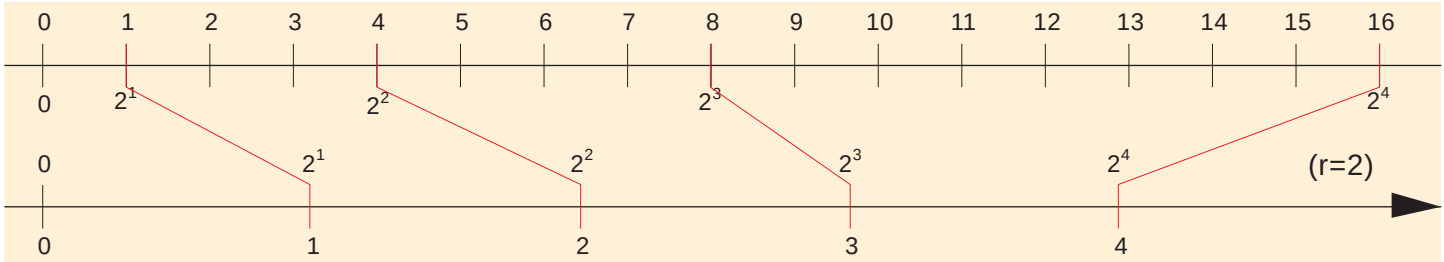
$$r,\ 2r,\ 3r,\ldots,\ nr,\ldots$$

determinan marcas igualmente espaciadas sobre el eje, como se aprecia en el siguiente gráfico:

Este tipo de escalas es muy útil cuando dibujamos funciones lineales o cuadráticas, pero no ocurre así cuando graficamos funciones exponenciales, logarítmicas y potenciales. La explicación es que en estos casos en el eje de las ordenadas se tienen que registrar valores de la función que van desde los muy pequeños hasta los extremadamente grandes. Cuando se quiere dibujar este tipo de funciones es preferible emplear escalas logarítmicas, esto es, escalas en las que un conjunto de números que varían en progresión geométrica de razón r:

$$r^1,\ r^2,\ r^3,\ldots,\ r^n,\ldots$$

determinan marcas igualmente espaciadas sobre el eje atendiendo a los exponentes, como se aprecia en el siguiente gráfico:



Los exponentes de r, r^2, r^3, r^4,..., r^n (r=2)

a las escalas logarítmicas

Para construir un eje con escala logarítmica de base 10, rotulamos el origen de la escala con cero y luego elegimos una longitud unidad con la que marcamos el eje sucesivamente a partir del cero. Estas marcas corresponden a las potencias sucesivas de la base 10 como se indica a continuación:

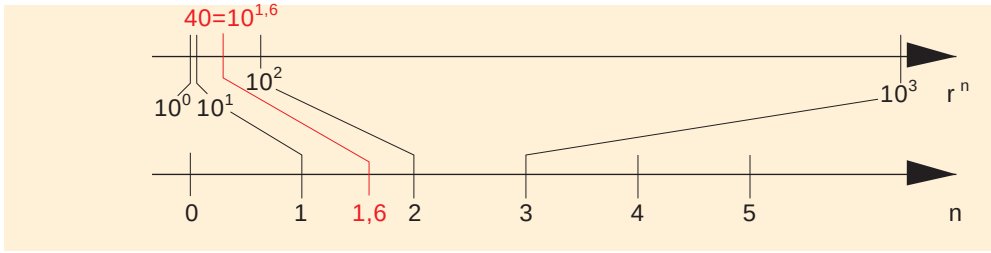


Imagen en color verdadero, escala logarítmica, del cometa Hale-Bopp, tomadas el 3 de febrero de 1997, con un lente 2,8/180 mm, filtro y CCD. El campo de visión es 3,8x2,5º N. El este está a la izquierda.
© B. Dintinjana & H. Mikuz.

Para ubicar un número en esta escala, por ejemplo el 40, tenemos que expresar el número como una potencia de 10, esto es, tenemos que encontrar el valor p tal que:

$$40=10^{p},$$

luego

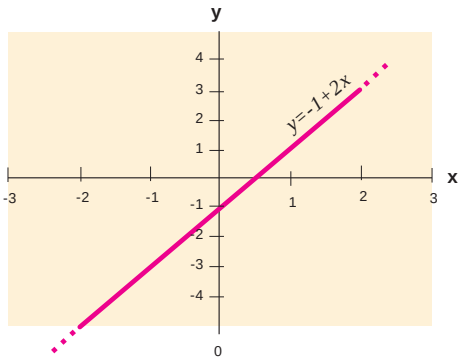
$$log_{10}(40)=p\ log_{10}(10)=p$$

y por tanto

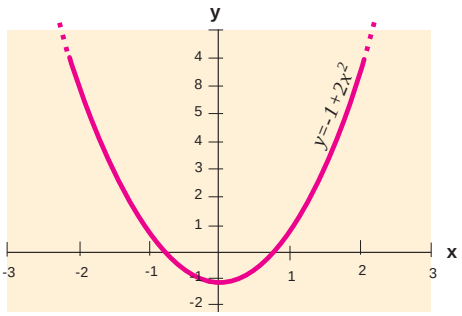
$$p \approx 1{,}6.$$

RETO: Construir una escala logarítmica con base 2

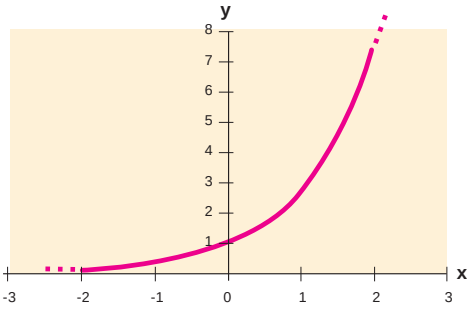
Gráficas de funciones básicas elementales



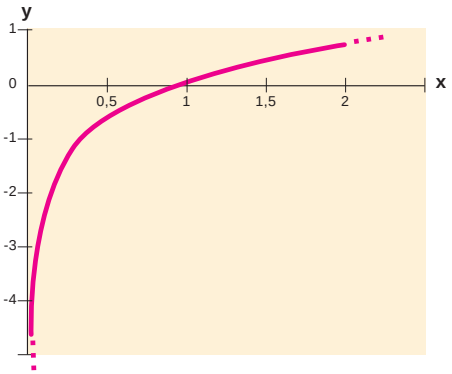
Función "lineal" (afín) $y=a+bx$



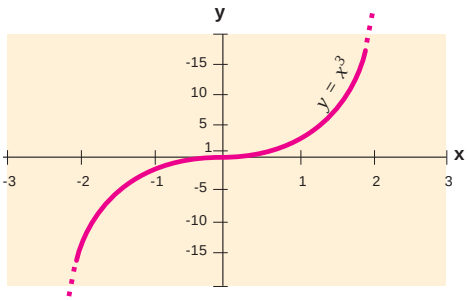
Función cuadrática $y=a+bx^2$



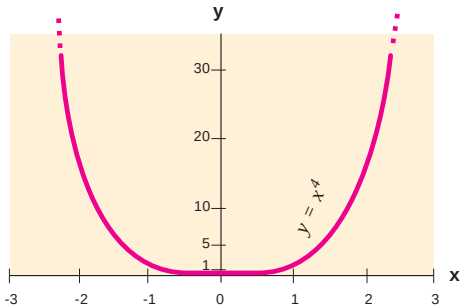
Función exponencial $y=e^x$



Función logarítmica $y = Ln(x)$



Función potencial $y=bx^3$



Función potencial $y=bx^4$

Población
Jason Macaya
artista norteamericano (1972-)

Un ejemplo de gráfico con escala logarítmica

Consideremos la evolución de la población mundial, por décadas, desde 1950 hasta 1990.

Utilizando un sistema de coordenadas con escala aritmética y distintas unidades en los dos ejes, se representan esos datos.

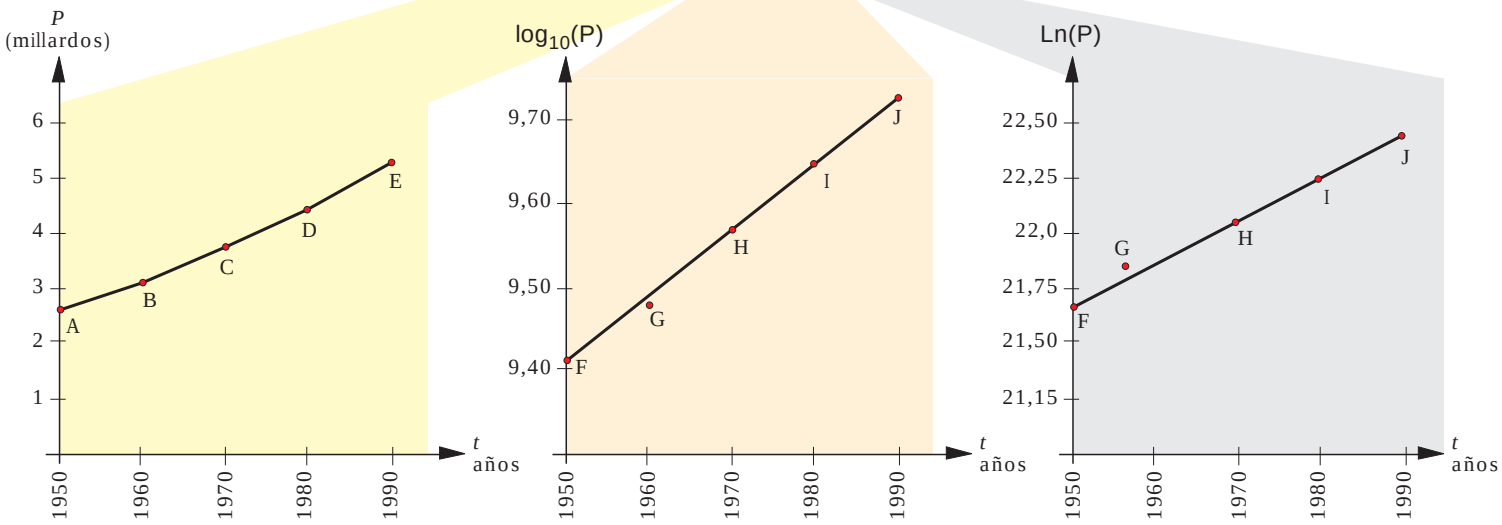
Ahora representemos los mismos datos utilizando sobre el eje de las ordenadas una escala logarítmica bien sea en base 10 o en base e.

Año	Población
1950	2 555 360 972
1960	3 039 669 330
1970	3 708 067 105
1980	4 454 389 159
1990	5 284 679 123

Fuente: U.S. Bureau of the Census, International Data Base.

Año	Población P	$\log_{10}(P)$	Ln(P)
1950	2 555 360 972	9,41	21,66
1960	3 039 669 330	9,48	21,84
1970	3 708 067 105	9,57	22,03
1980	4 454 389 159	9,65	22,22
1990	5 284 679 123	9,72	22,39

Los logaritmos han sido redondeados a 2 decimales



Colocamos el año 1950 en el origen. Unimos los puntos F, H, I, J con un segmento de recta. En cualquiera de los dos gráficos $\log_{10}(P)$ o con Ln(P) observamos que los puntos F, H, I y J están "situados en una recta" y el punto G es "próximo" a la misma, lo cual sugiere que en el primer gráfico los puntos están "aproximadamente" en una curva de tipo exponencial. Se dice que esta curva es un ajuste para la "nube de puntos" dada por los puntos A, B, C, D y E. La representación de puntos utilizando escalas logarítmicas es útil para determinar si esos puntos pueden situarse, "aproximadamente", sobre el gráfico de una función exponencial o una función potencial.

Las escalas logarítmicas son utilizadas en diversas áreas a los fines de representar datos que tienen una variación muy grande, un rango de variabilidad muy amplio. Por ejemplo, en técnicas de vacío la presión de gas varía desde 1 atm hasta un rango 10^{-13} - 10^{-15} atm (atm=atmósfera -unidad de presión-) y se hace prácticamente imposible representar tal rango de variabilidad en una escala lineal o aritmética. En cambio, si consideramos logaritmos decimales se tiene: $\log_{10}(1)=0$, $\log_{10}(10^{-15})= -15$ y ahora tenemos el intervalo cerrado $-15 \leq p \leq 0$ donde p indica la presión, que es fácilmente representable en una escala lineal.

Si utilizamos un eje de coordenadas en escala logarítmica y en el otro eje una escala aritmética se dice que estamos en presencia de un papel semilogarítmico (logarítmico simple). Si en ambos ejes utilizamos escalas logarítmicas, se trata de un papel logarítmico (logarítmico doble). Estos papeles se consiguen comercialmente de la misma forma que los cuadriculados y milimetrados y se usan para trabajos con dibujo a mano alzada. El uso de computadoras ha reemplazado gran parte de estos papeles.