



Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y
Naturales
Departamento de Matemáticas.

Funciones

Notas para el curso de Cálculo Diferencial e Integral
Químico Biólogo

Dr. José Luis Díaz Gómez

FUNCIONES

1. FUNCIONES Y SUS GRAFICAS.....	3
1.1. Representación de una Función.....	5
1.2. La Notación Funcional.	6
2. GRAFICA DE FUNCIONES.....	13
2.1. Translaciones Horizontales.....	14
2.2. Contracciones y Expansiones Verticales.	15
2.3. Contracciones y Expansiones Horizontales.....	16
3. OPERACIONES CON FUNCIONES.....	17
3.1 Álgebra de funciones.	18
3.2. Composición de funciones	19
3.3. Inversa de una función.....	21
3.3. Relación gráfica de una función y su inversa.	23
4. FUNCIONES COMO MODELO MATEMÁTICO	24
4.1 Resumen:	28

FUNCIONES

1. FUNCIONES Y SUS GRAFICAS.

Una de las grandes inquietudes de los seres humanos a través de la historia ha sido la de describir los fenómenos naturales, sus cambios y las relaciones entre unos y otros. Desde hace tiempo, el hombre ha estudiado ciertos fenómenos naturales y ha expresado este conocimiento a través de fórmulas que interrelacionan las magnitudes que caracterizan a dichos fenómenos; por ejemplo:

Ejemplo 1.1. Para una cierta dosis de x centímetros cúbicos de una droga la presión sanguínea resultante P está dada por:

$$B = 0.5x^2 - 0.3x^3$$

Ejemplo 1.2. El interés sobre una inversión de \$4000.00 a razón de 40% anual está dado por:

$$I = 0.40 (4000) t$$

donde t es el número de años.

Ejemplo 1.3. La ley de Boyle establece que para un gas ideal a temperatura constante, si el volumen es de v unidades, la presión P es igual a:

$$P = k/v$$

siendo k un número fijo.

Ejemplo 1.4. Cuando se producen x toneladas de una cierta mercadería, el producto recibe un beneficio de \$ B pesos por mes, siendo:

$$B = 1500 + 15x^2 - x^3$$

Este tipo de relaciones motivaron el origen del concepto de función.

En cada uno de los ejemplos anteriores se encuentra una variable que depende de otra; así vemos que:

en el ejemplo 1), la presión sanguínea P depende de la dosis de x

en el ejemplo 2), el interés depende del número de años t

en el ejemplo 3), la presión P del gas depende de las unidades del volumen v

en el ejemplo 4), el beneficio B depende de las x toneladas producidas.

En otros términos:

La presión sanguínea P está en función de x

El interés I está en función de t

La presión P del gas está en función de v

El beneficio B está en función de x .

Por esta razón es común llamar a x , t , v , x variables independientes y a P , I , P , B variables dependientes respectivamente.

Consideremos el ejemplo 1.2.

El interés sobre una inversión de \$4000.00 a razón de 40% anual está dado por:

$$I = 0.40 (4000) t$$

donde t es el número de años.

Calculemos el interés para distintos valores de t .

Para	$t = \frac{1}{2}$ año	$I = 0.40$	$(40\ 000) (\frac{1}{2}) = 800$
	$t = 1$ año	$I = 0.40$	$(40\ 000) (1) = 1600$
	$t = 1.5$ año	$I = 0.40$	$(40\ 000) (1.5) = 2400$

Siguiendo el procedimiento anterior, obtenemos la siguiente tabla:

Años t	0	$\frac{1}{2}$	1	1.5	2	3	4
Interés I	0	800	1600	2400	3200	4800	6400

en la cual se observa que a cada valor de la variable independiente t le corresponde un único valor de la variable dependiente I . Este tipo de correspondencia es el que caracteriza a una función. Obsérvese además que tanto la variable independiente t como la variable dependiente I toma sólo valores mayores que cero, puesto que en este problema no tiene sentido hablar de tiempos e intereses con valores negativos.

El conjunto de valores posibles que puede tomar la variable independiente se llama dominio de la función y los valores correspondientes de la variable dependiente forman el conjunto de imágenes de la función o rango de la función.

Ahora daremos la definición de función:

Definición 1.1.

Una función f de un conjunto X a un conjunto Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x de X un único elemento y de Y . El elemento y se llama la imagen de x bajo f y se denota por $f(x)$. El conjunto X se llama el dominio de la función y el conjunto Y contradominio. El rango de la función consta de todas las imágenes de los elementos de X .

Ejemplo 1.5.

Objetivo: Ilustrar el concepto de función.

Ejemplo A. Representemos por y la distancia en metros que una piedra recorre al caer desde un edificio en x minutos.

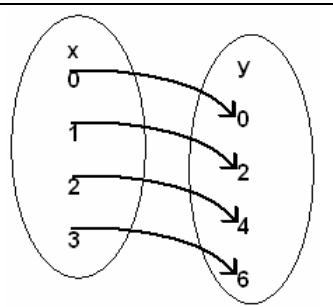
x (tiempo)	0	1	2	3
y (distancia)	0	2	4	6

Ejemplo B. Sea $C = \{(1,2), (1,-2), (3,6)\}$

Ejemplo C. Sea $D = \{(1,3), (2,3), (-1,3), (-2,3)\}$

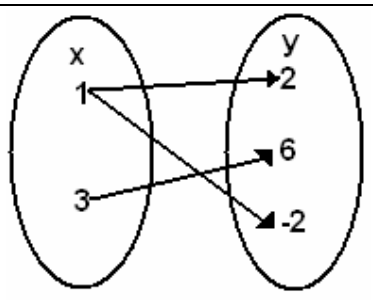
Verificar si en cada ejemplo se cumple la definición de función

Solución: (A) Puesto que a cada x (tiempo) le corresponde un único valor y (distancia), la correspondencia del ejemplo A es una función. Esta correspondencia puede expresarse usando parejas ordenadas de la siguiente manera: $(0,0)$, $(1,2)$, $(2,4)$, $(3,6)$ donde cada primer elemento de la pareja representa el tiempo y cada segundo elemento una distancia, y puede representarse gráficamente utilizando



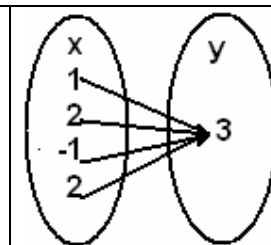
(B) El conjunto C no representa una función. Nótese que el conjunto C contiene las parejas ordenadas (1,2) y (1,-2); esto significa que al número 1 se le asocian dos números distintos 2 y -2. Por lo cual C no cumple con la definición de función.

La representación gráfica del conjunto C usando diagramas es la siguiente



(C) El conjunto D representa una función. La representación gráfica del conjunto

$D = \{(1,3), (2,3), (-1,3), (-2,3)\}$ es:



1.1. Representación de una Función

Una función puede representarse de cuatro formas.

i) Por medio de una tabla

Ejemplo:

x (número de unidades)	y (costo de operación)
0	\$ 50
1	\$ 70
2	\$ 90
3	\$110
4	\$130

Esta tabla es equivalente a:

(0, 50), (1, 70), (2, 90), (3, 110), (4, 130)

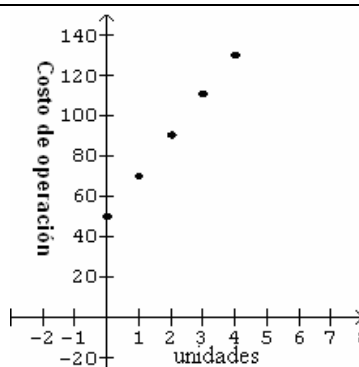
ii) Por medio de una regla.

Ejemplo. Para obtener los costos de operación en el ejemplo anterior multiplique el número de unidades por \$ 20 y sume al resultado \$ 50.

iii) Por medio de una ecuación.

Ejemplo. Los costos de operación del ejemplo anterior están dados por la ecuación $y = 20x + 50$, donde el número de unidades es $x = 0, 1, 2, 3, 4$, y los costos de operación están representados por la variable y .

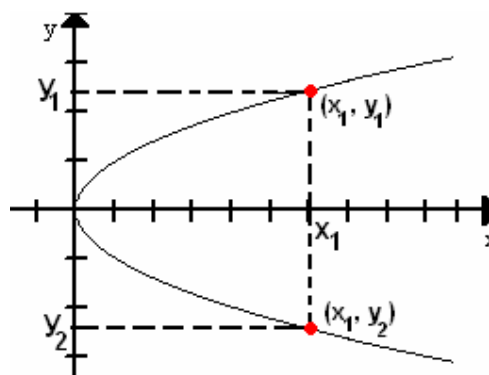
iv) Por medio de una grafica



Cuidado. No todas las tablas, reglas, gráficas y ecuaciones representan una función.

Un ejemplo de una gráfica que no representa una función es la siguiente:

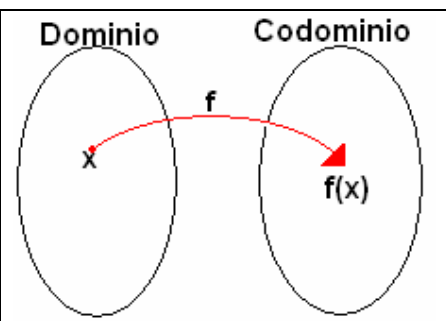
Esta gráfica no representa una función, puesto que a el valor de x_1 se le asocian dos valores distintos de y : y_1, y, y_2 .



En general, si al trazar una recta paralela al eje y sobre una curva, la recta corta a la curva en más de un punto, entonces la curva no representa una función.

1.2. La Notación Funcional.

Con frecuencia es necesario representar las funciones por medio de símbolo de tal modo que cuando ésta es nombrada sabemos a que función nos referimos. El símbolo más usual para representar una función es la letra f , y el símbolo $f(x)$ se usa para representar el elemento asociado a x que se lee “ f de x ”; algunas veces se dice que $f(x)$ es el valor de f en x . Gráficamente,



No deben confundirse los símbolos f y $f(x)$; f representa la función no está ni en el dominio x ni en el rango y . Sin embargo $f(x)$ es un elemento de y .

Ejemplo 1.6. Objetivo. Mostrar el uso de la notación funcional:

Sea f la función definida por $f(x) = 3x - 1$. ¿Qué significa $f(1)$?

Solución.

$f(1)$ significa usar la función f para encontrar la imagen de $x = 1$ bajo la función f .

en $f(x) = 3x - 1$ reemplazar x por 1

$$f(1) = 3(1) - 1$$

$$f(1) = 3 - 1$$

$$f(1) = 2$$

También " $f(1) = 2$ " es una manera breve y precisa de decir "el valor de la función cuando $x = 1$ es 2".

Nótese en lo anterior que el símbolo " $f(x)$ " únicamente reemplaza al símbolo " y " en la ecuación $y = 3x - 1$.

Ejemplo 1.7.

Objetivo. Utilizar la notación f para determinar ciertos valores funcionales:

Dada la función f definida por $f(x) = x^2 + 1$. Encontrar $f(0)$, $f(-2)$, $f(\sqrt{2})$, $f(x_1 + \Delta x)$. Δx es una variable que representa un cambio en la variable x .

Solución

$$f(x) = x^2 + 1$$

$$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$$

$$f(-2) = (-2)^2 + 1 = 5$$

$$f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2})^2 + 1 = 3$$

$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2 + 1 = x_1^2 + \Delta x + \Delta x^2 + 1$$

Las funciones de mayor interés para nosotros son aquellas cuyo dominio es un conjunto de números. En este texto, se utilizarán funciones reales de variable real, es decir el dominio de la función será el conjunto de los números reales o un subconjunto de él, y el contradominio de f serán $\mathbb{R}$ o un subconjunto de él.

Si el dominio no se especifica, tomamos como dominio el conjunto más grande de números reales para el que la función esté definida.

Ejemplo 1.8

Objetivo: mostrar el método para determinar el dominio de una función cuando x es la variable independiente.

Hallar el dominio de cada función

(A)	$f(x) = \frac{3}{4-x}$,	(B)	$g(x) = \frac{2x+1}{x^2-x-6}$,	(C)	$h(x) = \sqrt{16-x}$
-----	--------------------------	-----	---------------------------------	-----	----------------------

Solución.

(A) Como no se puede dividir por cero, ningún denominador puede igualarse a cero. Por lo tanto, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excluido el número 4.

$$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq 4\} \text{ o bien } D_f = \mathbb{R} - \{4\}$$

(B) El denominador se factoriza: $x^2 - x - 6 = (x-3)(x+2)$. Este denominador es cero si $x = 3$ o -2 ; por lo tanto, el dominio es el conjunto de todos los reales, excluidos el 3 y el -2 . Es decir $D_g = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \neq -2, 3\}$

- (C) La raíz cuadrada de un número negativo, no es un número real. Dado que $16 - x$ es negativo para todo $x > 16$, el dominio de $h(x) = \sqrt{16 - x}$ es $x \leq 16$ o bien $(-\infty, 16]$.

Definición 1.2

La gráfica de una función f es el conjunto de todas las parejas $(x, f(x))$ en un plano coordenado tales que x es un elemento en el dominio de f .

Las gráficas son muy útiles para describir el comportamiento de $f(x)$ cuando x varía. También se puede describir la gráfica de f como el conjunto de puntos $P(x, y)$ tales que $y = f(x)$. Por lo tanto la gráfica de f coincide con la gráfica de la ecuación $y = f(x)$ y si $P(x, y)$ está sobre la gráfica de f , entonces la ordenada y es el valor de f en x . Es importante notar que, como a cada valor de x en el dominio de la función le corresponde un único valor de y , ninguna recta vertical puede interceptar la gráfica de la función en más de un punto.

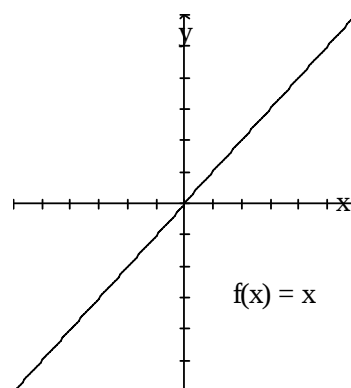
Los siguientes ejemplos tienen como objetivo el mostrar la gráfica de algunas funciones elementales.

Ejemplo 1.9. Dibuje la gráfica de f suponiendo que $f(x) = x$.

Solución.

En la tabla siguiente aparecen las coordenadas $(x, f(x))$ de algunos puntos sobre la gráfica.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-3	-2	-1	0	1	2	3



Al trazar estos puntos, encontramos que la gráfica tiene la forma mostrada en la figura.

Ejemplo 1.10

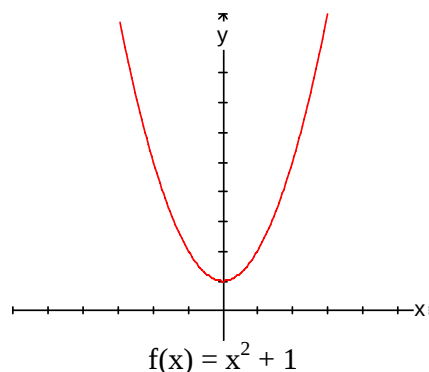
Dada la función f con dominio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$ para toda x en $\mathbb{R}$. Dibuje la gráfica de f .

Solución.

La gráfica de f consta de todos los puntos de la forma $(x, x^2 + 1)$. En la tabla siguiente aparecen las coordenadas $(x, f(x))$ de algunos puntos

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	10	5	2	1	2	5	10

Trazando estos puntos llegamos a la figura mostrada



Ejemplo 1.11

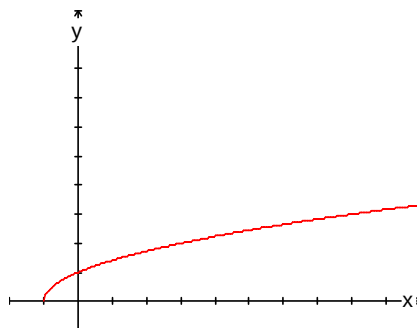
Dibuje la gráfica de f suponiendo que $f(x) = \sqrt{x+1}$

Solución.

Los valores de x tales que $x + 1 < 0$ no pertenecen al dominio de f ya que en este caso $f(x)$ no es un número real. En consecuencia no hay puntos de la forma (x, y) con $x < -1$ en la gráfica de f . En la tabla siguiente se muestran algunos puntos $(x, f(x))$ sobre la gráfica:

x	-1	0	3	8
$f(x)$	0	1	2	3

Al trazar estos puntos se obtiene la figura mostrada.

**Ejemplo 1.12**

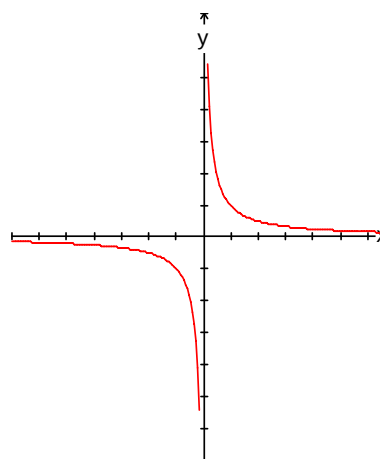
Dibuje la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x}$

Solución

Como no se puede dividir por cero, entonces el dominio de f es el conjunto de todos los números reales diferentes de 0. Si $x > 0$ entonces $f(x) > 0$ por tanto una parte de la gráfica se encuentra en el primer cuadrante. Si $x < 0$ entonces $f(x)$ es negativo por lo tanto otra parte de la gráfica se encuentra en el III cuadrante. Si x toma valores muy cerca de cero, entonces $f(x) = 1/x$ toma valores muy grandes en valor absoluto si x toma valores muy grandes en valor absoluto entonces $f(x) = 1/x$ adquiere valores cercanos a cero.

Utilizando las observaciones anteriores y trazando los puntos $(x, f(x))$ de la siguiente tabla obtenemos la figura mostrada.

x	-6	-3	-1	-1/3	1	3	6
$f(x)$	-.16	-.3	-1	-3	1	.3	.16



$$f(x) = \frac{1}{x}$$

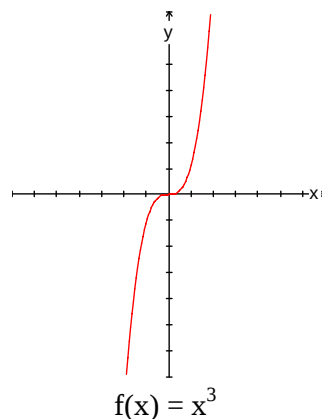
Ejemplo 1.1.3

Dibuje la gráfica de $f(x) = x^3$

Solución:

La gráfica de f es el conjunto de todos los puntos de la forma (x, x^3) . Trazando los puntos de la tabla obtenemos la gráfica mostrada

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	-8	-1	0	1	8



$$f(x) = x^3$$

Ejemplo 1.14

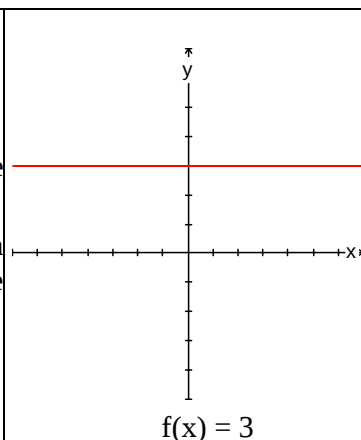
Dibuje la gráfica de $f(x) = 3$.

Solución.

Si $f(x) = 3$ entonces la gráfica de f es el conjunto de parejas $(x, 3)$ y representan una línea horizontal.

El dominio de f es todo $\mathbb{R}$ y el rango $\{3\}$. La tabla siguiente muestra algunos puntos sobre la gráfica de f .

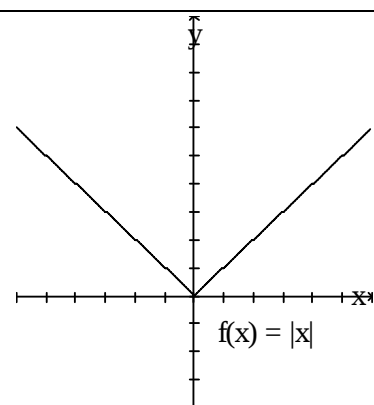
x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	3	3	3	3	3	3

**Ejemplo 1.15**

Dibuje la gráfica de $f(x) = |x|$.

Solución.

Si $x \geq 0$ entonces $f(x) = x$ por lo tanto la parte de la gráfica a la derecha del eje coincide con la gráfica de $y = x$. Si $x < 0$ entonces $f(x) = -x$ y por lo tanto la parte de la gráfica a la izquierda del eje coincide con la gráfica de $y = -x$. la gráfica es la figura mostrada.

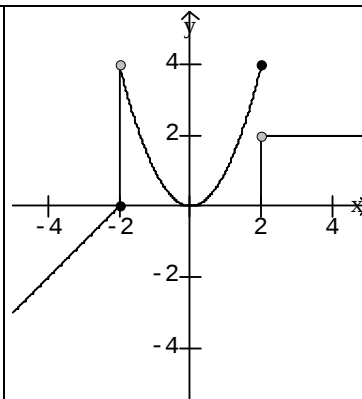
**Ejemplo 1.16**

Dibuje la gráfica de la función definida de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } x \leq -2 \\ x^2 & \text{si } -2 < x \leq 2 \\ 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solución.

Si $x \leq -2$ entonces $f(x) = x + 2$. Esto significa que para $x \leq -2$ la gráfica de f coincide con la gráfica de la recta $y = x + 2$. Si $-2 < x \leq 2$ entonces $f(x) = x^2$, por tanto esta parte de la gráfica coincide con la gráfica de la parábola $x = y^2$. Si $x > 2$ entonces la gráfica de f es una semirrecta horizontal separada por una distancia de 2 unidades del eje x . La gráfica es la figura mostrada.



Se dice que dos funciones f y g de X a Y son iguales y se escribe $f = g$, siempre y cuando $f(x) = g(x)$ para toda x en Y .

Por ejemplo sean:

$$f(x)=x, g_1(x)=\sqrt{x^2}, x \geq 0$$

$$f_1(x)=x, g_1(x)=\sqrt{x^2}, x \text{ real}$$

Puesto que $\sqrt{}$ representa solamente la raíz cuadrada no negativa, entonces $f = g$ pero $f_1 \neq g_1$ Haciendo

$$f_2(x) = |x|, x \text{ real}$$

se deduce que $f_2 = g_1$

En la tabla del ejemplo 1.3 se ve que la función envía dos elementos distintos del dominio a un mismo elemento del contradominio, $f(-1) = 2$, $f(1) = 2$. Es decir, dos elementos distintos del dominio tienen la misma imagen. Si las imágenes fueran siempre diferentes, entonces a la función se le llama uno a uno.

Definición 1.3

Una función de X en Y es una función uno a uno si siempre que $x_1 \neq x_2$ en X entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ en Y .

Si f es uno a uno entonces cada $f(x)$ en el rango es la imagen de exactamente un x en X . Si todo elemento del contradominio Y es imagen de algún elemento del dominio X y f es uno, a uno, se dice que hay una correspondencia uno a uno entre X y Y . Un ejemplo de la correspondencia uno a uno. Un ejemplo de la correspondencia uno a uno es la asociación de los números reales con los puntos de una recta coordenada.

Ejemplo 1.17.

Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$ con x real. Demuestre que f es uno a uno.

Solución:

Si $x_1 \neq x_2$ en $\mathbb{R}$, debemos probar que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Es decir, probar que $\sqrt{x_1+1} \neq \sqrt{x_2+1}$. Puesto que $x_1 \neq x_2$, se tiene que $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$. De ahí $\sqrt{x_1+1} \neq \sqrt{x_2+1}$. Por lo tanto $f(x_1) \neq f(x_2)$.

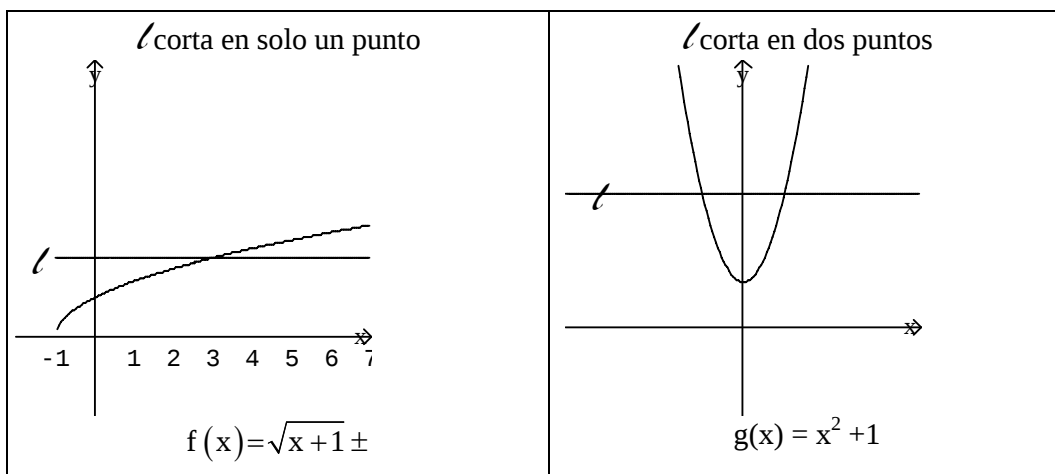
Ejemplo 1.18.

Sea $g(x) = x^2 + 1$, con x real. Demuestre que g no es uno a uno.

Solución:

La función f no es uno a uno ya que existen números diferentes en el dominio que tienen la misma imagen. Por ejemplo, aunque $-2 \neq 2$, se tiene que $g(-2) = 5 = g(2)$.

Si observamos las gráficas de las funciones de los ejemplos anteriores vemos que en el ejemplo vemos que en el ejemplo (1.6) donde la función es uno a uno, cualquier recta horizontal corta a la gráfica de la función en un solo punto. En cambio en la gráfica de la función $g(x) = x^2 + 1$, cualquier recta horizontal, arriba del eje de las c , corta a la gráfica en dos puntos.

**Definición 1.4**

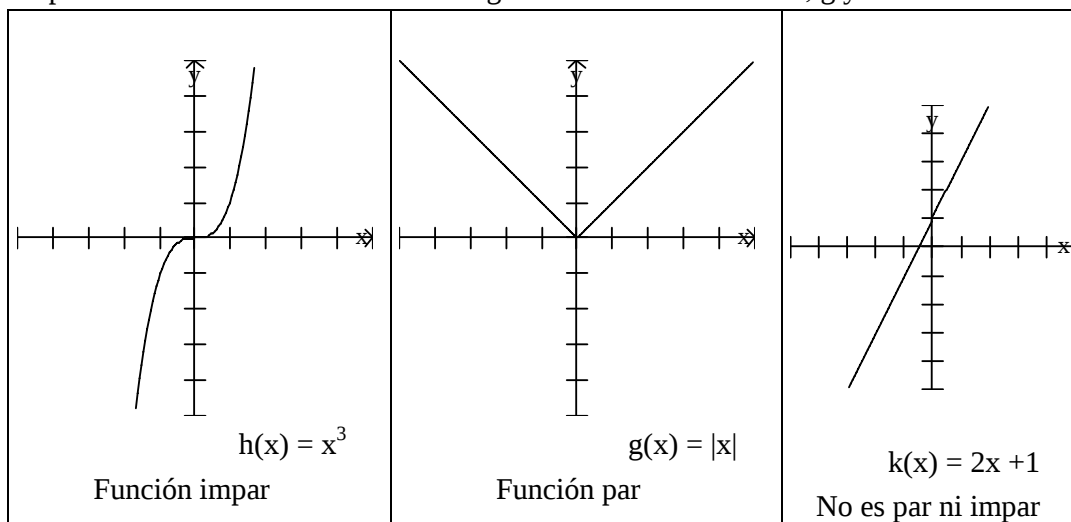
Una función f con dominio A se llama: i) **par**, si $f(-a) = f(a)$ para todo número en X ,
 ii) **impar**, si $f(-a) = -f(a)$ para toda a en X .

Ejemplo 1.19.

Determine si i) $h(x) = x^3$, ii) $g(x) = |x|$ y iii) $k(x) = 2x + 1$ son funciones pares, impares o ninguna de las dos.

Solución.

- i) Sea $a \in \mathbb{R}$, $h(-a) = (-a)^3 = -a^3 = -h(a)$. Puesto que $h(-a) = -h(a)$ entonces h es impar. Obsérvese que la gráfica de h es simétrica respecto al origen.
- ii) Sea $a \in \mathbb{R}$, $g(-a) = |-a| = |a| = g(a)$. Por lo tanto g es par. Nótese que la gráfica de g es simétrica con respecto al eje y .
- iii) Sea $a \in \mathbb{R}$, $k(-a) + 1 = -2a + 1 \neq 2a + 1 = k(a)$ y $-k(a) \neq k(-a)$, f no es par ni impar. A continuación se muestran las gráficas de las funciones h , g y k .



2. GRAFICA DE FUNCIONES

En vista de que el comportamiento de una función puede, en general, apreciarse muy bien en su gráfica, vamos a describir algunas técnicas con ayuda de las cuales podremos hacer un trazo rápido de las curvas pero sin recurrir (todavía) a los métodos del cálculo.

Con frecuencia la gráfica de dos funciones tienen la misma forma y orientación, la única diferencia entre ellas es que una de las dos es un desplazamiento paralelo de la otra. Cualquier desplazamiento paralelo de una gráfica a otra se llama una transformación. En esta sección discutiremos la forma en que tales transformaciones ocurren. Iniciamos con las traslaciones verticales:

Sea f una función y c un número real, la suma de $f + c$ es la función definida por $f(x) + c$. La gráfica de $f + c$ es la gráfica de f trasladada $|c|$ unidades – hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.

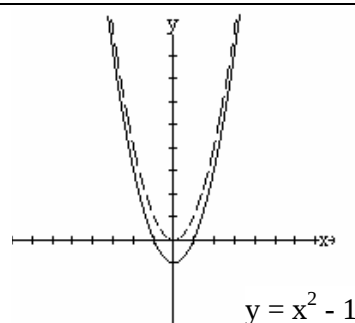
Los siguientes ejemplos tienen como propósito el ilustrar las traslaciones verticales de una función.

Ejemplo 2.1

Dibuje la gráfica de $f(x) = x^2 - 1$

Solución.

La gráfica de $f(x) = x^2 - 1$ tiene la misma forma de la gráfica $f(x) = x^2$ (línea punteada) sólo que ésta gráfica fue trasladada 1 unidad hacia abajo.

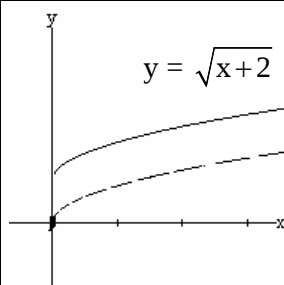


Ejemplo 2.2

Dibuje la gráfica de $f(x) = \sqrt{x} + 2$

Solución.

La gráfica de $f(x) = \sqrt{x} + 2$ es la gráfica de $f(x) = \sqrt{x}$ trasladada 2 unidades hacia arriba.

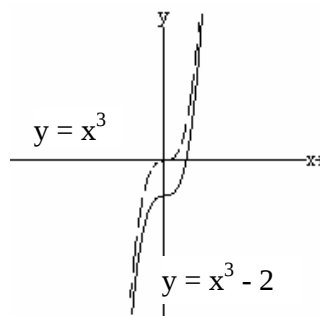


Ejemplo 2.3

Dibuje la gráfica de $f(x) = x^3 - 2$.

Solución.

La gráfica de $f(x) = x^3 - 2$ es la gráfica de $f(x) = x^3$ trasladada $|-2|$ unidades hacia abajo.

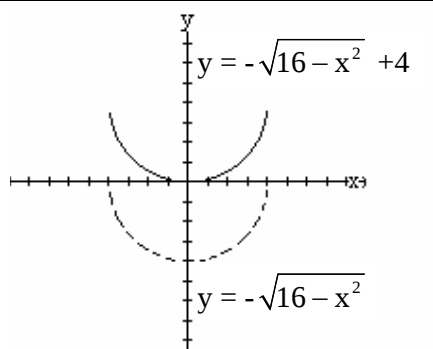


Ejemplo 2.4

Dibuje la gráfica de $f(x) = -\sqrt{16 - x^2} + 4$

Solución.

La gráfica de $f(x) = -\sqrt{16 - x^2} + 4$ es la gráfica de $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$ trasladada 4 unidades hacia arriba. La gráfica de $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$ es una semicircunferencia de centro (0,0) y radio 4.

**2.1. Translaciones Horizontales.**

Si en una función $f(x)$ la variable x se sustituye por $x - c$, el efecto sobre la gráfica de $f(x)$ es trasladar la curva una distancia c paralelamente al eje x , y en la dirección positiva, porque si (m, n) son las coordenadas de un punto sobre la gráfica de $y = f(x)$, entonces el punto $(m + c, n)$, que resulta de trasladar (m, n) una distancia c en la dirección de las x positivas, caerá sobre la gráfica de $y = f(x - c)$.

Traslación horizontal

Sea f una función y c un número real, entonces la función fc definida por $f(x-c)$ representa una translación horizontal. La gráfica de fc es la gráfica de f trasladada $|c|$ unidades a la derecha si $c > 0$ y a la izquierda si $c < 0$

Los siguientes ejemplos tienen como objetivo el ilustrar el principio anteriormente establecido.

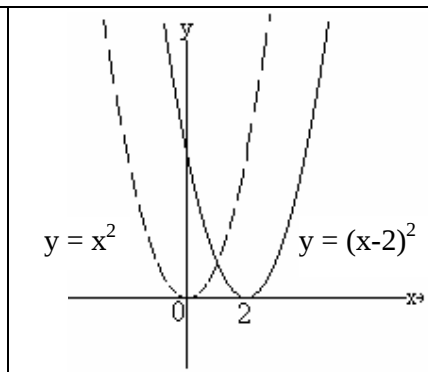
Ejemplo 2.5

Dibuje la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2$

Solución.

De acuerdo con el principio recién establecido, puede obtenerse la gráfica de $f(x) = (x-2)^2$ trasladando $f(x) = x^2$ una distancia de $|2|$ unidades hacia la derecha.

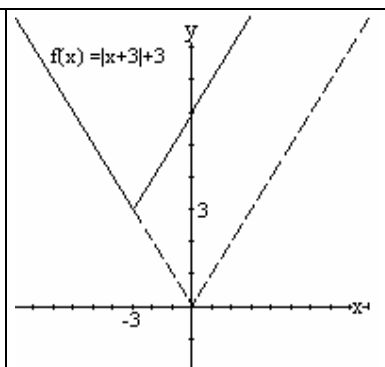
Esta translación se logra reemplazando $x - 2$ por x en $f(x) = x^2$.

**Ejemplo 2.6**

Sea $f(x) = |x|$. Encuentre la función cuya gráfica se obtiene efectuando las siguientes transformaciones a la gráfica de f : una translación horizontal de 3 unidades hacia la izquierda y una translación vertical hacia arriba de 3 unidades.

Solución:

Para trasladar f horizontalmente 3 unidades hacia la izquierda reemplazamos en $f(x) = |x|$ x por $x + 3$ y obtenemos $f(x) = |x + 3|$. Para efectuar la traslación vertical 3 unidades hacia arriba sumamos 3 a la última ecuación. Por lo tanto la función pedida es $f(x) = |x + 3| + 3$ y su gráfica es la figura mostrada.

**2.2. Contracciones y Expansiones Verticales.**

Una contracción vertical de una curva, en una razón dada, significa que cada punto de la curva se mueve en la dirección de las y hacia el eje x en esa razón; si la razón es 1:2, cada punto se mueve hacia el eje x hasta un nuevo punto situado a $1/2$ de la distancia anterior, mientras que una razón de 1:1/2 significa una expansión en que cada punto se mueve en la dirección del eje y hasta un punto situado a una distancia 2 veces mayor.

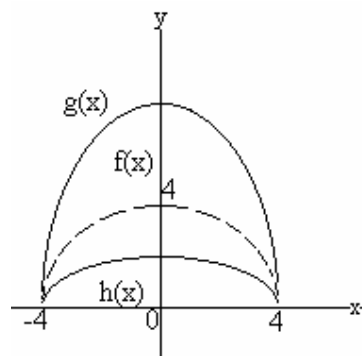
Sea f una función y c un número real, entonces la gráfica de la función cf definida por $cf(x)$ es:

- i) Una expansión vertical si $|c| > 1$
- ii) Una contracción vertical si $|c| < 1$
- iii) Si c es negativo, además de la contracción o expansión se obtiene una reflexión sobre el eje x .

Los siguientes ejemplos tienen como objetivo el ilustrar la definición anterior.

Ejemplo 2.7

a) La gráfica de $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ es una semicircunferencia de centro $(0,0)$ y radio 4. Si multiplicamos f por 2 se obtiene la función $g(x) = 2\sqrt{16 - x^2}$ cuya gráfica es una expansión vertical de $f(x)$.

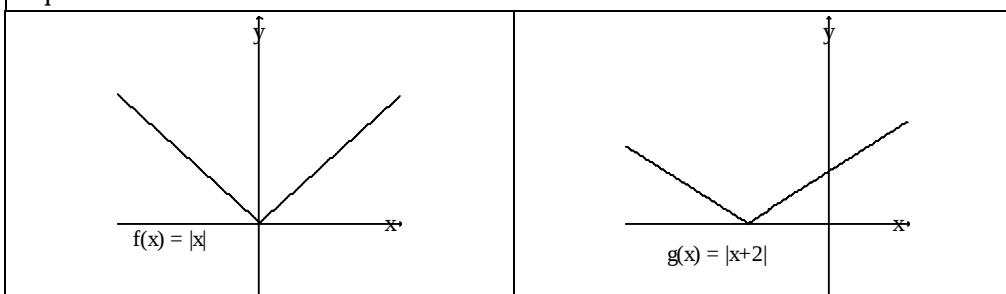


b) Si multiplicamos f por $\frac{1}{2}$ se obtiene la función $h(x) = \frac{1}{2}\sqrt{16 - x^2}$ cuya gráfica es una contracción vertical de $f(x)$. Las gráficas de f , g y h se muestran en el mismo sistema de coordenadas.

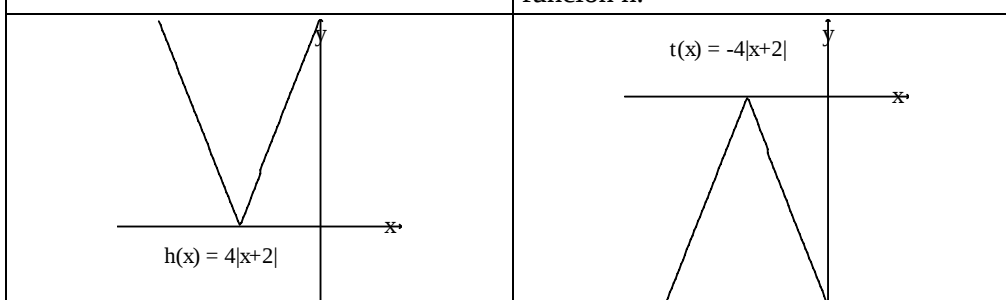
Ejemplo 2.8.

Sea f la función definida por $f(x) = |x|$

a) La gráfica de $g(x) = |x + 2|$ es una translación horizontal de 2 unidades hacia la izquierda de f .



b) La gráfica de $h(x) = 4|x + 2|$ es una expansión vertical de g .

**2.3. Contracciones y Expansiones Horizontales**

Si en una función $f(x)$ sustituimos x por cx , con $c > 1$, el efecto es contraer la gráfica de la función en la dirección de las x , esto es hacia el eje y , en la razón $1:c$. Por que si (m, n) hacia el eje y en la razón $1:c$, quedará en la gráfica de la ecuación $y = f(cx)$. El número c usado aquí puede ser menor que, igual a, o mayor que 1. Si $c < 1$ la razón $1:c$ es mayor que 1, y la contracción, por supuesto, resulta una expansión.

Sea f una función y c un número real, entonces la gráfica de la función definida por $f(cx)$ es:

1. Una contracción horizontal si $|c| > 1$
2. Una expansión horizontal si $|c| < 1$
3. Si c es negativo, además de la contracción o expansión se obtiene una reflexión sobre el eje y .

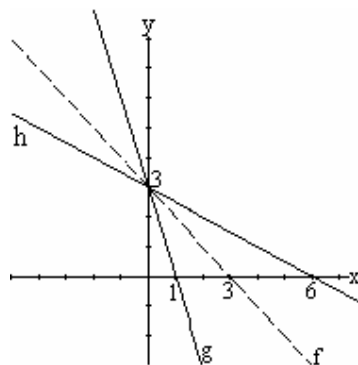
Ejemplo 2.9.

Sea f la función definida por $f(x) = 3 - x$. La gráfica de f es una línea recta que corta los ejes en los puntos $(0,3)$ y $(3,0)$

a). Si sustituimos x por $3x$ en la función f obtenemos la función $g(x) = 3 - 3x$, cuya gráfica es una contracción horizontal de la función $f(x) = 3 - x$. Obsérvense que cada punto (m, n) de la gráfica de f

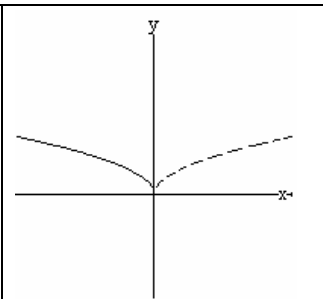
se transforma en un punto de la forma $(m/c, n)$ de g ; por ejemplo el punto $(3,0)$ de f se convierte en el punto $(1,0)$ de g .

- b) Si en $f(x) = 3-x$ reemplazamos x por $\frac{1}{2}x$ se obtiene la función $h(x) = 3-x/2$, cuya gráfica es una expansión horizontal de la función $f(x) = 3-x$.



Ejemplo 2.10

Si $g(x) = \sqrt{x}$, entonces la gráfica de $g(-x) = \sqrt{-x}$ es la gráfica de g reflejada sobre el eje y .



Ejemplo 2.11

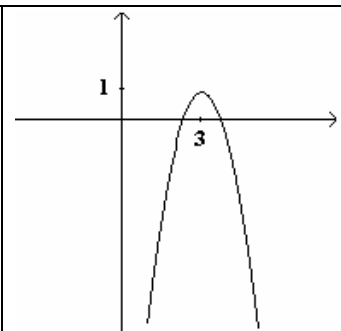
Grafique la función $h(x) = -2x^2 + 12x - 17$

Solución:

Completando el “Trinomio cuadrado”, $f(x)$ se transforma en $h(x) = -2(x-3)^2 + 1$.

Obsérvese que la gráfica de f es la misma que la de la función $g(x) = x^2$ bajo las siguientes transformaciones.

- i) Una translación horizontal de 3 unidades hacia la derecha de $g(x) = x^2$; esto es $g_1(x) = (x-3)^2$



- ii) Una expansión vertical de 2 unidades de $g_1(x) = (x-3)^2$; es decir $g_2(x) = 3(x-3)^2$

- iii) Una reflexión sobre el eje x de $g_2(x) = 3(x-3)^2$; o sea $g_3(x) = -3(x-3)^2$

- iv) Una translación vertical de 1 unidad hacia arriba de $f(x) = -3(x-3)^2$; finalmente $h(x) = -3(x-3)^2 + 1$.

3. OPERACIONES CON FUNCIONES.

Las operaciones de suma, resta, multiplicación y división entre funciones son posibles y semejantes a las correspondientes efectuadas con los números. En esta sección definiremos la composición de funciones y la función inversa de una función; estos dos conceptos –composición e inversión de funciones– son importantes en el desarrollo del cálculo. Reconocer una suma, producto, cociente o composición de funciones es útil porque permite descomponer funciones complicadas en otras más sencillas.

3.1 Álgebra de funciones.

En esta sección consideraremos las operaciones con funciones. Las funciones obtenidas a partir de estas operaciones –llamadas la suma, la diferencia, el producto y la división se definen como sigue:

Definición 3.1.

Sean f y g dos funciones y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g , respectivamente. La función $f + g$ está definida por

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

El dominio de $f + g$ es $D_f \cap D_g$

Ejemplo 3.1.

Sea $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$. Entonces $(f + g)(x) = x + \sqrt{x}$. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el dominio de g es $[0, \infty)$. Así el dominio de $f + g$ es $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty) \cap [0, \infty) = [0, \infty)$.

Ejemplo 3.2.

Sea $f(x) = x^3 - 1$ y $g(x) = 4x$. Si $x = 3$, entonces $f(3) = (3)^3 - 1 = 26$ y $g(3) = 4(3) = 12$. Así, $(f + g)(3) = f(3) + g(3) = 26 + 12 = 38$.

Definición 3.2.

Sean f y g dos funciones y supongamos que D_f y D_g denotan los dominios de f y g , respectivamente. La función $f - g$ está definida por

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

El dominio de $f - g$ es $D_f \cap D_g$

Ejemplo 3.3.

Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$ y $g(x) = \sqrt{x-4}$, entonces $(f - g)(x) = f(x) - g(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-4}$. El dominio de f es $[-1, \infty)$, y el dominio de g es $[4, \infty)$. El dominio de $f - g$ es $D_f \cap D_g = [-1, \infty) \cap [4, \infty) = [4, \infty)$.

Definición 3.3.

Sean f y g dos funciones y D_f y D_g denotan los dominios de f y g , respectivamente. La función $f \cdot g$ está definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$$

El dominio de $f \cdot g$ es $D_f \cap D_g$

Ejemplo 3.4.

Sea $f(x) = x - 2$ y $g(x) = x + 2$. Entonces $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = (x - 2)(x + 2) = x^2 - 4$. El dominio de f es $(-\infty, \infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, \infty)$. Por tanto el dominio de $f \cdot g$ es $D_f \cap D_g = (-\infty, \infty)$.

Ejemplo 3.5.

Sea $f(x) = |x|$ y $g(x) = 5$. Entonces $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = |x| \cdot 5$. El dominio de f es $\mathbb{R}$ y el dominio de g es $\mathbb{R}$. Entonces el dominio de $f \cdot g$ es $D_f \cap D_g = \mathbb{R}$. Si $x = -2$, entonces $(f \cdot g)(-2) = f(-2) \cdot g(-2) = |-2| \cdot 5 = 2 \cdot 5 = 10$.

Definición 3.4.

Sean f y g dos funciones y D_f, D_g sus dominios respectivamente. Entonces la función f/g está definida por:

$$(f/g)(x) = f(x)/g(x), g(x) \neq 0$$

El dominio de f/g es $D_f \cap D_g$ excluyendo los valores de x para los cuales $g(x) = 0$.

Ejemplo 3.6.

Si $f(x) = x + 4$ y $g(x) = x^2 - 1$. Entonces $(f/g)(x) = f(x)/g(x) = (x + 4)/(x^2 - 1)$. El dominio de f y el de g son los números reales. La función $g(x) = x^2 - 1$ es cero para $x = 1$ y $x = -1$. Por lo tanto el dominio de f/g es $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

Ejemplo 3.7.

Si $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = \sqrt{-x}$. Encuentre $(f/g)(x)$.

Solución:

El dominio de f es $[0, \infty)$ y el dominio de g es $(-\infty, 0]$. Entonces $D_f \cap D_g = \{0\}$, pero $g(x) = \sqrt{-x}$ es cero para $x = 0$. Ahora el dominio de f/g es $D_f \cap D_g$ excluyendo los valores para los cuales $g(x)$ es igual a cero. Por lo tanto el dominio de f/g es el conjunto vacío. De donde se tiene que la función $(f/g)(x) = \sqrt{x} / \sqrt{-x}$ no tiene dominio.

Ejemplo 3.8

Sea $f(x) = \sqrt{4-x^2}$ y $g(x) = 3x + 1$. Encuentre a) la suma, b) la diferencia, c) el producto y d) la división de f y g .

Solución:

El dominio de f es el intervalo cerrado $[-2, 2]$ y el dominio de g es $\mathbb{R}$. En consecuencia la intersección de sus dominios es $[-2, 2]$ y las funciones pedidas están dadas por

a) $(f+g)(x) = \sqrt{4-x^2} + (3x + 1)$

b) $(f-g)(x) = \sqrt{4-x^2} - (3x + 1)$

c) $(f \cdot g)(x) = (\sqrt{4-x^2}) \cdot (3x + 1)$

d) $(f/g)(x) = \sqrt{4-x^2} / (3x + 1)$

El dominio de (a), (b) y (c) es el intervalo $[-2, 2]$. En la parte (d) la función $g(x) = 3x + 1$ es cero si $x = -1/3$ y por lo tanto el dominio es $\{x \mid -2 \leq x \leq 2, x \neq -1/3\}$.

3.2. Composición de funciones

Sabemos que la notación " $g(a)$ " significa el valor de la función $g(x)$ cuando $x = a$; se obtiene al sustituir a por x , siempre que a aparezca en la expresión de $g(x)$. Por ejemplo,

si $g(x) = x^3 + 2$, entonces $g(a) = a^3 + 2$;

si $g(x) = \sqrt{x-x^2}$, entonces $g(a) = \sqrt{a-a^2}$

Si $f(x)$ es una función, entonces $g(f(x))$ es la función que se obtiene al sustituir $f(x)$ en lugar de x , siempre que ésta ocurra en la expresión de $g(x)$. La función $g(f(x))$ es llamada la compuesta de g con f y se utiliza el símbolo operacional $\circ$ para denotar la compuesta de g con f . Así $(g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Si $g(x) = x^2$ y $f(x) = x + 2$, entonces $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 = (x + 2)^2$. ¿Cuál es el dominio de $g \circ f$? La siguiente definición nos da la respuesta,

Definición 3.5.

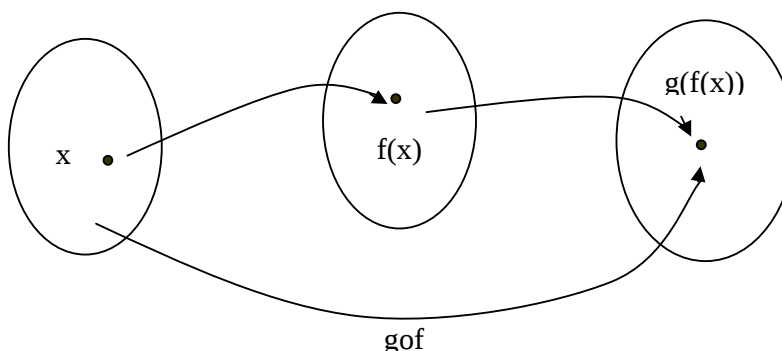
Si f es una función de X en Y y g es una función de Y a Z , entonces la función compuesta $g \circ f$ es la función de X a Z dada por

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

para cada x en X . El dominio de $g \circ f$ es

$$D_{g \circ f} = \{x \mid x \in D_f \text{ y } f(x) \in D_g\}$$

La siguiente figura muestra una representación geométrica de $(g \circ f)(x) = g(f(x))$



Es muy importante hacer notar que para formar la función composición es necesario que el rango de la función f sea igual o un subconjunto del dominio de la función g .

Ejemplo 3.9.

Sea $f(x) = x + 3$ y $g(x) = 2x + \sqrt{x}$. Encuentre $g \circ f$ y especifique su dominio.

Solución:

Por las definiciones de $g \circ f$, f y g , tenemos que

$$(g \circ f)(x) = g(x + 3) = 2(x + 3) + \sqrt{x + 3}$$

El dominio X de f es el conjunto de todos los números reales. Sin embargo $(g \circ f)(x)$ es un número real sólo si $x \geq -3$. Por lo tanto el dominio de $g \circ f$ es el intervalo $[-3, \infty)$.

También es posible calcular la composición de f con g . En este caso obtenemos primero la imagen de x bajo g y luego aplicamos f a $g(x)$. Esto nos da una función compuesta de Z a X denotada por $f \circ g$. Por lo tanto por definición

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$

para cada x en Z .

Ejemplo 3.10.

Sean $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = 2x - 3$. Encuentre $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$ y sus dominios.

Solución:

Por las definiciones de $f \circ g$, $g \circ f$ y g tenemos

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x - 3) = \sqrt{2x - 3}$$

El dominio de g es $(-\infty, \infty)$, y el dominio de f es $[0, \infty)$. El dominio de $f \circ g$ es el conjunto de números reales para los cuales $2x - 3 \geq 0$, o, equivalentemente $[3/2, \infty)$.

De la misma forma

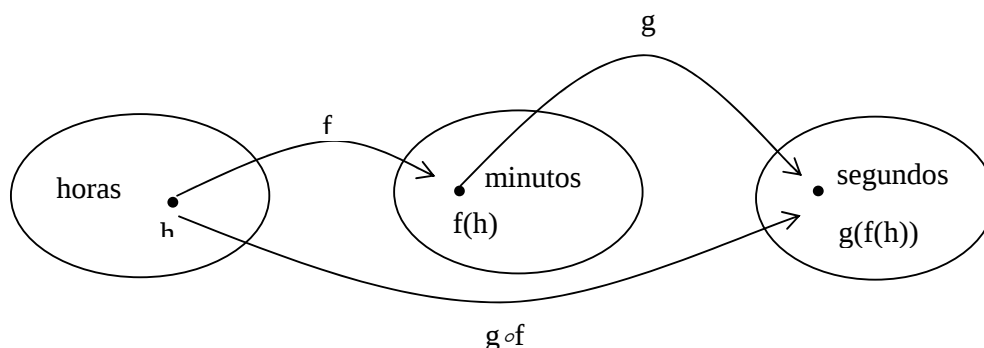
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = 2\sqrt{x} - 3$$

El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de números reales para los cuales $x \geq 0$, es decir $[0, \infty)$. nótese que $f \circ g$ puede ser una función diferente a $g \circ f$.

Ejemplo 3.11.

Sea f la función definida por $f(h) = 60h$ que convierte horas en minutos, y $g(m) = 60m$ la función que convierte minutos a segundos. Encuentre una función que convierta horas en segundos.

Solución:



$$(g \circ f)(h) = g(f(h)) = g(60h) = 60(60h) = 3600h$$

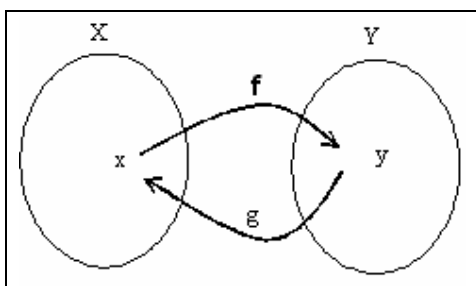
Los siguientes son ejemplos de composición de funciones.

- (1) El costo de producción de huevos por un granjero es función del número de gallinas que tiene; el número de gallinas depende a su vez del costo del alimento. El costo de producción de huevos es una función del costo del alimento para gallinas.
- (2) La producción anual de naranjas de una huerta es función del número de árboles plantados en la huerta; el número de árboles plantados es función de la fertilidad del terreno. La producción anual es pues función de la fertilidad del terreno.

3.3. Inversa de una función.

Supongamos que f es una función uno a uno con dominio X y rango Y . Esto significa que cada elemento y de Y se asocia con un solo elemento x de X . Podemos entonces definir una función g con dominio Y y rango X tal que

$$G(x) = x, \text{ si } f(x) = y$$



La función g “manda” y con x , si la función f “manda” x con y . En cierto sentido la función g “deshace” lo hecho por la función f .

Como se ilustra en la figura, $g(y) = x$ si $f(x) = y$. Esto significa que

$$g(y) = g(f(x)) = x, \text{ para cada } x \text{ en } X.$$

La función g se llama la función inversa de f y la función f se llama la función inversa de g de acuerdo con la siguiente definición.

Definición 3.6.

Si f es una función uno a uno con dominio X y contradominio Y , entonces una función g con dominio Y y contradominio X se llama función inversa de f si

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en } Y$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = x \text{ para cada } x \text{ en } X$$

Algunas veces a la función g se le denota como f^{-1} pero el -1 no significa que sea exponente.

Ejemplo 3.12.

Sea $f(x) = 2x - 1$ para todo número real. Encuentre la función inversa de f .

Solución:

No es difícil mostrar que f es uno a uno con dominio y rango $\mathbb{R}$ y por lo tanto la función inversa existe. Pongamos $y = 2x - 1$ y despejamos x en términos de y .

$$x = \frac{y+1}{2}$$

Esta ecuación nos permite encontrar x cuando se nos dé el valor de y . Escribamos $g(y) = \frac{y+1}{2}$, esta función nos permite calcular $g(x)$ cuando se nos dé el valor de x .

Proponemos a g como candidata a función inversa, verifiquemos

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \frac{f(x)+1}{2} = \frac{2x-1+1}{2} = x$$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2g(x) - 1 = 2\left(\frac{x+1}{2}\right) - 1 = x + 1 - 1 = x$$

Por lo tanto g es la función inversa de f . Utilizando la notación f^{-1} equivalente tenemos que:

$$f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2}$$

Ejemplo 3.13.

Dado $f(x) = x^3 - 1$. Encuentre f^{-1} , si ésta existe.

Solución:

La función $f(x) = x^3 - 1$ es una función 1-1. Por lo tanto su inversa existe. Si f^{-1} existe, entonces por la definición 1.3.6 se tiene $(f \circ f^{-1})(x) = x$. Así

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f(f^{-1}(x)) = x \\ &= (f^{-1}(x))^3 - 1 = x \\ &= (f^{-1}(x))^3 = x + 1 \\ &= f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}\end{aligned}$$

Comprobamos la segunda condición tomando $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+1}$

$$\begin{aligned}(f \circ f^{-1})(x) &= f^{-1}(f(x)) = \sqrt[3]{x+1}^3 - 1 \\ &= x + 1 - 1 = x\end{aligned}$$

Ejemplo 3.14.

Encuentre la función inversa de f suponiendo que su dominio X es el intervalo $[0, \infty)$ y $f(x) = x^2 + 2$ para toda x en X .

Solución:

El dominio se restringió de manera que f fuera 1-1. El rango de f es el intervalo $[2, \infty)$. Así como en el ejemplo 3.12 primero consideramos la ecuación $y = x^2 + 2$.

Despejando x tenemos $x = \pm\sqrt{y-2}$. Como x es no negativa descartamos $x = -\sqrt{y-2}$ y consideramos solamente la ecuación $x = \sqrt{y-2}$, y proponemos a f^{-1} como $f^{-1}(x) = \sqrt{y-2}$.

A continuación comprobamos las dos condiciones de la definición 3.6

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x-2}) = (\sqrt{x-2})^2 + 2 = x - 2 + 2 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(x^2 + 2) = \sqrt{x^2 + 2 - 2} = \sqrt{x^2} = x$$

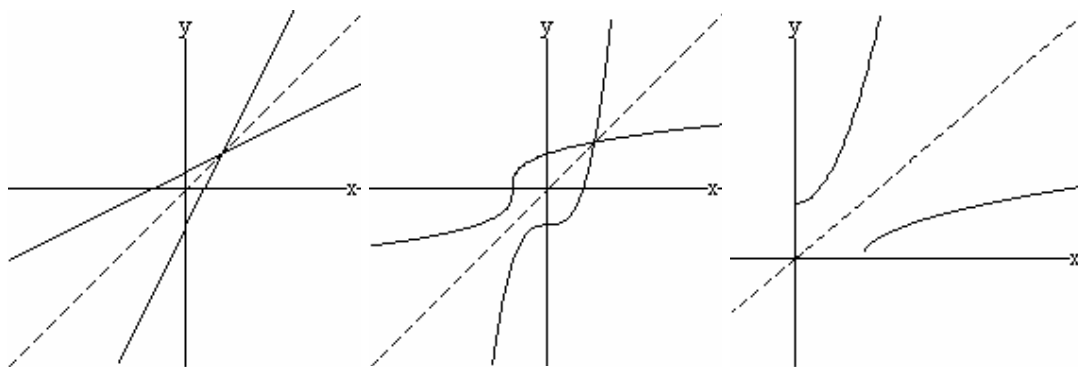
Esto demuestra que

$$f^{-1}(x) = x - 2 \quad \text{para } x \geq 2.$$

3.3. Relación gráfica de una función y su inversa.

Si $y = f(x)$ es una función uno a uno $f(a) = b$, entonces su inversa $f^{-1}(x)$ “manda” b al punto a . Luego, si (a, b) es un punto de la gráfica de $y = f(x)$, entonces (b, a) está en la gráfica de $y = f^{-1}(x)$. Esto significa que las gráficas de funciones inversas son reflexiones una de otra sobre la recta $y = x$. Si tenemos la gráfica de una función que es uno a uno, entonces podemos trazar la gráfica de su inversa que es la reflejada sobre la bisectriz $y = x$.

Lo anterior se muestra en las gráficas de los ejemplos 1.12, 1.13, 1.14.



4. FUNCIONES COMO MODELO MATEMÁTICO

El aplicar las matemáticas a los problemas de la vida real comprende tres etapas. Primero se traduce el problema a términos matemáticos, entonces decimos que tenemos un modelo matemático. Después se obtiene la solución del problema matemático. Por último, se interpreta esta respuesta matemática en términos del problema original.

En esta sección trataremos solo el primer paso. De hecho, nuestra atención se enfocará a la determinación de la función o las funciones que involucran los problemas verbales.

La facultad para describir las relaciones funcionales que aparecen en un problema es una habilidad matemática que importa desarrollar. Por esta razón mostraremos algunos ejemplos tomados en diferentes campos.

Ejemplo 4.1

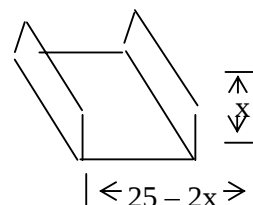
Un estacionamiento en la ciudad cobra \$20.00 por la primera hora y \$10.00 por cada hora adicional. Expresar la cuota de estacionamiento como una función del número de horas estacionadas.

Solución:

Si x representa el número de horas estacionadas, entonces la cuota de estacionamiento F estará dada por la fórmula $E = 20 + 10(x-1)$, donde x es un entero positivo.

Ejemplo 4.2.

De una larga pieza de hoja de lata de 25 cm. de ancho se va a hacer un canalón para lluvia, doblando hacia arriba sus orillas para formar sus lados. Expresar el área de la sección transversal del canalón para lluvia como una función de su altura.



Solución:

Si representamos por x la altura en cm. del canalón para lluvia, podemos expresar el área de la sección transversal A en cm^2 por medio de la fórmula $A = x(25 - 2x)$

Ejemplo 4.3

Se sabe que 100 gramos de granos secos de soya contienen 35 gr. de proteínas y 100 gr. de lentejas secas contienen 26 gr. de proteínas. Los hombres de talla media que viven en un clima moderado necesitan 70 gr. de proteínas en su alimentación diaria. Supongamos que un hombre quiere conseguir esos 70 gr. de proteínas comiendo soya y/o lentejas. Sea x la cantidad de soya e y la cantidad de lentejas diarias (x e y medidas en gr.) ¿Cuál es la relación entre x e y ?

Solución:

La proteína ingerida por medio de la soya es $35x$ y por las lentejas $26y$ y por día (ambas medidas en gr.). La cantidad diaria total de proteínas es 70 gr. Por tanto obtenemos la ecuación

$$35x + 26y = 70 \quad (1)$$

Reordenando los términos podemos expresar y como función de x :

$$y = -\frac{35}{26}x + \frac{70}{26} \quad (2)$$

Es claro que el dominio y el rango son $x \geq 0$ e $y \geq 0$. Una ecuación como la (1) se llama función implícita y una ecuación como la (2) función explícita.

Ejemplo 4.4.

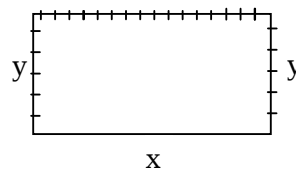
Un lote rectangular va a cercarse en tres de sus lados. Si el área del lote es de 30 metros cuadrados, exprese la longitud de la cerca como una función de la longitud del lado no cercado.

Solución:

Es natural empezar por introducir dos variables, digamos x , y , y , para denotar las longitudes de los lados del lote. (Figura). Entonces.

$$\text{Longitud de la cerca} = x + 2y$$

Como queremos la longitud de la cerca expresada como una función de x solamente, debemos encontrar una forma de expresar y en términos de x ; es decir, debemos encontrar una ecuación que relacione a x , y , y . El hecho de que el área sea de 30 metros cuadrados nos proporciona la ecuación. Específicamente,



$$xy = 30$$

Resolviendo esto para y obtenemos

$$y = 30/x$$

que reemplazamos entonces en la fórmula de la longitud de la cerca. Esto da

$$f(x) = x + 60/x$$

en donde f denota la longitud de la cerca.

La función $f(x)$ está definida para todos los valores de x excepto $x = 0$ y representa la longitud de la cerca si x es positiva.

Ejemplo 4.5.

Una huerta de manzanos tiene 40 hectáreas por hectárea y el promedio de producción es de 300 manzanas por árbol y por año. Si por cada árbol que se plante por hectárea, además de los 40, la producción promedio disminuye en 5 manzanas, exprésese la producción.

Solución: La producción actual de la huerta puede obtenerse de la siguiente forma: $(300)(40) = 12000$ manzanas por hectárea y por año, y en general, la producción = (número de árboles por hectárea) (producción promedio anual de un árbol).

Representemos por x el número de árboles plantados, además de los 40. Puesto que la producción promedio por árbol disminuye en 5 manzanas por cada árbol plantado, entonces:

Producción: promedio anual de un árbol = $300 - 5x$; y la producción total será:

$$P = (40 + x)(300 - 5x)$$

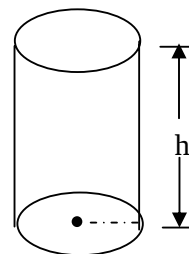
Obsérvese que $0 \leq x \leq 60$

Ejemplo 4.6.

Se desea construir un recipiente con la forma de un cilindro circular sin tapa con un volumen de 24π centímetros cúbicos. El precio del material que se usa para el fondo es el triple que el del material que se usa para la parte curva. Exprese el costo del recipiente en función del radio de la base del cilindro.

Solución:

Comenzamos por hacer un dibujo como el mostrado en la figura. Denotamos por r el radio de la base del recipiente y por h la altura (en centímetros). Como el volumen de un cilindro circular es $V = \pi r^2 h$ y el volumen del recipiente pedido es de 24π cm. cúbicos, entonces tenemos.



$$\pi r^2 h = 24\pi$$

Esto nos da la relación

$$h = \frac{24}{r^2}$$

El costo total del recipiente es igual al costo de la parte curva más el costo de la base del cilindro.

Si P denota el precio por cm. cuadrado del material que se usa para la parte curva, entonces el precio por cm. cuadrado del material que se usa para el fondo será $3P$.

El costo de la parte curva del cilindro es igual al costo del área del rectángulo de base $2\pi r$ y altura h , es decir $C_c = P(2\pi r)h$ pero $h = 24/r^2$. Así

$$C_c = P(2\pi\gamma)(24/\gamma^2) = 48p\pi/\gamma$$

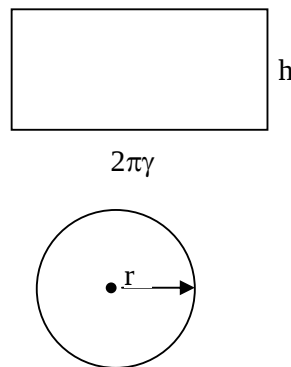
El costo de la base del cilindro es

$$C_b = 3p (\pi\gamma^2)$$

El costo total es

$$C = C_c + C_b = 48p\pi/\gamma^2 + 3p\pi\gamma^2$$

$$C = p\pi(3\gamma^2 + 48/\gamma) \quad \gamma > 0$$



Ejemplo 4.7

Una compañía de autobuses ha adoptado la siguiente política de precios para los grupos que deseen alquilar autobuses. A los grupos que contengan un máximo de 40 personas se les cobrará una suma fija de \$2,400.00 (40 veces \$60). En grupos que contengan entre 40 y 80 personas, cada una pagará \$60.00 menos 50 centavos por cada persona que pase de las 40. La tarifa más baja de la compañía de \$40.00 por persona se ofrecerá a grupos que contengan 80 miembros o más. Expresa los ingresos de la compañía de autobuses como una función del tamaño del grupo.

Solución:

Usamos x para denotar el número de personas del grupo y $f(x)$ el ingreso correspondiente. Si $0 \leq x \leq 40$, el ingreso es simplemente $f(x) = 2,400$. Si $x \geq 80$, cada persona paga \$40.00 y por lo tanto el ingreso correspondiente es $f(x) = 40x$. La expresión para $f(x)$ cuando $40 < x < 80$ es algo más complicada. Comencemos nuestro análisis de esta situación con la relación básica.

Ingresos = (número de personas) (tarifa por persona)

Como x denota el número total de personas del grupo, $x - 40$ es el número de personas que pasan de 40. La tarifa por persona es la original de \$60.00 reducida en $\frac{1}{2}$ peso por cada una de las $x - 40$ personas extras. Así. Tarifa por persona = $60 - \frac{1}{2}(x - 40) = 80 - \frac{1}{2}x$.

Para obtener el ingreso, simplemente multiplicamos esta expresión por x , el número de personas del grupo. Así para $40 < x < 80$, $f(x) = 80x - \frac{1}{2}x^2$.

Podemos resumir todos los tres casos en forma compacta como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} 2,400 & \text{si } 0 \leq x \leq 40 \\ 80x - \frac{1}{2}x^2 & \text{si } 40 < x < 80 \\ 40x & \text{si } x \geq 80 \end{cases}$$

Aunque esta función $f(x)$ está definida para todos los valores no negativos de x , representa el ingreso de la compañía de autobuses solamente cuando x es un entero no negativo.

4.1 Resumen:

La mejor manera de desarrollar una habilidad para tratar con problemas verbales es practicar intensamente. Como los tipos de aplicaciones son muchos y muy variados, es difícil dar reglas específicas para hallar las soluciones. Los siguientes consejos son útiles en muchos casos.

1. Lea el problema cuidadosamente varias veces y fíjese en los datos y en las incógnitas que deben encontrarse.
2. Si es posible, haga un dibujo o un diagrama que incluya los datos pertinentes. Introduzca variables para denotar las incógnitas. Palabras como “que”, “encuentre”, “cuanto”, “donde” y “cuando” deben guiarle para reconocer las incógnitas.
3. Tratar de descomponer el problema en otros más pequeños.
4. Escriba una lista de hechos conocidos y relaciones entre las variables. Una relación entre variables generalmente se escribe como una ecuación.
5. Puede ser útil encontrar el valor de la función para uno o más valores en la variable de manera que pueda generalizarse el procedimiento.
6. Si la elección de variables desemboca en una función indebidamente complicada, considérese otra alternativa.

Captura, Edición y Formación:

José Luis Díaz Gómez Profesor Titular del Departamento de Matemáticas.

Maria del Pilar Rocha Romero. Secretaria del Departamento de Matemáticas.

Versión 1. Agosto del 2003.

INDICE

Álgebra de funciones, 17

beneficio, 2

Composición de funciones, 18

Contracciones y Expansiones
Horizontales, 15

Contracciones y Expansiones
Verticales, 14

Definición de función, 3

dominio, 3

Ejemplo

presion sanguinia;inversion;ley de
Boyle, 2

$f - g$, 17

$f(x) = 3$, 9

$f(x) = x$, 7

$f(x) = x^2 + 1$, 7

$f(x) = x^3$, 8

fenómenos naturales, 2

función compuesta, 19

función $f + g$, 17

función $f \cdot g$, 17

función uno a uno, 10

funciones elementales, 7

funciones pares, impares, 11

geométrica de $(g \circ f)(x)$, 19

gráfica de una función, 7

imagen, 3

Inversa de una función, 20

la función f/g , 18

La Notación Funcional, 5

ley de Boyle, 2

modelo matemático, 23

presión sanguínea, 2

Problemas de aplicacion

Presion sanguinia

Interes de inversion

Ley de Boyle

Problema de beneficio, 2

Relación gráfica de una función y su
inversa, 22

Representación de una Función, 4

Traslación horizontal, 13

traslaciones verticales, 12

Trinomio cuadrado, 16

variable dependiente, 3

variable independiente, 3