UNIVERSIDAD DIEGO PORTALES
FACULTAD DE CIENCIAS DE LA INGENIERÍA
INSTITUTO DE CIENCIAS BÁSICAS

GUÍA N° 6 CÁLCULO I

Profesor: Carlos Ruz Leiva

ÁLGEBRA DE LAS FUNCIONES

Supongamos que f y g son funciones con dominios A y B. Entonces las funciones $f+g$, $f-g$, fg y f/g se definen como sigue:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x), \quad Dom(f+g) = A\cap B.$$
$$(f-g)(x) = f(x)-g(x), \quad Dom(f-g) = A\cap B.$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x), \quad Dom(fg) = A\cap B.$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad Dom(f/g) = \{x\in A\cap B / g(x)\neq 0\}.$$

Ejemplo:

1. Supongamos que $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{x}$.
   (a) Obtenga las funciones $f+g$, $f-g$, fg, f/g, y sus dominios.
   (b) Determine $(f+g)(4)$, $(f-g)(9)$, $(fg)(2)$ y $(f/g)(25)$.

Solución:

(a) El dominio de f es IR y el de g es $dom(g) = \{x\in IR / x\geq 0\}$.

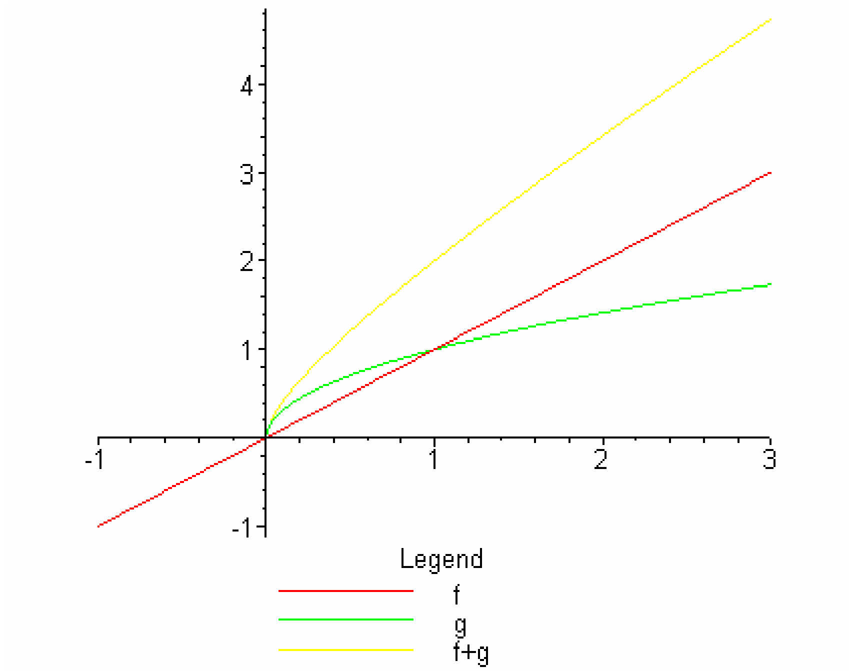
$$(f+g)(x) = f(x)+g(x) = x+\sqrt{x}, \quad Dom(f+g) = \{x\in IR / x\geq 0\}.$$
$$(f-g)(x) = f(x)-g(x) = x-\sqrt{x}, \quad Dom(f-g) = \{x\in IR / x\geq 0\}.$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x) = x\sqrt{x}, \quad Dom(fg) = \{x\in IR / x\geq 0\}.$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}, \quad Dom(f/g) = \{x\in IR / x> 0\}.$$

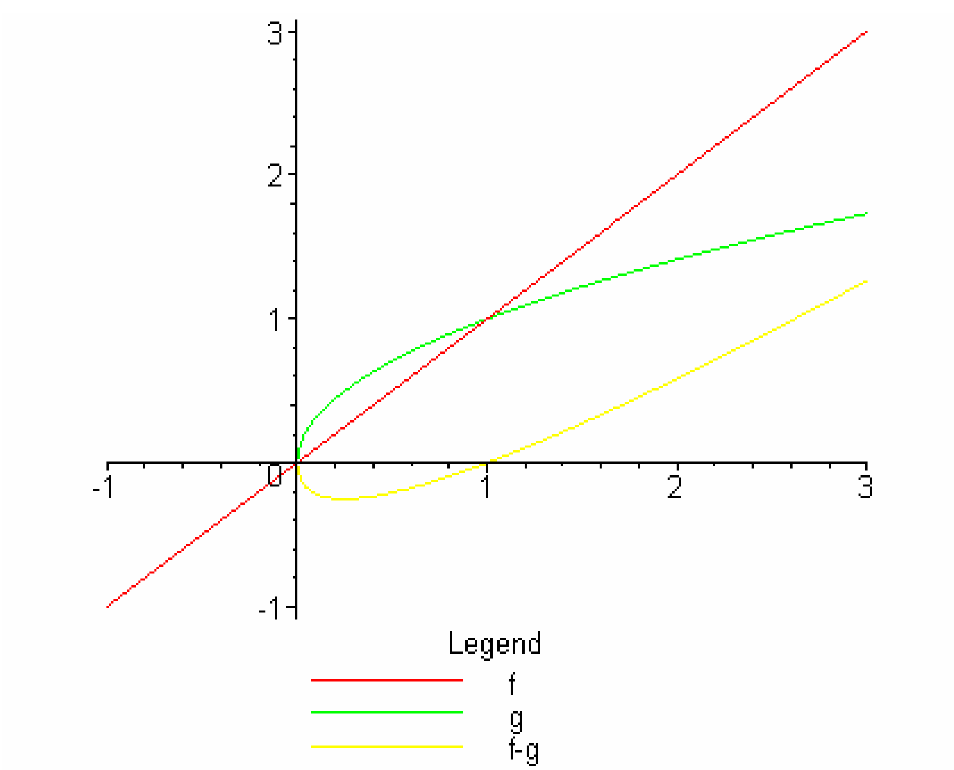
Se excluye $x=0$, ya que $g(0)=0$, indetermina a la función f/g.

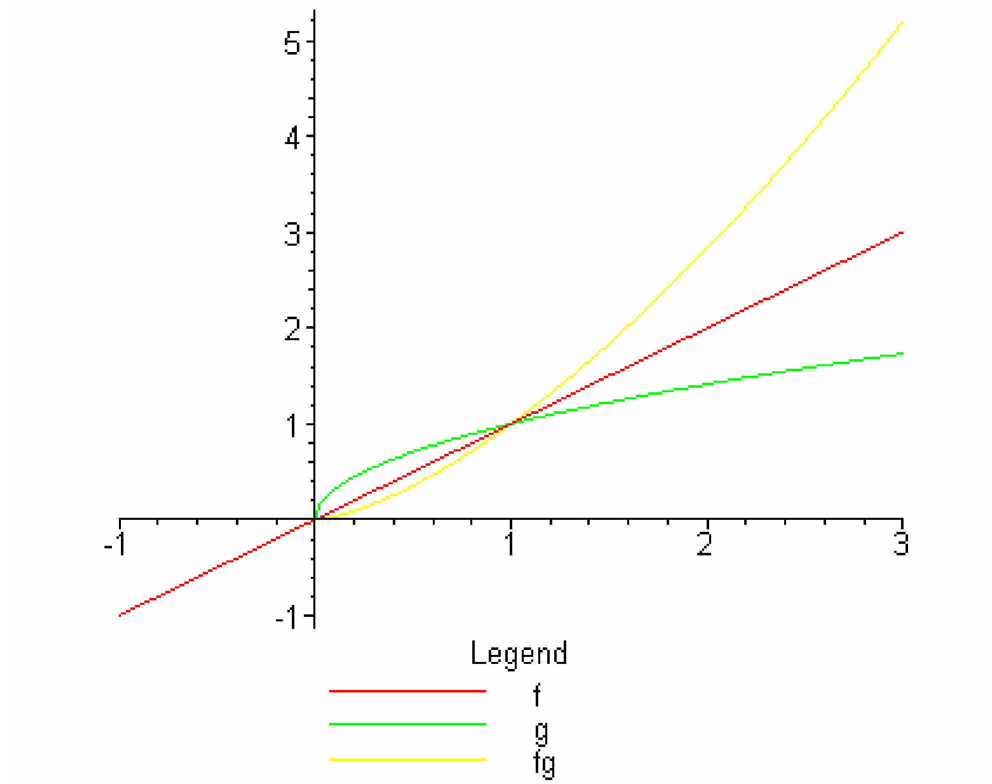
(b) $(f+g)(4) = f(4)+g(4) = 4+\sqrt{4} = 4+2 = 6$.

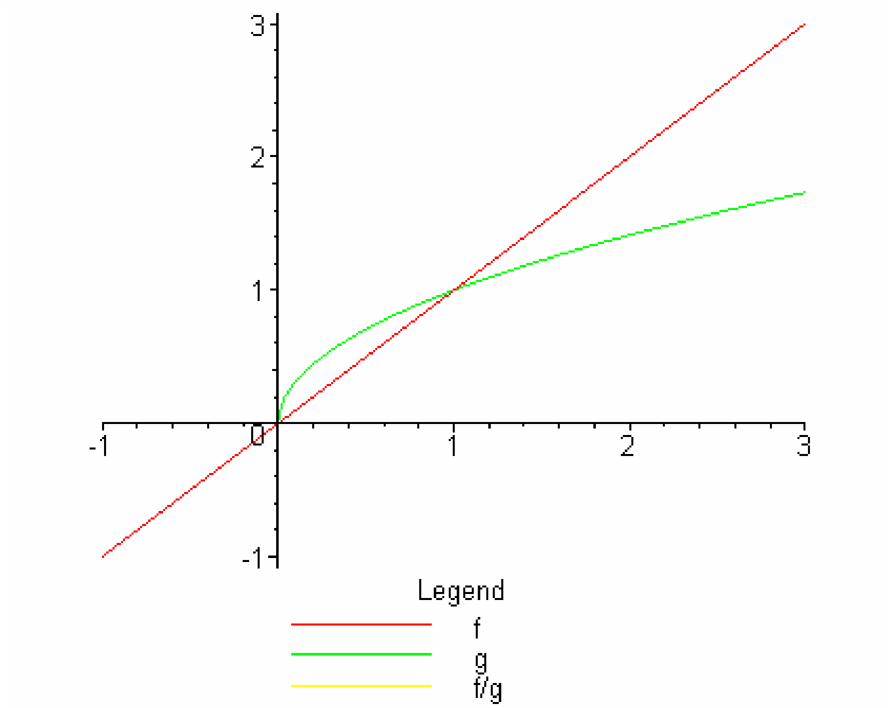
$$(f-g)(9) = f(9)-g(9) = 9-\sqrt{9} = 9-3 = 6.$$
$$(fg)(2) = f(2)g(2) = 2\sqrt{2}.$$
$$(f/g)(25) = \frac{f(25)}{g(25)} = \frac{25}{\sqrt{25}} = \frac{25}{5} = 5.$$

Gráfica de las funciones f , g , $f+g$, $f-g$, fg y f/g .









Ejercicios:

1. Determine $f+g$, $f-g$, fg, f/g, así como su dominio.

   a) $f(x)=x^2-x$, $g(x)=x+5$.

b) $f(x)=\sqrt{1+x}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$.

c) $f(x)=\dfrac{2}{x}$, $g(x)=-\dfrac{2}{x+4}$.

2. Obtenga las gráficas de f, g y $f+g$ en una pantalla común, con el fin de ilustrar la suma gráfica.

a) $f(x)=\sqrt{1+x}$, $g(x)=\sqrt{1-x}$.

b) $f(x)=x^2$, $g(x)=\sqrt{x}$.

c) $f(x)=x^2$, $g(x)=x^3$.

d) $f(x)=\sqrt[4]{1-x}$, $g(x)=\sqrt{1-\dfrac{x^2}{9}}$.

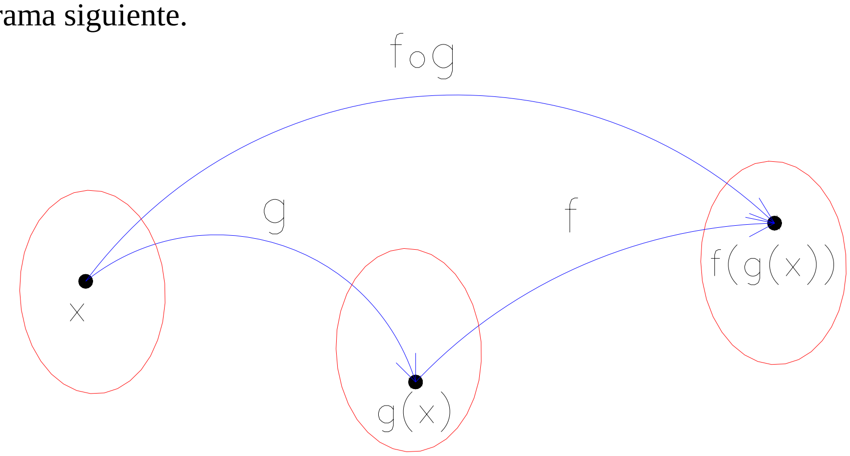
COMPOSICIÓN DE FUNCIONES

Dadas dos funciones f y g, la función compuesta $f\circ g$ (se lee f compuesta con g) está definida por

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

El dominio de la función $f\circ g$ es el conjunto de todas las x en el dominio de g tales que $g(x)$ está en el dominio de f. En otras palabras $(f\circ g)(x)$ está definida siempre que tanto $g(x)$ como $f(g(x))$, estén definidas.

Una buena forma de entender el concepto de composición de funciones es mediante el diagrama siguiente.



Ejemplo:

Para las funciones $f(x)=\sqrt{1-x}$, $g(x)=x^2$, determine (a) $(f\circ g)(x)$, (b) $Dom(f\circ g)$, (c) $(g\circ f)(x)$, (d) $Dom(g\circ f)$

Solución:

(a) $(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2)$. Aplicamos la función $g(x) = x^2$.

$(f\circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = \sqrt{1-x^2}$. Aplicamos la función $f(x) = \sqrt{1-x}$.

Por lo tanto $(f\circ g)(x) = \sqrt{1-x^2}$.

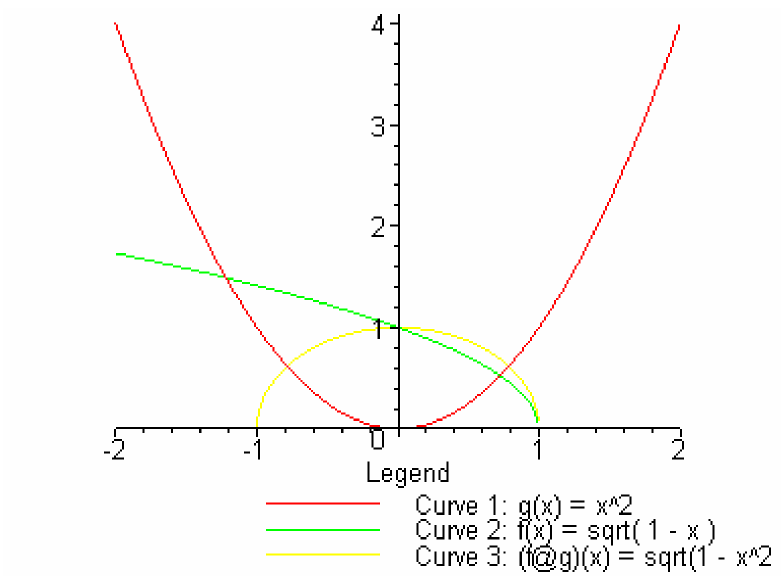
(b) La función $g(x) = x^2$ está definida para todo $x \in IR$. Mientras que $(f\circ g)(x) = \sqrt{1-x^2}$ está definida para $1-x^2 \geq 0$, es decir si $-1 \leq x \leq 1$. Luego $Dom(f\circ g) = [-1,1]$

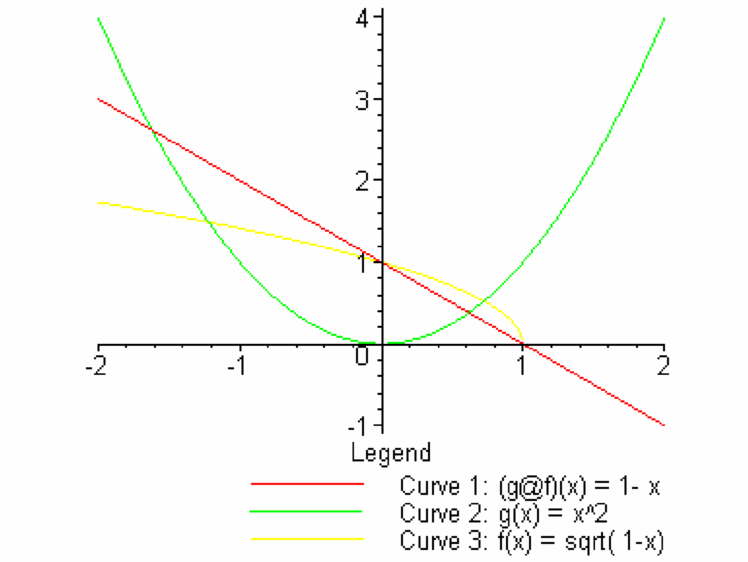
(c) $(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x})$. Aplicamos $f(x) = \sqrt{1-x}$.

$(g\circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{1-x}) = (\sqrt{1-x})^2$. Aplicamos $g(x) = x^2$.

Por lo tanto $(g\circ f)(x) = (\sqrt{1-x})^2 = |1-x|$.

(d) La función $f(x) = \sqrt{1-x}$ está definida para $1-x \geq 0$, es decir $x \leq 1$. Mientras que $(g\circ f)(x) = |1-x|$ está definida para todo $x \in IR$. Luego $Dom(g\circ f) =]-\infty,1]$.





Ejercicios:

1. Utilice $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = 2 - x^2$ para evaluar la expresión dada.
   a) $f(g(0))$, $g(f(0))$.
   b) $f(f(4))$, $g(g(4))$.
   c) $(f \circ g)(-2)$, $(g \circ f)(-2)$.
   d) $(f \circ g)(x)$, $(g \circ f)(x)$.

2. Determine las funciones $f \circ g$, $g \circ f$, $f \circ f$ y $g \circ g$, así como su dominio.
   a) $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = 4x - 1$.
   b) $f(x) = 2x^2 - x$, $g(x) = 3x + 2$.
   c) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $g(x) = x^2$.
   d) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, $g(x) = \dfrac{x-1}{x+1}$.
   e) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $g(x) = 1 - \sqrt{x}$.
   f) $f(x) = \dfrac{x+2}{2x+1}$, $g(x) = \dfrac{x}{x-2}$.
   g) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$, $g(x) = x^2 - 4x$.

3. Determine $f \circ g \circ h$.
   a) $f(x) = x - 1$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x - 1$.
   b) $f(x) = x^4 + 1$, $g(x) = x - 5$, $h(x) = \sqrt{x}$.
   c) $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$, $h(x) = \sqrt[3]{x}$.

4. Exprese la función en la forma $f \circ g$.

a) $F(x) = (x-9)^5$, b) $G(x) = \dfrac{x^2}{x^2+4}$, c) $H(x) = |1 - x^3|$.

5. Se deja caer una piedra en un lago, creando unas ondas circulares que se desplazan hacia el exterior a una rapidez de 60 cm/s. Exprese el área de este círculo como una función del tiempo t (en segundos). **Solución:** $A(t) = 3600\pi\, t^2$.
6. Un aeroplano vuela a una rapidez de 350 millas/h a una altitud de 1 milla. El aeroplano pasa directamente por encima de una estación de radar en el tiempo $t = 0$.
   a) Exprese la distancia s entre el aeroplano y la estación de radar como una función de d.
   b) Exprese la distancia horizontal d (en millas) que ha volado el aeroplano como una función de t (en horas).
   c) Utilice la composición para expresar s en función de t.

   Solución:

(a) $s = f(d) = \sqrt{1 + d^2}$, (b) $d = g(t) = 350t$, (c) $s = f(g(t)) = \sqrt{1 + 122{,}500t^2}$.

FUNCIONES UNO A UNO Y SUS INVERSAS

Una función con dominio A se conoce como uno a uno (inyectiva) si no hay dos elementos de A que tengan la misma imagen, esto es

$$f(x_1) \neq f(x_2) \text{ siempre que } x_1 \neq x_2$$

Una forma equivalente de escribir la condición de una función de uno a uno es la siguiente.

$$\text{si } f(x_1) = f(x_2), \text{ entonces } x_1 = x_2.$$

Ejemplo:

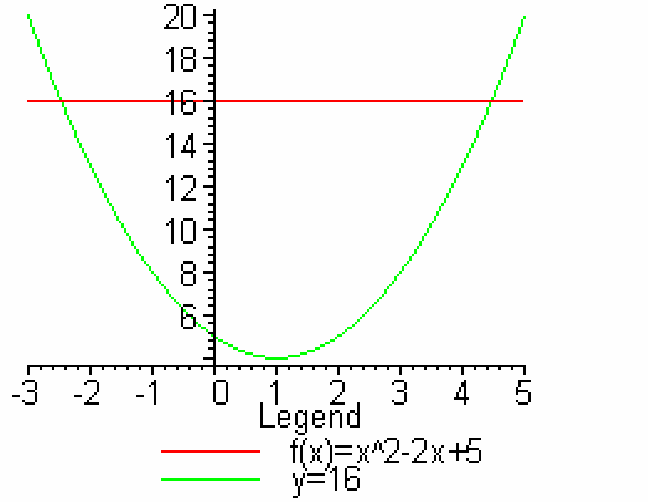
1. Determine si la función $f(x) = x^2 - 2x + 5$, es uno a uno.

Solución:

Si $x_1 \neq x_2$ entonces ${x_1}^2 \neq {x_2}^2$ no es siempre cierto, ya que por ejemplo $-2 \neq 2$ no implica que $4 = (-2)^2 \neq 2^2 = 4$. Luego $f(x) = x^2 - 2x + 5$ no es uno a uno.

De la otra forma, si $f(x_1) = f(x_2)$ entonces ${x_1}^2 - 2x_1 + 5 = {x_2}^2 - 2x_2 + 5$. Simplificando, obtenemos ${x_1}^2 = {x_2}^2$. Es decir, $x_1 = \pm x_2$. Luego, no se cumple que $x_1 = x_2$. Por lo tanto $f(x) = x^2 - 2x + 5$, no es uno a uno.

Gráficamente, es más fácil darse cuenta si la función es o no uno a uno.

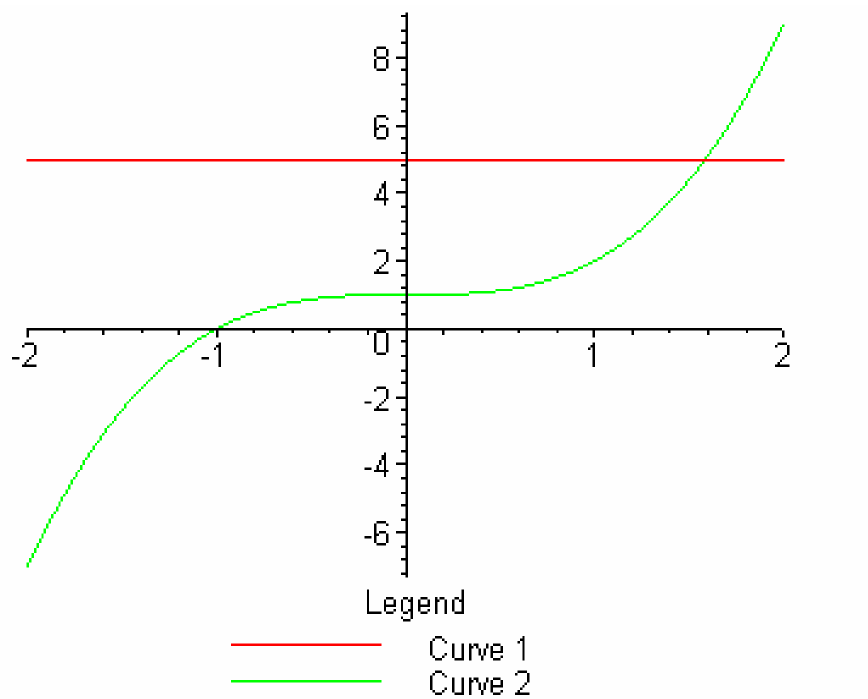


Observe que para $y = 16$, existen dos valores de x, distintos, tales que $f(x) = 16$.

2. Determine si $f(x) = x^3 + 1$, es uno a uno.

Solución:

Supongamos que $f(x_1) = f(x_2)$, es decir, $x_1^3 + 1 = x_2^3 + 1$. De donde se deduce que $x_1^3 = x_2^3$. Aplicando raíz cúbica a ambos lados, obtenemos $x_1 = x_2$. Por lo tanto $f(x) = x^3 + 1$, es uno a uno.



FUNCIONES INVERSAS

Sea f una función uno a uno con dominio A y recorrido B. Entonces su **función inversa** f^{-1} tiene dominio B y recorrido A y está definida por

$$f^{-1}(y) = x \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = y$$

Ejemplos:

1. Si $f(-3) = 6$, $f(0) = 4$, y $f(5) = -2$, determine $f^{-1}(6)$, $f^{-1}(4)$ y $f^{-1}(-2)$.

Solución:

De la definición de f^{-1} obtenemos:

$f^{-1}(6) = -3$, ya que $f(-3) = 6$.

$f^{-1}(4) = 0$, ya que $f(0) = 4$.

$f^{-1}(-2) = 5$, ya que $f(5) = -2$.

2. Demuestre que $f(x) = x^3$ y $g(x) = x^{1/3}$ son inversas entre sí.

Solución:

Como $f(g(x)) = f(x^{1/3}) = (x^{1/3})^3 = x$ y $g(f(x)) = g(x^3) = (x^3)^{1/3} = x$, se deduce que $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x) = x$, es decir $f \circ g = g \circ f = I$, la función identidad. En pocas palabras $g = f^{-1}$ o $f = g^{-1}$.

3. Determine la función inversa de $f(x) = 3 + 5x$.

Solución:

Despejamos x de $f(x) = 3 + 5x = y$.

Esto es $x = \dfrac{y-3}{5}$. Es decir, $f^{-1}(y) = x = \dfrac{y-3}{5}$.

Luego, la función inversa es $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{5}$. En término de la variable independiente x.

Ejercicios:

1. Determine si la función es uno a uno.

   a) $f(x) = 7x - 3$, b) $g(x) = \sqrt{x}$, c) $h(x) = x^4 + 1$, d) $s(x) = |x|$.

2. Suponga que f es una función uno a uno.

   a) Si $f(2) = 7$, determine $f^{-1}(7)$.
   b) Si $f^{-1}(3) = -1$, determine $f(-1)$.
   c) Si $f(x) = 5 - 2x$, determine $f^{-1}(3)$.
   d) Si $g(x) = x^2 + 4x$ con $x \geq -2$, determine $g^{-1}(5)$.

3. Obtenga la función inversa de f.

a) $f(x) = 4x + 5$. b) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$, $x > -2$.

c) $f(x) = \dfrac{1+3x}{5-2x}$. d) $f(x) = \sqrt{2+5x}$.

e) $f(x) = 4 - x^2$, $x \geq 0$. f) $f(x) = 4 + \sqrt[3]{x}$.

g) $f(x) = 1 + \sqrt{1+x}$. h) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$, $0 \leq x \leq 3$.

i) $f(x) = x^4$, $x \geq 0$.

4. Para la función f, (i) $f(x) = 3x - 6$, (ii) $f(x) = 16 - x^2$, $x \geq 0$ (iii) $f(x) = \sqrt{x+1}$.

(a)Trace la gráfica de f, (b) Use la gráfica de f para obtener la de f^{-1}, (c) Determine f^{-1}.

5. Trace, usando un graficador, la gráfica de f y utilícela para determinar si las funciones son uno a uno.

(a) $f(x) = x^3 - x$, (b) $f(x) = \dfrac{x+12}{x-6}$, (c) $f(x) = \sqrt{x^3 - 4x + 1}$.