Funciones y gráficas (1)

Introducción


R. Descartes

Uno de los conceptos más importantes en matemática es el de función. El término función fue usado por primera vez en 1637 por el matemático francés René Descartes para designar una potencia x^n de la variable x.

En 1694 el matemático alemán G. W. Leibniz utilizó el término para referirse a varios aspectos de una curva, como su pendiente. La noción de función que más se utiliza en la actualidad fue dada en el año 1829 por el matemático alemán, J.P.G. Lejeune-Dirichlet (1805-1859).

Las funciones permiten describir el mundo real en términos matemáticos, como por ejemplo, las variaciones de la temperatura, el movimiento de los planetas, las ondas cerebrales, los ciclos comerciales, el ritmo cardíaco, el crecimiento poblacional, etc.

En esta sección se tratarán las funciones más usuales en la modelización de fenómenos en aplicaciones en las distintas ciencias y en la vida diaria, y sus características generales, tanto analíticas como gráficas. Específicamente se revisarán las funciones polinomiales y racionales, las funciones exponenciales y logarítmicas, y las funciones periódicas.

1.1. Funciones

En muchas situaciones encontramos que dos o más objetos o cantidades están relacionados por una correspondencia de dependencia, como por ejemplo: el área de un círculo depende del radio del mismo, la temperatura de ebullición del agua depende de la altura del lugar, la distancia recorrida por un objeto al caer libremente depende del tiempo que transcurre en cada instante. Esto nos conduce al concepto matemático de función.

Definición de función

Una *función* f de un conjunto A en un conjunto B es una *regla* que hace corresponder a cada elemento x perteneciente al conjunto A, uno y solo un elemento y del conjunto B, llamado *imagen* de x por f, que se denota $y=f(x)$.

En símbolos, se expresa $f : A \to B$, siendo el conjunto A el *dominio* de *f*, y el conjunto B el *codominio*

Nociones básicas y notaciones

Sea $f : A \to B$.

1) La notación $y = f(x)$ señala que y es una función de x. La variable x es la *variable independiente*, y el valor y se llama *variable dependiente*, y f es el nombre de la función.

2) Leonard Euler (1707-1783) dio una definición precisa de función e introdujo en 1734 el símbolo $f(x)$ para designar la imagen de x por una función *f*.

3) El conjunto de todas las imágenes de los elementos de A a través de *f* se denomina *Recorrido* de *f*, y se denota Rec(*f*).

L.Euler

4) Igualdad *de funciones.* Sean f y g dos funciones definidas de A en B. Se tiene que:
$$f = g \iff f(x) = g(x) \quad \textit{para todo} \quad x \in A$$
Luego**,** dos funciones *f* y *g* son distintas, si y sólo si, existe $x \in A$ tal que $f(x) \neq g(x)$.

5) *Composición de funciones*.
Sean $f : A \to B$ y $g : C \to D$. La *función compuesta* $g \circ f$ está definida siempre y cuando $\mathrm{Rec}(f) \subseteq C$, y se define:
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)), \text{ para todo } x \in A$$

1.2. Funciones reales

Una función real en una variable x es una función $f : A \to IR$ donde $A \subseteq IR$, que usualmente se define por una fórmula $y = f(x)$.

Nota. En general, para definir una función real se usan las letras x e y para representar las variables independiente y dependiente, respectivamente. En modelos de aplicaciones se usan letras relacionadas con el nombre de las magnitudes involucradas en el problema.

Representaciones de una función real

Una función real, en general, puede ser representada de distintas maneras:

- Mediante un *conjunto de pares ordenados*, o tabla de valores.
- Mediante una *expresión verbal*, donde se describe una regla con una descripción en palabras.
- Mediante una *expresión algebraica*, con una fórmula explícita.
- Mediante una *gráfica*, representada en un sistema de coordenadas cartesianas.

Estas cuatro formas de representar una función son equivalentes, sin embargo no siempre es posible el paso de una a otra.

Ejemplo 1
Sea $y=f(x)$ la función real definida por $f(x)=\sqrt{x(5-x)}$. Aplicando la fórmula, se puede calcular por ejemplo la imagen de 2,; se puede determinar una preimagen de un número real, si es que existe, etc. Notar que esta función puede ser considerada como una función compuesta entre las funciones $y=g(x)=x(x-5)$ e $y=h(x)=\sqrt{x}$.

Ejemplo 2.
Un gerente de una empresa estima que las utilidades de ésta dependen fundamentalmente del salario del conserje, según la relación:

$$u(s)=\frac{100s-5s^2}{1+s}$$

donde s es el *salario anual del conserje en unidades de cien mil pesos, y u(s) es la utilidad, en la misma unidad monetaria*. Esta función relaciona el salario del conserje y las ganancias de la empresa.

Ejemplo 3.
La tabla siguiente muestra el gasto (aproximado) en investigación en agricultura entre 1976-1996 realizado por el sector público.

Año t	6 (1976)	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26 (1996)
Gasto E(t) (billones de dólares)	\$2.5	3.0	3.0	3.1	3.0	3.1	3.2	3.3	3.4	3.3	3.1

donde E(t) es el gasto en el año *t*. De la tabla se puede extraer la información, que en el año 1980 el gasto fue aproximadamente $E(10)$=3.0 billones de dólares. También se puede determinar que $E(12)$-$E(10)$ = 0.1. ¿Qué indica éste valor?.

Observaciones. Sea *f* una función real definida mediante la fórmula o ecuación $y = f(x)$.

- La variable *x* es la *variable independiente*, y la variable y es la *variable dependiente*. Así, una función real, es una función de variable y valor real.

- El **dominio** de una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable independiente.
  El **recorrido** una función es el conjunto de valores que puede tomar la variable dependiente.

- **Regla del máximo dominio:** cuando no se presenta el dominio de *f* explícitamente, se considera como su dominio, el máximo subconjunto de *IR*, donde la fórmula puede evaluarse. Este conjunto es llamado el *dominio de definición* de *f*, o simplemente, el dominio de *f*.
  Por ejemplo, el *dominio* de la función $f(x) = \sqrt{x(5-x)}$ es el intervalo [0, 5].

- En aplicaciones específicas, el dominio de una función está restringido por las condiciones de un problema. Es usual llamar *dominio práctico* al conjunto de valores que puede tomar la variable independiente para que el problema específico tenga sentido.

Álgebra de funciones reales

Dos funciones reales *f* y *g* pueden combinarse para formar nuevas funciones: suma, diferencia, producto y cuociente:

Suma:	$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$	$Dom(f+g) = Dom(f) \bigcap Dom(g)$
Diferencia:	$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$	$Dom(f-g) = Dom(f) \bigcap Dom(g)$
Producto:	$(fg)(x) = f(x)g(x)$	$Dom(fg) = Dom(f) \bigcap Dom(g)$
Cuociente:	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$	$Dom\left(\frac{f}{g}\right) = \left(Dom(f) \bigcap Dom(g)\right) - \{x / g(x) \neq 0\}$

1.3. Gráfica de una función

Las gráficas permiten obtener una representación visual de una función. Éstas entregan información que puede no ser tan evidente a partir de descripciones verbales o algebraicas.

Para representar gráficamente una función $y = f(x)$, es común utilizar un sistema de coordenadas rectangulares o cartesianas, en las cuales, la variable independiente x se representa en el eje horizontal, y la variable dependiente y en el eje vertical.

La **gráfica** de $y = f(x)$ es el conjunto: $f = \{(x, f(x)) / x \in Dom(f)\}$.

Técnicas básicas para esbozar la gráfica de una función

A continuación se describen algunos pasos a seguir para obtener un esbozo de la gráfica de $y=f(x)$, por medio de la representación de puntos:

1) Determinar los puntos de intersección de $y=f(x)$ con cada eje coordenado.
2) Construir una tabla de valores de f. Escoger un grupo representativo de valores de x en el dominio de f, y construir una tabla de valores $(x,f(x))$.
3) Representar los puntos $(x,f(x))$ considerados en la tabla, en el sistema de coordenadas.
4) Unir los puntos representados por medio de una curva suave.

Nota. Muchas curvas diferentes pasan a través de los puntos considerados en la tabla de valores. Para aproximarse mejor a la curva que represente a la función dada, graficar nuevos puntos.

1.4. Propiedades de las funciones

Funciones inyectivas

Una función f es **inyectiva**, si y sólo si, para todo a, b en el dominio de f, si $f(a)=f(b)$ entonces $a=b$.

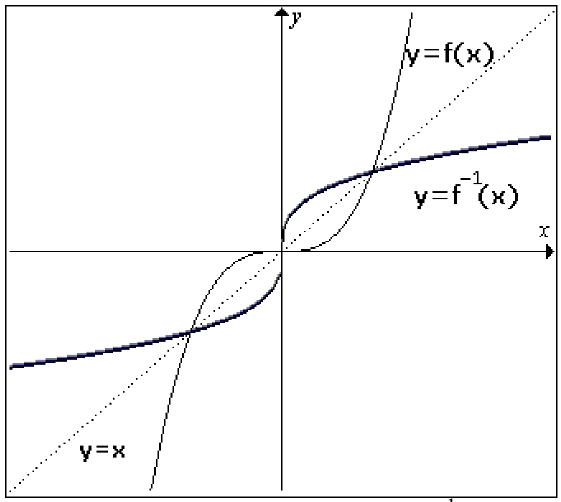
Funciones invertibles

Una función $y = f(x)$ inyectiva admite una **función inversa**, que se denota f^{-1}, donde el dominio de esta función es el recorrido de f. La inversa de f se define:

$$f^{-1}(x) = y \quad \Leftrightarrow \quad f(y) = x$$

Nota. La gráfica de la función inversa es una curva simétrica de la gráfica de *f* respecto de la recta $y=x$.

Por ejemplo, en la figura se muestran las gráficas de *f* y de su inversa:



Gráficas de $y=f(x)$, y de $y=f^{-1}(x)$

Otras propiedades, de las funciones reales

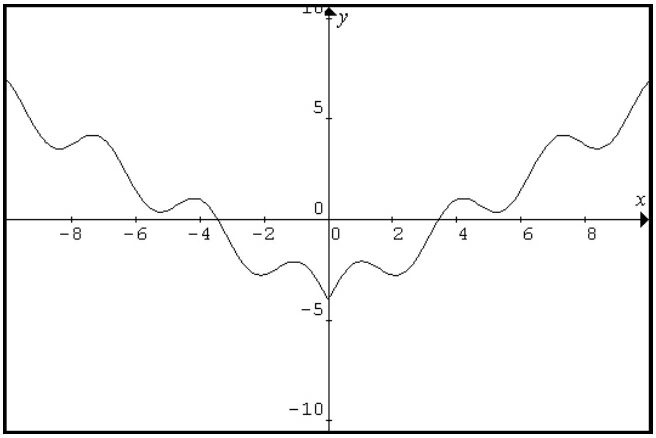
Funciones pares e impares

- Una función f es una **función par** cuando cumple $f(-x)=f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$.

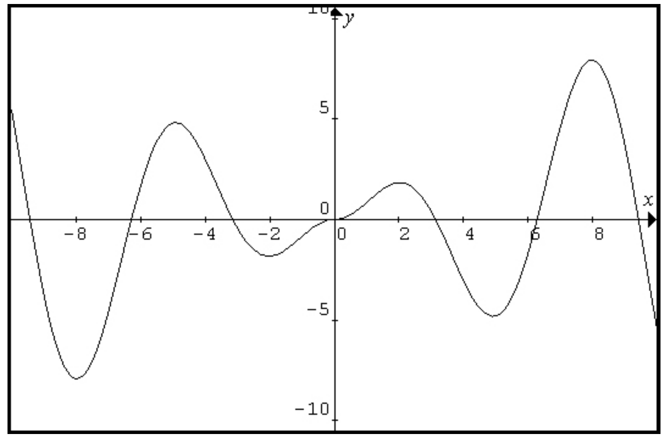
  Nota. f es *par* si y sólo si, la gráfica de f es simétrica respecto del eje Y.

- Una función f es **impar** si cumple $f(-x)=-f(x)$, para todo $x \in Dom(f)$.

  Nota. f es *impar* si y sólo si, la gráfica de f es simétrica respecto del origen.



Función par

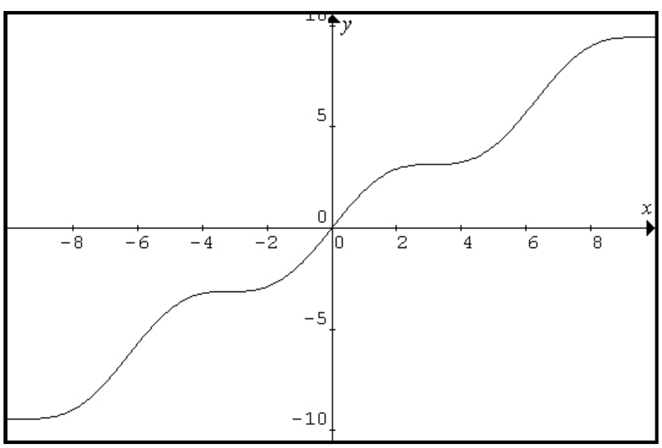


Función impar

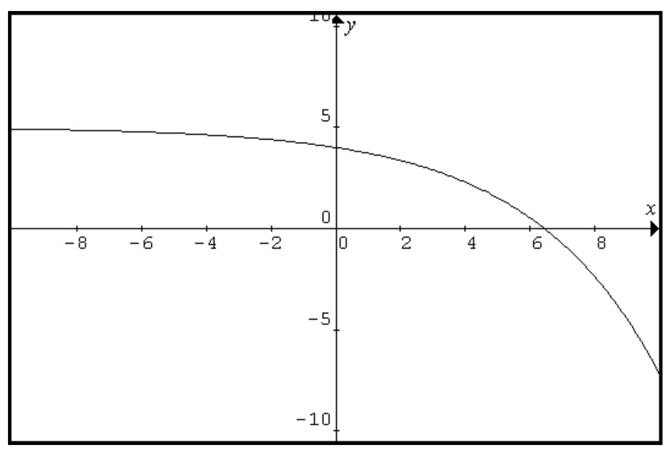
Funciones crecientes y funciones decrecientes

- Una función f es **creciente** en un intervalo I cuando, para todo $a, b \in I$:
$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) < f(b)$$
es decir, cuando su gráfica *sube* de izquierda a derecha.

- Una función f es **decreciente** en un intervalo I cuando, para todo $a, b \in I$:
$$a < b \quad \Rightarrow \quad f(a) > f(b)$$
es decir, cuando su gráfica *baja* de izquierda a derecha.



Función creciente



Función decreciente

Nota. Sea $y=f(x)$ una función real.

1) Si $f'(x)>0$ para todos los valores de x en un intervalo I, entonces la función es *creciente* sobre I.
2) Si $f'(x)<0$ para todos los valores de x en un intervalo I, entonces la función es *decreciente* sobre I.

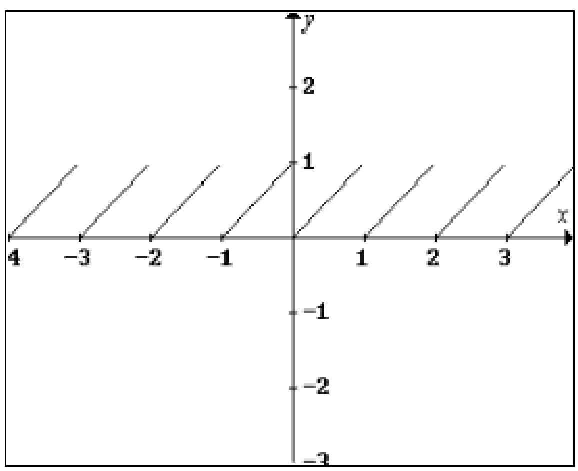
Funciones periódicas

Una función real f es **periódica** cuando existe un número real $t \neq 0$ tal que para todo $x \in Dom(f)$ se tiene:

a) $x+t \in Dom(f)$
b) $f(x+t) = f(x)$

El menor número real positivo t, cuando existe, se denomina **el período** de f, y en este caso se dice que f es una función periódica con período t.

Por ejemplo, la función $f: IR \to IR$ definida por $f(x) = x - [x]$ (= x menos la parte entera de x) es una *función periódica* de *período* 1, cuya gráfica es:



Función periódica $f(x) = x - [x]$

Funciones acotadas

- Una función f es **acotada superiormente** cuando existe un número real m tal que $f(x) \leq m$ para todo $x \in Dom(f)$

- Una función f es **acotada inferiormente** cuando existe un número real m tal que $f(x) \geq m$ para todo $x \in Dom(f)$

- Una función f es **acotada** cuando existe un número real positivo M tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in Dom(f)$

Funciones continuas

- Una función f es **continua** en $x=a$, si y sólo si:

  a) Existe $f(a)$ b) Existe $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x)$ c) $\lim\limits_{x \mapsto a} f(x) = f(a)$

- Una función f es **continua** cuando es continua en todo x perteneciente al dominio de f.

Intuitivamente, una función es *continua* cuando pequeños cambios de x ocasionan variaciones pequeñas de y, es decir, la gráfica que la representa *no se rompe*.

1.5. Relación entre los gráficos de una función y sus funciones relacionadas

Se denominan funciones relacionadas con una función dada *y*=*f*(*x*) a las siguientes funciones:

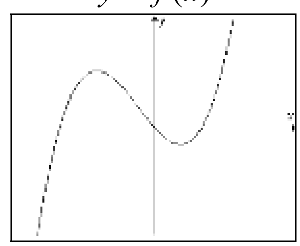
$g_1(x) = f(x) + K$,	$g_2(x) = f(x) - K$,	$g_3(x) = f(x+K)$,
$g_4(x) = f(x-K)$,	$g_5(x) = -f(x)$,	$g_6(x) = f(-x)$
$g_7(x) = af(x)$,	$g_8(x) = f(ax)$,	$g_9(x) = \lvert f(x) \rvert$

donde $K > 0$ y *a* es un número real no nulo.

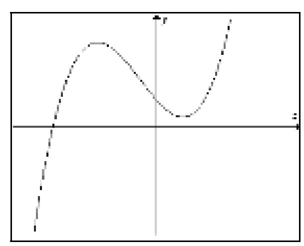
Existen procedimientos para obtener de manera fácil y rápida los gráficos de las funciones relacionadas, a partir del conocimiento del gráfico de *y*=*f*(*x*).

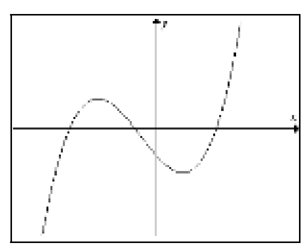
La manera de proceder se indica en la siguiente tabla, que se ilustra con un ejemplo:

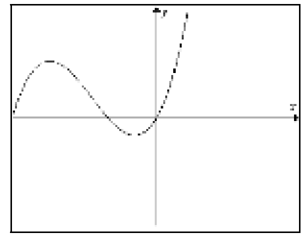
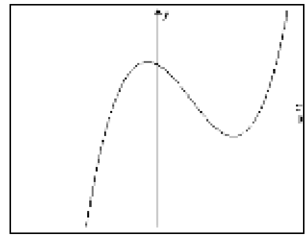
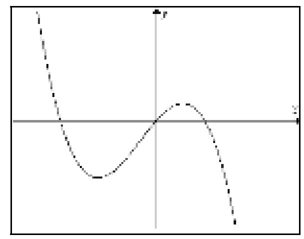
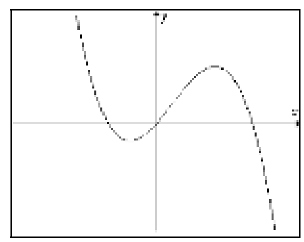
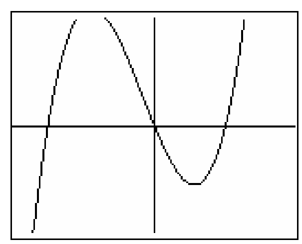
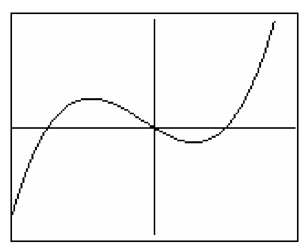
$y = f(x)$



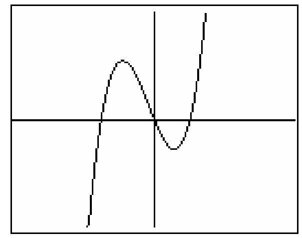
Definición de la función *g*	**Operación a realizar a la gráfica de *f*, para obtener la gráfica de *g***
$g_1(x) = f(x) + K$	Traslación vertical: Hacia arriba, *K* unidades
$g_2(x) = f(x) - K$	Traslación vertical: Desplazar hacia abajo, *K* unidades

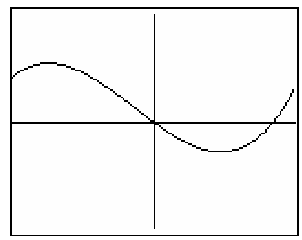


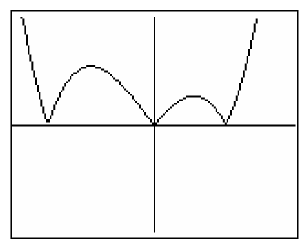


$g_3(x) = f(x+K)$	Traslación horizontal: Desplazar a la izquierda, K unidades	
$g_4(x) = f(x-K)$	Traslación horizontal: Desplazar a la derecha, K unidades	
$g_5(x) = -f(x)$	Dibujar la curva, simétrica con respecto al eje X.	
$g_6(x) = f(-x)$	Dibujar la curva simétrica con respecto al eje Y.	
$g_7(x) = af(x)$, $a > 0$	a>1: estirar la curva verticalmente en un factor a.	
	0<a<1: contraer la curva verticalmente en un factor a.	

$g_7(x) = af(x)$, $a < 0$	Las mismas operaciones del caso anterior, agregando una reflexión con respecto al eje *X*.
$g_8(x) = f(ax)$, $a > 0$	*a*>1: contraerla horizontalmente en un factor *a*. 0<*a*<1: estirarla horizontalmente en un factor *a*
$g_8(x) = f(ax)$, $a < 0$	Las mismas operaciones del caso anterior, agregando una reflexión en torno al eje Y.
$g_9(x) = \lvert f(x) \rvert$	La parte no negativa queda igual, y la parte negativa se refleja en torno al eje *X*.







1.6. Funciones reales especiales

1.6.1. Funciones polinomiales

Las funciones polinomiales y su representación gráfica, tienen gran importancia en la Matemática. Estas funciones son modelos que describen relaciones entre dos variables que intervienen en diversos problemas y/o fenómenos que provienen del mundo real.

Una función polinomial f es una función de la forma:

$$f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$$

donde n es un entero no negativo, y los coeficientes $a_n, \ldots, a_1, a_0$ son números reales.

Ejemplos de funciones polinomiales:

$f(x) = 5$ $\quad$ $f(x) = 4x + 1$ $\quad$ $f(x) = -x^2 + 3x - 1$

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 5$ $\quad$ $f(x) = 0.3x^4 + x + 3$

Alguna propiedades de las funciones polinomiales

1. La gráfica de $y = f(x)$ intercepta al eje Y en el punto $(0,c)$

2. La gráfica de $y = f(x)$ intercepta al eje X en los puntos cuyas abscisas son las raíces de la ecuación $a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$

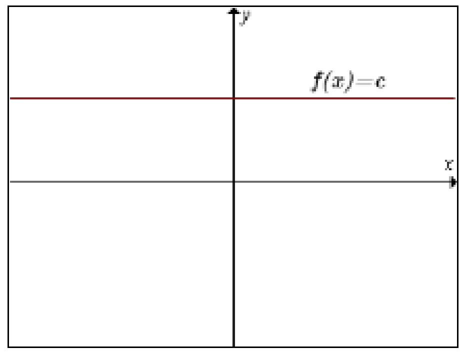
3. Las funciones polinomiales son funciones continuas.

Entre las funciones polinomiales se encuentran por ejemplo: las funciones constantes, las funciones lineales, las funciones cuadráticas, las funciones cúbicas, cuyas principales características se describirán a continuación.

a) Función constante

Una *función constante* es aquella que tiene la forma $y=f(x)=c$, donde c es un número real fijo.

El *dominio* de una *función* constante es *IR*, y su *recorrido* es $\{c\}$. Su gráfica es una recta paralela (o coincidente) al eje *X*.



b) Función lineal

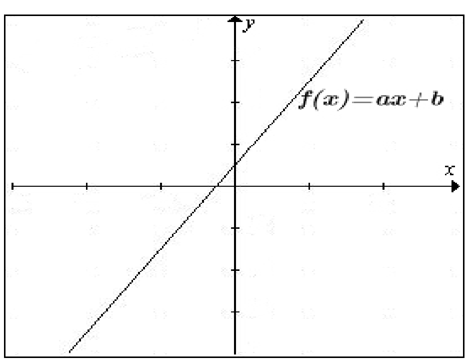
Una función lineal es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma:

$$y = f(x) = ax + b, \text{ con } a \neq 0, \ a, b \in IR$$

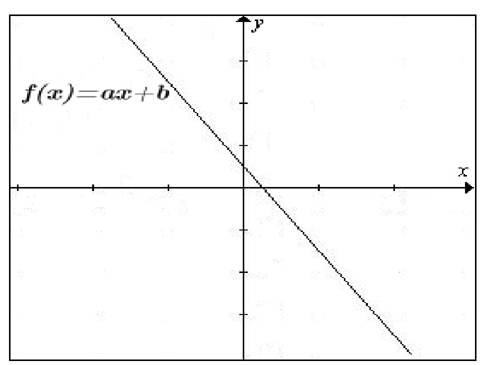
Propiedades

1. El gráfico de una función lineal es siempre una línea recta.
2. El coeficiente *a* es la pendiente de la recta $y=ax+b$.

   Cuando $a>0$, la función lineal es *creciente,* y cuando $a<0$, la función lineal es *decreciente*.



Gráfica de $y = ax + b, \ a > 0$



Gráfica de $y = ax + b, \ a < 0$

3. El dominio y el recorrido de una función lineal es *IR*.

4. La función lineal $y = f(x) = ax + b$, con $a \neq 0$ es inyectiva (y sobre), por lo tanto, tiene inversa. Su inversa es también una función lineal: $f^{-1}(x) = \frac{1}{a}x - \frac{b}{a}$.

Observación. *Ecuación general de la recta*

La ecuación general de una recta es $Ax+By+C=0$ con $A \neq 0$ o $B \neq 0$.

- Cuando $B=0$, la gráfica es una recta paralela al eje Y o coincidente con este eje.
- Cuando $B \neq 0$, la gráfica es una recta que tiene pendiente igual a $m = -\frac{A}{B}$.

c) Función cuadrática

Una función cuadrática es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c,\ \text{con } a \neq 0,\ a,b,c \in IR$$

Propiedades de una función cuadrática

1. El gráfico de una función cuadrática es una *parábola*.

2. La gráfica de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje *Y* en el punto (0,*c*)

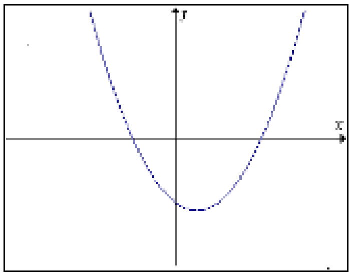
   La gráfica de $y = f(x) = ax^2 + bx + c$ intercepta al eje *X* cuando $\Delta = b^2 - 4ac \geq 0$, y en tal caso, las abscisas de los puntos de intersección son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$.

3. Su gráfica es una parábola cuyo vértice es el punto $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$.

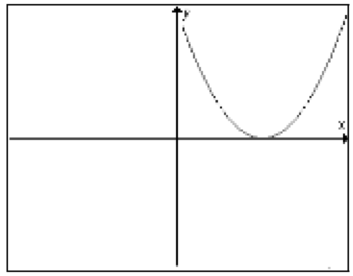
4. La recta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ es una recta eje de simetría de su gráfico.

5. Si $a>0$ la parábola se abre hacia arriba, y si $a<0$ se abre hacia abajo.

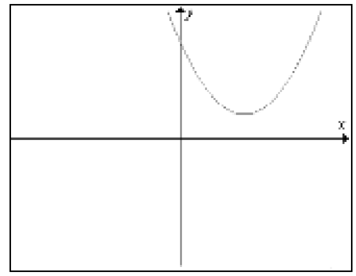
Gráfica de una función cuadrática $y = f(x) = ax^2 + bx + c$



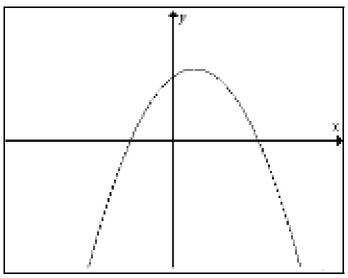
$a > 0$, $\Delta > 0$



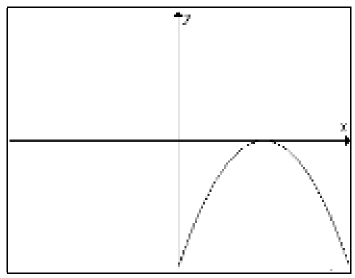
$a > 0$, $\Delta = 0$



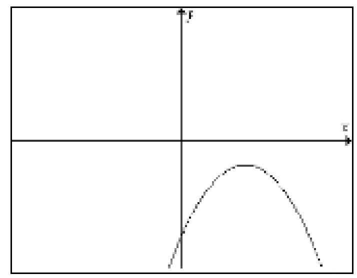
$a > 0$, $\Delta < 0$



$a < 0$, $\Delta > 0$



$a < 0$, $\Delta = 0$



$a < 0$, $\Delta < 0$

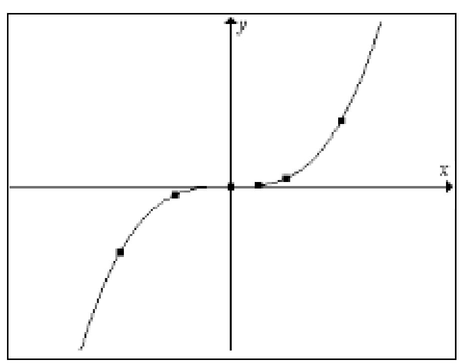
d) Función cúbica

Una función *cúbica* es aquella que tiene la forma, o puede ser llevada a la forma:

$$y = f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ , con } a \neq 0 \text{ , } a,b,c,d \in IR$$

Un ejemplo de función cúbica es la función $y = f(x) = x^3$, cuya gráfica es:

x	$f(x) = x^3$
-2	-8
-1	-1
0	0
1/2	1/8
1	1
2	8
3	27



1.6.2. Funciones definidas por tramos

En muchas ocasiones se requiere más que una sola fórmula para describir una función. Se dice que estas funciones son *funciones definidas por tramos*.

Ejemplos de funciones definidas por tramos:

a) $f(x) = \begin{cases} 1-2x & si \;\; x<1 \\ x & si \;\; x \geq 1 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2+1, & x<-1 \\ x+1, & -1 \leq x < 3 \\ 4, & x>5 \end{cases}$

El dominio de la función del ejemplo a) es *IR*; y en el ejemplo b) es $]-\infty, 3] \cup \;]5,+\infty[$.

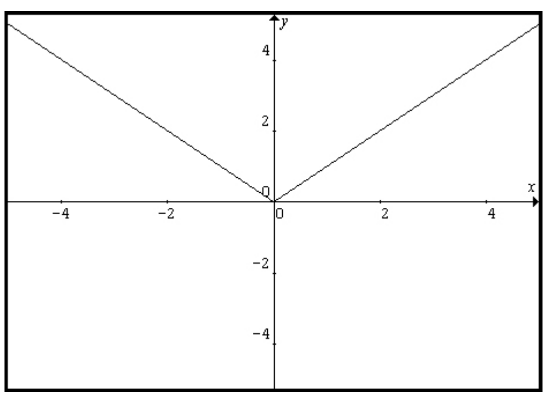
1.6.3. Función valor absoluto

La función *valor absoluto*, básica, se define: $y = f(x) = |x|$.

Propiedades

1) Su dominio es *IR*, y su recorrido es $IR^+ \cup \{0\}$.

2) La función $f(x) = |x|$ es una función par.



Gráfica de $y = f(x) = |x|$

1.6.4. Función racional

Una **función racional** f es una función definida por una expresión algebraica que es el cuociente de dos polinomios:

$$f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$$

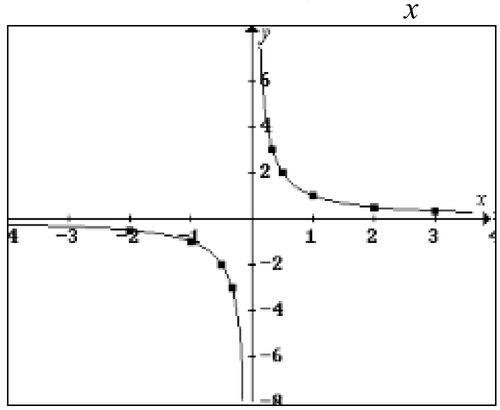
donde $p(x)$ y $q(x)$ son polinomios, tal que $q(x) \neq 0$.

Ejemplos de funciones racionales:

$f(x) = 4x + 1$ $\qquad f(x) = \dfrac{1}{x}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x+1}{x-3}$ $\qquad f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - x}$

A continuación se presenta la gráfica de la función racional $f(x) = \dfrac{1}{x}$:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$
-2	-1/2
-1	-1
-1/2	-2
-1/3	-3
0	No está definida
1/3	3
1/2	2
1	1
2	½



Trazado de la gráfica de una función racional

Para obtener un esbozo de la gráfica de $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, es necesario determinar:

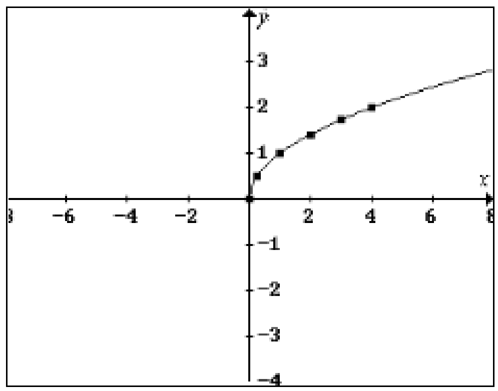
- El *dominio* de f.
- *Asíntotas verticales* (si es que las hay), y horizontales.
- Intersecciones de la gráfica de f con el eje X, si es que existen, y con el eje Y.
- Análisis de *signos* de $f(x)$.
- *Graficar* f en cada región del plano XY, determinadas por las asíntotas verticales.

1.6.5. Función raíz cuadrada

Ejemplos de funciones raíz cuadrada: la función $f(x)=\sqrt{x}$, la función $f(x)=-\sqrt{x}$, la función $f(x)=\sqrt{x+1}$, etc.

Gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x}$

x	$f(x)=\sqrt{x}$
0	0
1/4	½
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
4	2



El dominio y el recorrido de esta función es $IR^+\cup\{0\}$.

1.6.6. Proporcionalidad y funciones de potencia

Proporcionalidad

a) Una variable y es *directamente proporcional* a la variable *x*, si existe una constante *k* distinta de 0 tal que:

$$y = k\ x$$

La constante k se llama *constante de proporcionalidad.*

b) Una variable y es *inversamente proporcional* a la variable *x*, si existe una constante *k* distinta de 0 tal que:

$$y=\frac{k}{x}$$

Funciones de potencia

Se dice que una función $f(x)$ es una *función potencia* de x si $f(x)$ es proporcional a una potencia de x. Si c es la constante de proporcionalidad, y m es la potencia, entonces:

$$f(x) = c\, x^m$$

Nota. Las funciones definidas por proporcionalidad directa o inversa, son ejemplos de funciones de potencia.

Ejemplos

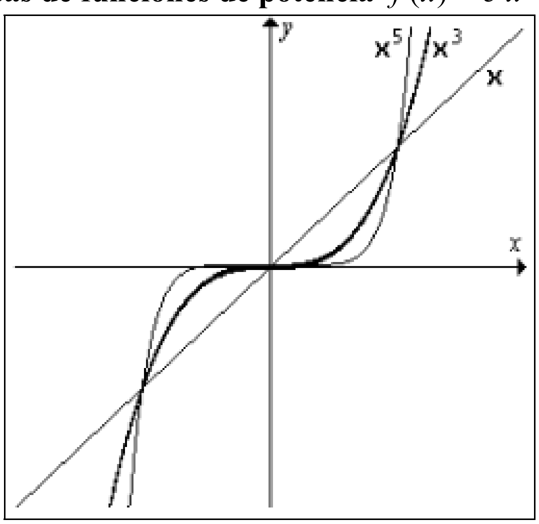
1) $y = 0.03x, \quad y = 3x^2, \quad y = 5\sqrt{x}, \quad y = \dfrac{2}{5x}, \quad y = \dfrac{5}{x^3}$ son funciones de potencia.

2) El período del péndulo T, es la cantidad de tiempo necesaria para que el péndulo realice una oscilación completa.

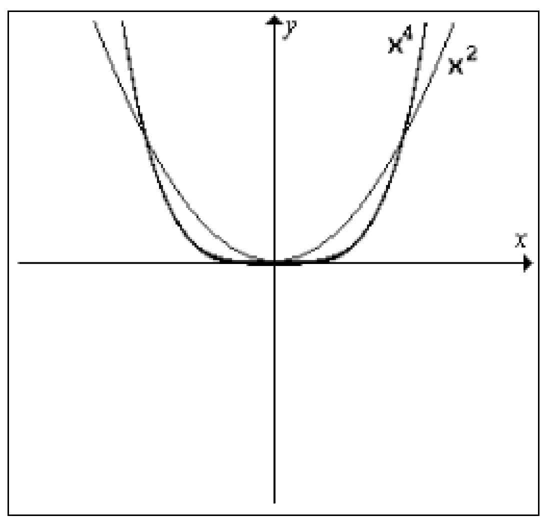
   Resultado de experimentos, se ha encontrado que para oscilaciones pequeñas, el período T es aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la longitud L del péndulo, expresado mediante la relación: $T = k\sqrt{L}$, donde k es una constante.

3) El peso w de un objeto es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia r, desde el centro de la Tierra al objeto. Luego, existe una constante k tal que: $w = \dfrac{k}{r^2}$.

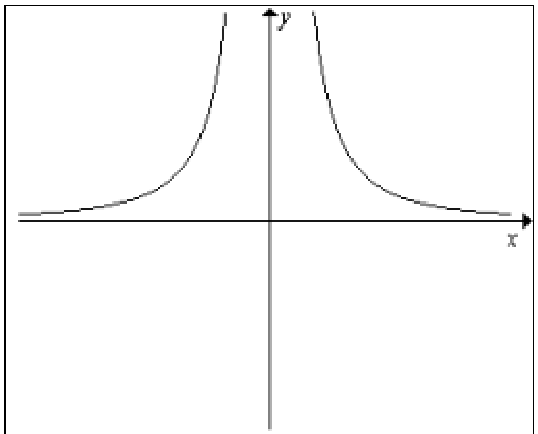
Gráficas de funciones de potencia $f(x) = c\, x^m$



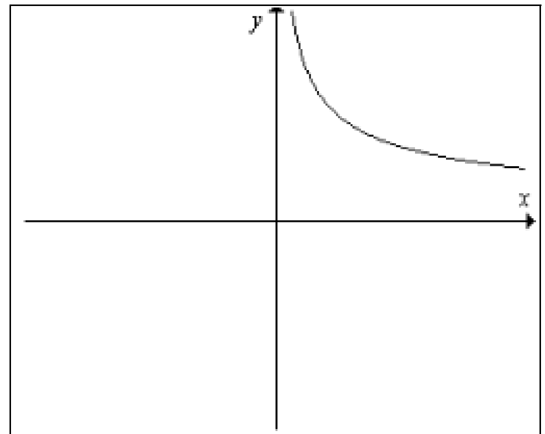
Gráficas de $y=x^m$ para m entero positivo impar



Gráficas de $y=x^m$ para m entero positivo par



Gráfica de $y=x^{-2}$



Gráfica de $y=x^{-1/2}$

Nota. La gráfica de $f(x) = c\ x^m$ está relacionada con la gráfica de $y = x^m$.

Observación. Las funciones revisadas hasta el momento son **funciones algebraicas**.