2. GRAFICA DE FUNCIONES

En vista de que el comportamiento de una función puede, en general, apreciarse muy bien en su gráfica, vamos a describir algunas técnicas con ayuda de las cuales podremos hacer un trazo rápido de las curvas pero sin recurrir (todavía) a los métodos del cálculo.

Con frecuencia la gráfica de dos funciones tienen la misma forma y orientación, la única diferencia entre ellas es que una de las dos es un desplazamiento paralelo de la otra. Cualquier desplazamiento paralelo de una gráfica a otra se llama una transformación. En esta sección discutiremos la forma en que tales transformaciones ocurren. Iniciamos con las traslaciones verticales:

Sea f una función y c un número real, la suma de $f + c$ es la función definida por $f(x)+c$. La gráfica de $f + c$ es la gráfica de f trasladada $|c|$ unidades – hacia arriba si $c > 0$ y hacia abajo si $c < 0$.

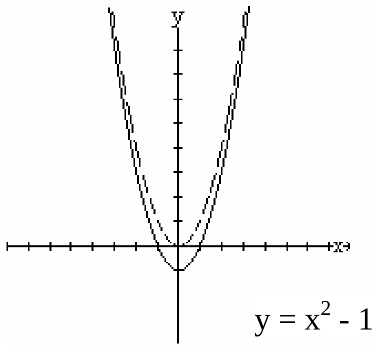
Los siguientes ejemplos tienen como propósito el ilustrar las translaciones verticales de una función.

Ejemplo 2.1

Dibuje la gráfica de $f(x) = x^2 – 1$

Solución.

La gráfica de $f(x) = x^2 – 1$ tiene la misma forma de la gráfica $f(x) = x^2$ (línea punteada) sólo que ésta gráfica fue trasladada 1 unidad hacia abajo.

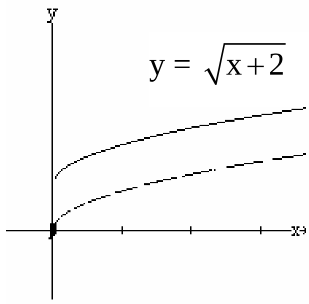


Ejemplo 2.2

Dibuje la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}+2$

Solución.

La gráfica de $f(x)=\sqrt{x}+2$ es la gráfica de $f(x)=\sqrt{x}$ trasladada 2 unidades hacia arriba.

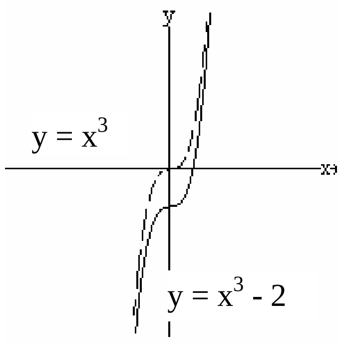


Ejemplo 2.3

Dibuje la gráfica de $f(x) = x^3 –2$.

Solución.

La gráfica de $f(x) = x^3 – 2$ es la gráfica de $f(x)= x^3$ trasladada $|-2|$ unidades hacia abajo.



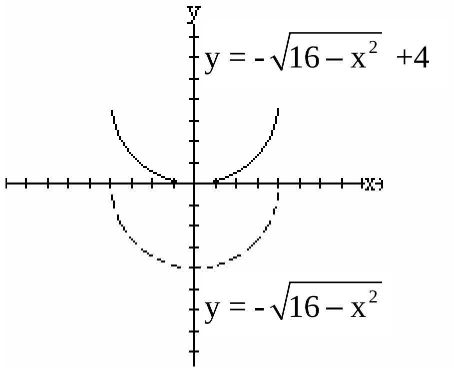
Dr. José Luis Díaz Gómez

Ejemplo 2.4

Dibuje la gráfica de $f(x) = -\sqrt{16 - x^2 + 4}$

Solución.

La gráfica de $f(x) = -\sqrt{16 - x^2 + 4}$ es la gráfica de $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$ trasladada |4| unidades hacia arriba. La gráfica de $f(x) = -\sqrt{16 - x^2}$ es una semicircunferencia de centro (0,0) y radio 4.



2.1. Translaciones Horizontales.

Si en una función f(x) la variable x se sustituye por x – c, el efecto sobre la gráfica de f(x) es trasladar la curva una distancia c paralelamente al eje x, y en la dirección positiva, porque si (m, n) son las coordenadas de un punto sobre la gráfica de y = f(x), entonces el punto (m + c, n), que resulta de trasladar (m, n,) una distancia c en la dirección de las x positivas, caerá sobre la gráfica de y = f(x – c).

Traslación horizontal

Sea f una función y c un número real, entonces la función fc definida por f(x-c) representa una translación horizontal. La gráfica de fc es la gráfica de f trasladada |c| unidades a la derecha si c > 0 y a la izquierda si c < 0

Los siguientes ejemplos tienen como objetivo el ilustrar el principio anteriormente establecido.

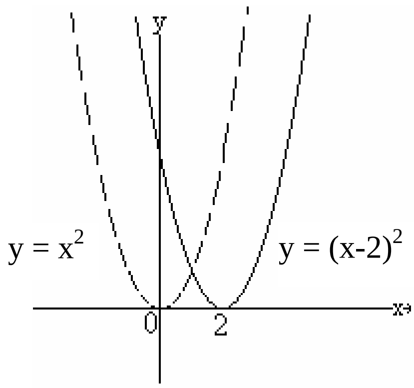
Ejemplo 2.5

Dibuje la gráfica de $f(x) = (x - 2)^2$

Solución.

De acuerdo con el principio recién establecido, puede obtenerse la gráfica de $f(x) = (x-2)^2$ trasladando $f(x) = x^2$ una distancia de |2| unidades hacia la derecha.

Esta translación se logra reemplazando x – 2 por x en $f(x) = x^2$.

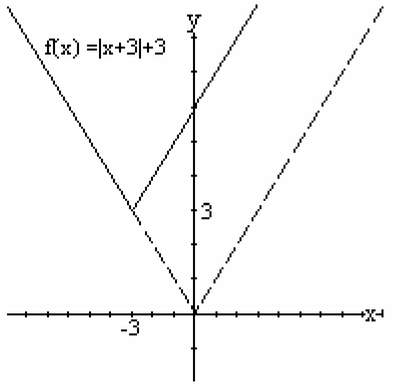


Ejemplo 2.6

Sea f(x) = |x|. Encuentre la función cuya gráfica se obtiene efectuando las siguientes transformaciones a la gráfica de f: una translación horizontal de 3 unidades hacia la izquierda y una translación vertical hacia arriba de 3 unidades.

Solución:

Para trasladar f horizontalmente 3 unidades hacia la izquierda reemplazamos en f(x) = |x| x por x + 3 y obtenemos f(x) = |x + 3|. Para efectuar la traslación vertical 3 unidades hacia arriba sumamos 3 a la última ecuación. Por lo tanto la función pedida es f(x) = |x + 3| + 3 y su gráfica es la figura mostrada.



2.2. Contracciones y Expansiones Verticales.

Una contracción vertical de una curva, en una razón dada, significa que cada punto de la curva se mueve en la dirección de las y hacia el eje x en esa razón; si la razón es 1:2, cada punto se mueve hacia el eje x hasta un nuevo punto situado a 1/2 de la distancia anterior, mientras que una razón de 1:1/2 significa una expansión en que cada punto se mueve en la dirección del eje y hasta un punto situado a una distancia 2 veces mayor.

Sea f una función y c un número real, entonces la gráfica de la función cf definida por c f(x) es:

i) Una expansión vertical si |c| > 1

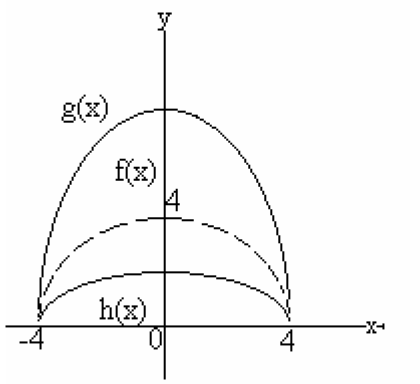
ii) Una contracción vertical si |c| < 1

iii) *Si c es negativo, además de la contracción o expansión se obtiene una reflexión sobre el eje x.*

Los siguientes ejemplos tienen como objetivo el ilustrar la definición anterior.

Ejemplo 2.7

a) La gráfica de $f(x)=\sqrt{16-x^2}$ es una semicircunferencia de centro (0,0) y radio 4. Si multiplicamos f por 2 se obtiene la función $g(x)=2\sqrt{16-x^2}$ cuya gráfica es una expansión vertical de f(x).

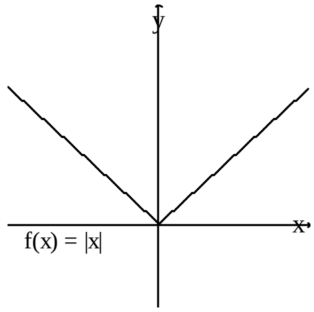


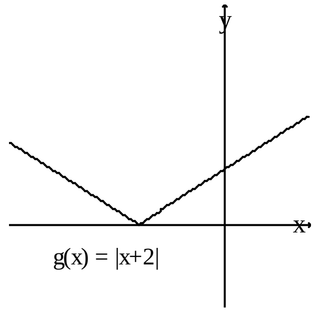
b) Si multiplicamos f por $\frac{1}{2}$ se obtiene la función $h(x)=\frac{1}{2}\sqrt{16-x^2}$ cuya gráfica es una contracción vertical de f(x). Las gráficas de f, g y h se muestran en el mismo sistema de coordenadas.

Ejemplo 2.8.

Sea f la función definida por f(x) = | x |

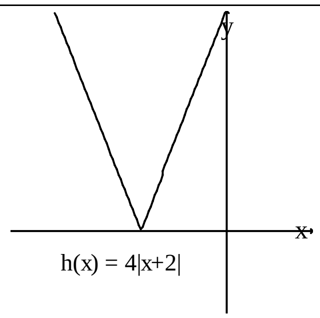
a) La gráfica de g(x) = | x + 2 | es una translación horizontal de 2 unidades hacia la izquierda de f.

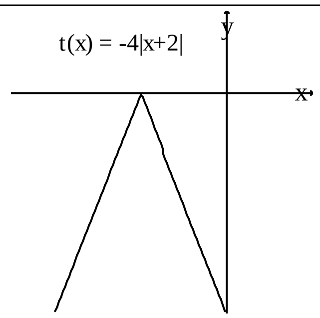




b) La gráfica de h(x) = -4| x + 2| es una expansión vertical de g.

c) La gráfica de t(x) = -4| x + 2 | es una reflexión sobre el eje x de la función h.





2.3. Contracciones y Expansiones Horizontales

Si en una función f(x) substituimos x por cx, con c > 1, el efecto es contraer la gráfica de la función en la dirección de las x, esto es hacia el eje y, en la razón 1:c. Por que si (m, n) hacia el eje y en la razón 1:c, quedará en la gráfica de la ecuación y = f(cx). El número c usado aquí puede ser menor que, igual a, o mayor que 1. Si c < 1 la razón 1: c es mayor que 1, y la contracción, por supuesto, resulta una expansión.

Sea f una función y c un número real, entonces la gráfica de la función definida por f(cx) es:

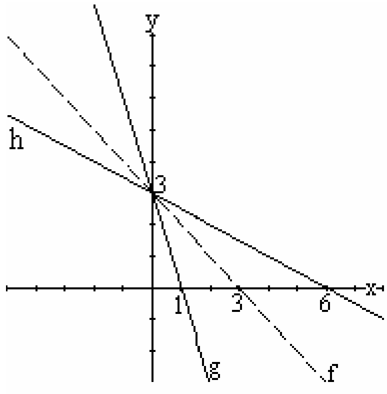
1. *Una contracción horizontal si | c | > 1*
2. *Una expansión horizontal si | c | < 1*
3. *Si c es negativo, además de la contracción o expansión se obtiene una reflexión sobre el eje y.*

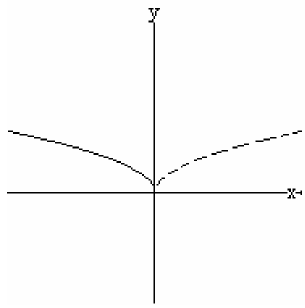
Ejemplo 2.9.

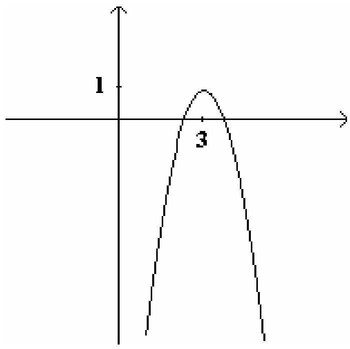
Sea f la función definida por f(x) = 3-x. La gráfica de f es una línea recta que corta los ejes en los puntos (0,3) y (3,0)

a). Si substituimos x por 3x en la función f obtenemos la función g(x) = 3 – 3x, cuya gráfica es una contracción horizontal de la función f(x) = 3 – x. Obsérvense que cada punto (m, n) de la gráfica de f se transforma en un punto de la forma (m/c, n) de g; por ejemplo el punto (3,0) de f se convierte en el punto (1,0) de g.

b) Si en f(x) = 3-x reemplazamos x por ½ x se obtiene la función h(x) = 3-x/2, cuya gráfica es una expansión horizontal de la función f(x) = 3-x.



Ejemplo 2.10 Si g(x) = $\sqrt{x}$, entonces la gráfica de g(-x) = $\sqrt{-x}$ es la gráfica de g reflejada sobre el eje y.	

Ejemplo 2.11 Grafique la función h(x)=-2x^2 +12x -17 **Solución:** Completando el "Trinomio cuadrado", f(x) se transforma en h(x) =-2(x-3)^2 +1. Obsérvese que la gráfica de f es la misma que la de la función g(x)=x^2 bajo las siguientes transformaciones. i) Una translación horizontal de 3 unidades hacia la derecha de g(x) = x^2; esto es g_1(-3) = (x-3)^2	
ii) Una expansión vertical de 2 unidades de g_1(x) = (x-3)^2; es decir g_2(x) = 3(x-3)^2 iii)Una reflexión sobre el eje x de g_2(x) = 2(x-3)^2; o sea g_3(x) = -2(x-3)^2 iv) Una translación vertical de 1 unidad hacia arriba de f(x) = -2(x-3); finalmente h(x) = -2(x-3)^2 + 1.	