FUNCIONES

1. FUNCIONES Y SUS GRAFICAS.

Una de las grandes inquietudes de los seres humanos a través de la historia ha sido la de describir los fenómenos naturales, sus cambios y las relaciones entre unos y otros. Desde hace tiempo, el hombre ha estudiado ciertos fenómenos naturales y ha expresado este conocimiento a través de fórmulas que interrelacionan las magnitudes que caracterizan a dichos fenómenos; por ejemplo:

Ejemplo 1.1. Para una cierta dosis de x centímetros cúbicos de una droga la presión sanguínea resultante P está dada por:

$$B = 0.5x^2 – 0.3x^3$$

Ejemplo 1.2. El interés sobre una inversión de $4000.00 a razón de 40% anual está dado por:

$$I = 0.40\ (4000)\ t$$

donde t es el número de años.

Ejemplo 1.3. La ley de Boyle establece que para un gas ideal a temperatura constante, si el volumen es de v unidades, la presión P es igual a:

$$P = k/v$$

siendo k un número fijo.

Ejemplo 1.4. Cuando se producen x toneladas de una cierta mercadería, el producto recibe un beneficio de $ B pesos por mes, siendo:

$$B = 1500 + 15x^2 – x^3$$

Este tipo de relaciones motivaron el origen del concepto de función.

En cada uno de los ejemplos anteriores se encuentra una variable que depende de otra; así vemos que:

en el ejemplo 1), la presión sanguínea P depende de la dosis de x

en el ejemplo 2), el interés depende del número de años t

en el ejemplo 3), la presión P del gas depende de las unidades del volumen v

en el ejemplo 4), el beneficio B depende de las x toneladas producidas.

En otros términos:

La presión sanguínea P está en función de x

El interés I está en función de t

La presión P del gas está en función de v

El beneficio B está en función de x.

Por esta razón es común llamar a x, t, v, x variables independientes y a P, I, P, B variables dependientes respectivamente.

Consideremos el ejemplo 1.2.

El interés sobre una inversión de $4000.00 a razón de 40% anual está dado por:

$$I = 0.40\ (4000)\ t$$

donde t es el número de años.

Dr. José Luis Díaz Gómez.

Calculemos el interés para distintos valores de t.

Para	t = ½ año	I = 0.40	(40 000) (1/2)	= 800
	t = 1 año	I = 0.40	(40 000) (1)	= 1600
	t = 1.5 año	I = 0.40	(40 000) (1.5)	= 2400

Siguiendo el procedimiento anterior, obtenemos la siguiente tabla:

Años t	0	1/2	1	1.5	2	3	4
Interés 1	0	800	1600	2400	3200	4800	6400

en la cual se observa que a cada valor de la variable independiente t le corresponde un único valor de la variable dependiente I. Este tipo de correspondencia es el que caracteriza a una función. Obsérvese además que tanto la variable independiente t como la variable dependiente I toma sólo valores mayores que cero, puesto que en este problema no tiene sentido hablar de tiempos e intereses con valores negativos.

El conjunto de valores posibles que puede tomar la variable independiente se llama dominio de la función y los valores correspondientes de la variable dependiente forman el conjunto de imágenes de la función o rango de la función.

Ahora daremos la definición de función:

Definición 1.1.

Una función f de un conjunto X a un conjunto Y es una regla de correspondencia que asocia a cada elemento x de X un único elemento y de Y. El elemento y se llama la imagen de x bajo f y se denota por f(x). El conjunto X se llama el dominio de la función y el conjunto Y contradominio. El rango de la función consta de todas las imágenes de los elementos de X

Ejemplo 1.5.

Objetivo: Ilustrar el concepto de función.

Ejemplo A. Representemos por y la distancia en metros que una piedra recorre al caer desde un edificio en x minutos.

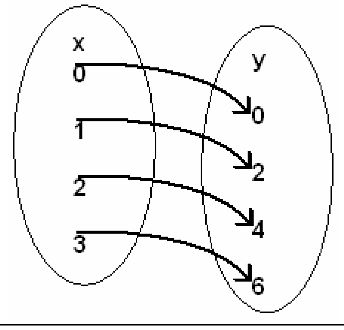
x (tiempo)	0	1	2	3
y (distancia)	0	2	4	6

Ejemplo B. Sea C = {(1,2), (1,-2), (3,6)}

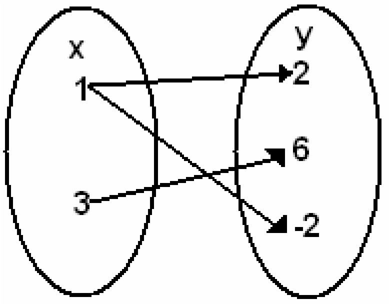
Ejemplo C. Sea D = {(1,3), (2,3), (-1,3), (-2,3)}

Verificar si en cada ejemplo se cumple la definición de función

Solución: **(A)** Puesto que a cada x (tiempo) le corresponde un único valor y (distancia), la correspondencia del ejemplo A es una función. Esta correspondencia puede expresarse usando parejas ordenas de la siguiente manera: (0,0), (1,2), (2,4), (3,6) donde cada primer elemento de la pareja representa el tiempo y cada segundo elemento una distancia, y puede representarse gráficamente utilizando

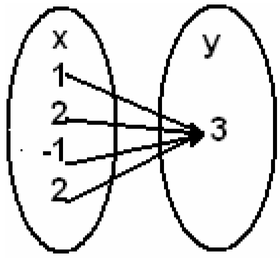


(B) El conjunto C no representa una función. Nótese que el conjunto C contiene las parejas ordenadas (1,2) y (1,-2); esto significa que al número 1 se le asocian dos números distintos 2 y –2. Por lo cual C no cumple con la definición de función.
La representación gráfica del conjunto C usando diagramas es la siguiente



(C) El conjunto D representa una función. La representación gráfica del conjunto

D = {(1,3), (2,3), (-1,3), (-2,3)} es:



1.1. Representación de una Función

Una función puede representarse de cuatro formas.

i) Por medio de una tabla

Ejemplo:

x (número de unidades)	y (costo de operación)
0	$ 50
1	$ 70
2	$ 90
3	$110
4	$130

Esta tabla es equivalente a:

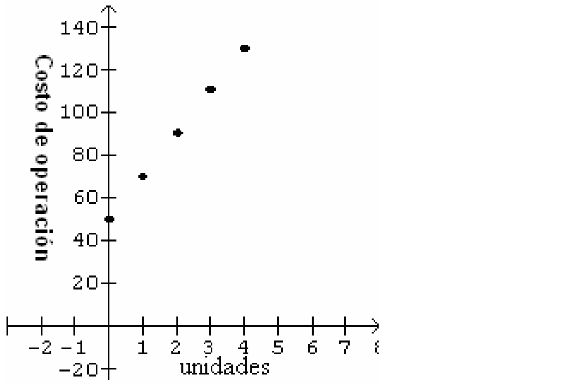
(0, 50), (1, 70), (2, 90), (3, 110), (4, 130)

ii) Por medio de una regla.

Ejemplo. Para obtener los costos de operación en el ejemplo anterior multiplique el número de unidades por $ 20 y sume al resultado $ 50.

iii) Por medio de una ecuación.

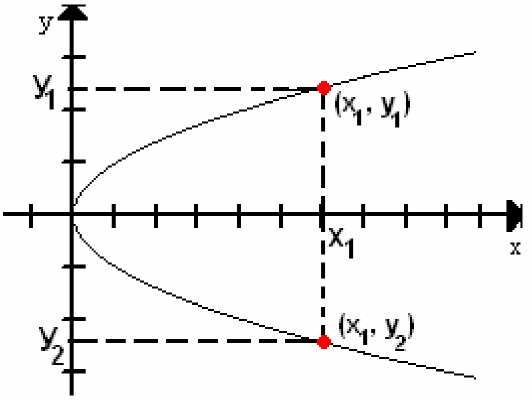
Ejemplo. Los costos de operación del ejemplo anterior están dados por la ecuación $y = 20x + 50$, donde el número de unidades es $x = 0, 1, 2, 3, 4$, y los costos de operación están representados por la variable y.

iv) Por medio de una grafica	

Cuidado. No todas las tablas, reglas, gráficas y ecuaciones representan una función.

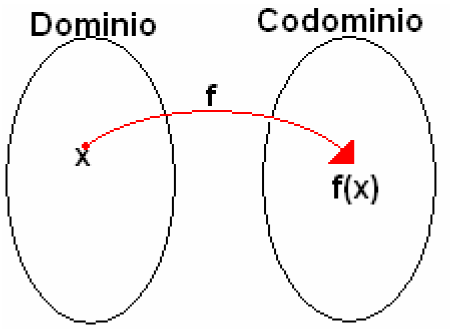
Un ejemplo de una gráfica que no representa una función es la siguiente:

Esta gráfica no representa una función, puesto que a el valor de x_1 se le asocian dos valores distintos de y: y_1, y, y_2.



En general, si al trazar una recta paralela al eje y sobre una curva, la recta corta a la curva en más de un punto, entonces la curva no representa una función.

1.2. La Notación Funcional.

Con frecuencia es necesario representar las funciones por medio de símbolo de tal modo que cuando ésta es nombrada sabemos a que función nos referimos. El símbolo más usual para representar una función es la letra f, y el símbolo f(x) se usa para representar el elemento asociado a x que se lee "f de x"; algunas veces se dice que f(x) es el valor de f en x. Gráficamente,	

No deben confundirse los símbolos f y f(x); f representa la función no está ni en el dominio x ni en el rango y. Sin embargo f(x) es un elemento de y.

Ejemplo 1.6. Objetivo. Mostrar el uso de la notación funcional:

Sea f la función definida por f(x) = 3x – 1. ¿Qué significa f (1)?

Solución.

f(1) significa usar la función f para encontrar la imagen de x =1 bajo la función f.

$$\begin{aligned} \text{en}\quad f(x) &= 3x \quad -1 \quad \text{reemplazar x por 1} \\ f(1) &= 3(1) \ -1 \\ f(1) &= 3 \quad -1 \\ f(1) &= 2 \end{aligned}$$

También "f(1) = 2" es una manera breve y precisa de decir "el valor de la función cuando x = 1 es 2".

Nótese en lo anterior que el símbolo "f(x)" únicamente reemplaza al símbolo "y" en la ecuación y = 3x – 1.

Ejemplo 1.7.

Objetivo. Utilizar la notación f para determinar ciertos valores funcionales:

Dada la función f definida por $f(x) = x^2 + 1$. Encontrar f (0), f(-2), $f\left(\sqrt{2}\right)$, $f(x_1 + \Delta x)$. Δx es una variable que representa un cambio en la variable x.

Solución

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 + 1 \\ f(0) &= (0)^2 + 1=1 \\ f(-2) &= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1 = 5 \\ f\left(\sqrt{2}\right) &= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 1 = 3 \end{aligned}$$

$$f(x_1 + \Delta x) = (x_1 + \Delta x)^2\ 1 = x_1^2 + \Delta x + \Delta x^2 + 1$$

Las funciones de mayor interés para nosotros son aquéllas cuyo dominio es un conjunto de números. En este texto, se utilizarán funciones reales de variable real, es decir el dominio de la función será el conjunto de los números reales 3 o un subconjunto de él, y el contradominio de f serán 3 o un subconjunto de él.

Si el dominio no se especifica, tomamos como dominio el conjunto más grande de números reales para el que la función esté definida.

Ejemplo 1.8

Objetivo: mostrar el método para determinar el dominio de una función cuando x es la variable independiente.

Hallar el dominio de cada función

(A)	$f(x)=\dfrac{3}{4-x}$,	(B)	$g(x)=\dfrac{2x+1}{x^2-x-6}$,	(C)	$h(x)=\sqrt{16-x}$

Solución.

(A) Como no se puede dividir por cero, ningún denominador puede igualarse a cero. Por lo tanto, el dominio de f es el conjunto de todos los números reales excluido el número 2.

$D_f = \{x|\ x \in R,\ x \neq 2\}$ o bien $D_f = 3 - \{2\}$

(B) El dominador se factoriza: $x^2 - x - 6 = (x-3)\ (x + 2)$. Este denominador es cero si x = 3 0 –2; por lo tanto, el dominio es el conjunto de todos los reales, excluidos el 3 y el –2. Es decir $D_g = \{x|x\in 3,\ x \neq -2,\ 3\}$

(C) La raíz cuadrada de un número negativo, no es un número real. Dado que 16 – x es negativo para todo x > 16, el dominio de $h(x)=\sqrt{16-x}$ es $x \le 16$ o bien $(-\infty, 16]$.

Definición 1.2

La gráfica de una función f es el conjunto de todas las parejas (x, f(x)) en un plano coordenado tales que x es un elemento en el dominio de f.

Las gráficas son muy útiles para describir el comportamiento de f(x) cuando x varía. También se puede describir la gráfica de f como el conjunto de puntos P(x, y) tales que y = f(x). Por lo tanto la gráfica de f coincide con la gráfica de la ecuación y = f(x) y si P(x, y) está sobre la gráfica de f, entonces la ordenada y es el valor de f en x. Es importante notar que, como a cada valor de x en el dominio de la función le corresponde un único valor de y, ninguna recta vertical puede interceptar la gráfica de la función en más de un punto.

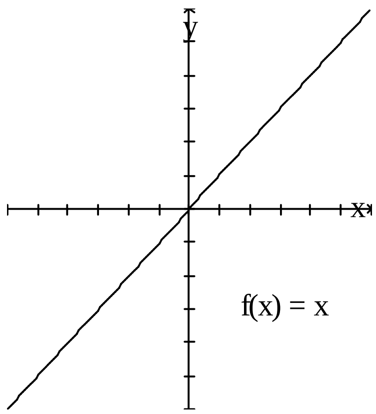
Los siguientes ejemplos tienen como objetivo el mostrar la gráfica de algunas funciones elementales.

Ejemplo 1.9. Dibuje la gráfica de f suponiendo que f(x) = x.

Solución.

En la tabla siguiente aparecen las coordenadas (x, f(x)) de algunos puntos sobre la gráfica.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3



Al trazar estos puntos, encontramos que la gráfica tiene la forma mostrada en la figura.

Ejemplo 1.10

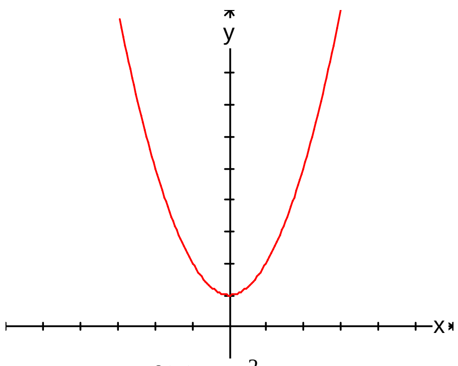
Dada la función f con dominio $\mathbb{R}$ tal que $f(x) = x^2 + 1$ para toda x en $\mathbb{R}$. Dibuje la gráfica de f.

Solución.

La gráfica de f consta de todos los puntos de la forma $(x, x^2 + 1)$. En la tabla siguiente aparecen las coordenadas (x, f(x)) de algunos puntos

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	10	5	2	1	2	5	10

Trazando estos puntos llegamos a la figura mostrada



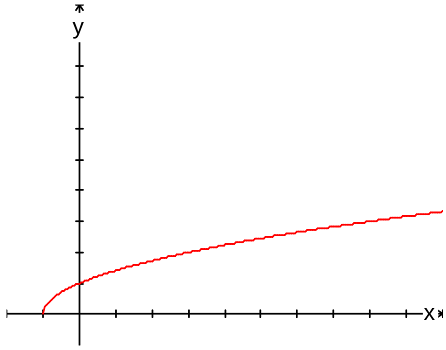
$f(x) = x^2 + 1$

Ejemplo 1.11

Dibuje la gráfica de f suponiendo que $f(x)=\sqrt{x+1}$

Solución.

Los valores de x tales que x + 1 < 0 no pertenecen al dominio de f ya que en esta caso f(x) no es un número real. En consecuencia no hay puntos de la forma (x, y) con x <-1 en la gráfica de f. En la tabla siguiente se muestran algunos puntos (x, f(x)) sobre la gráfica:



x	-1	0	3	8
f(x)	0	1	2	3

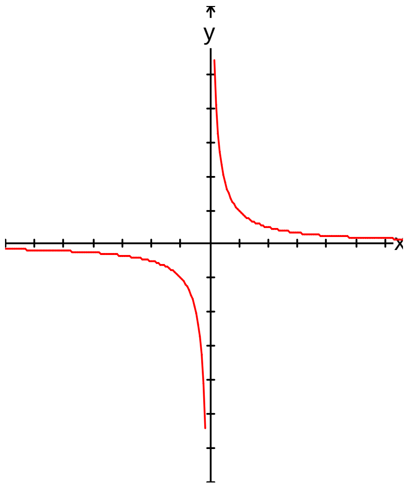
Al trazar estos puntos se obtiene la figura mostrada.

Ejemplo 1.12

Dibuje la gráfica de $f(x)=\dfrac{1}{x}$

Solución

Como no se puede dividir por cero, entonces el dominio de f es el conjunto de todos los números reales diferentes de 0. Si x > 0 entonces f(x) > 0 por tanto una parte de la gráfica se encuentra en el primer cuadrante. Si x < 0 entonces f(x) es negativo por lo tanto otra parte de la gráfica se encuentra en el III cuadrante. Si x toma valores muy cerca de cero, entonces f(x) = 1/x toma valores muy grandes en valor absoluto si x toma valores muy grandes en valor absoluto entonces f(x) = 1/x adquiere valores cercanos a cero.



$f(x)=\dfrac{1}{x}$

Utilizando las observaciones anteriores y trazando los puntos (x, f(x)) de la siguiente tabla obtenemos la figura mostrada.

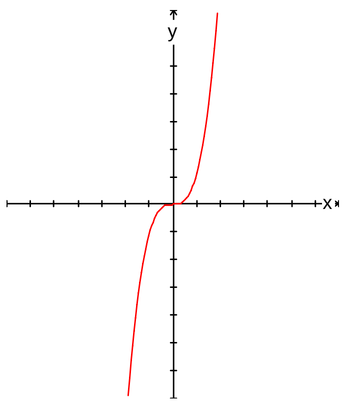
x	-6	-3	-1	-1/(	1	3.	6
f(x)	-.16	-.3	-1	-6	1	.3	.16

Ejemplo 1.1.3

Dibuje la gráfica de $f(x) = x^3$

Solución:

La gráfica de f es el conjunto de todos los puntos de la forma (x, x^3). Trazando los puntos de la tabla obtenemos la gráfica mostrada



$f(x) = x^3$

x	-2	-1	0	1	2
f(x)	-8	-1	0	1	8

Ejemplo 1.14

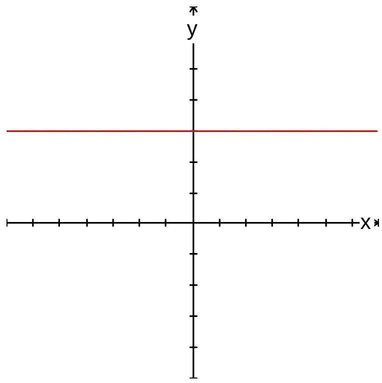
Dibuje la gráfica de f(x) = 3.

Solución.

Si f(x) = 3 entonces la gráfica de f es el conjunto de parejas (x, 3) y representan una línea horizontal.

El dominio de f es todo $\mathbb{R}$ y el rango {3}. La tabla siguiente muestra algunos puntos sobre la gráfica de f.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)	3	3	3	3	3	3	3



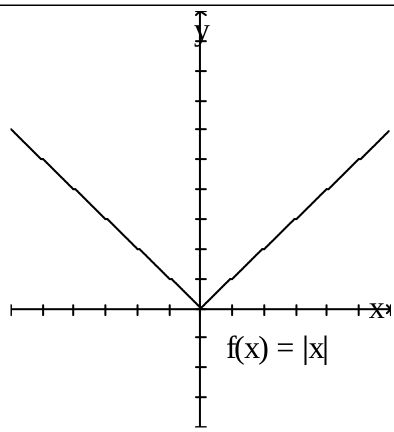
f(x) = 3

Ejemplo 1.15

Dibuje la gráfica de f(x) = |x|.

Solución.

Si x ≥ 0 entonces f(x) = x por lo tanto la parte de la gráfica a la derecha del eje coincide con la gráfica de y = x. Si x < 0 entonces f(x) = -x y por lo tanto la parte de la gráfica a la izquierda del eje coincide con la gráfica de y = -x. la gráfica es la figura mostrada.



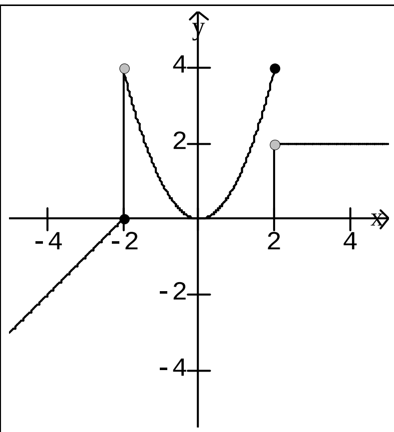
Ejemplo 1.16

Dibuje la gráfica de la función definida de la siguiente manera

$$f(x)=\begin{cases} x+2 & \text{si} \quad x \le -2 \\ x^2 & \text{si} \quad -2 < x \le 2 \\ 2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Solución.

Si x ≤ -2 entonces f(x) = x + 2. Esto significa que para x ≤ -2 la gráfica de f coincide con la gráfica de la recta y = x + 2. Si –2 < x ≤ 2 entonces f(x) = x^2, por tanto esta parte de la gráfica coincide con la gráfica de la parábola x = y^2. Si x > 2 entonces la gráfica de f es una semirrecta horizontal separada por una distancia de 2 unidades del eje x. La gráfica es la figura mostrada.



Se dice que dos funciones f y g de X a Y son iguales y se escribe f = g, siempre y cuando f(x) = g(x) para toda x en Y.

Por ejemplo sean:

$$f(x) = x,\ g_1(x) = \sqrt{x^2}, x \geq 0$$

$$f_1(x) = x,\ g_1(x) = \sqrt{x^2},\ \text{x real}$$

Puesto que $\sqrt{\ }$ representa solamente la raíz cuadrada no negativa, entonces f = g pero $f_1 \neq g_1$ Haciendo

$$f_2(x) = |x|, \text{ x real}$$

se deduce que $f_2 = g_1$

En la tabla del ejemplo 1.3 se ve que la función envía dos elementos distintos del dominio a un mismo elemento del contradominio, f (-1) = 2, f (1) = 2. Es decir, dos elementos distintos del dominio tienen la misma imagen. Si las imágenes fueran siempre diferentes, entonces a la función se le llama uno a uno.

Definición 1.3

Una función de X en Y es una función uno a uno si siempre que $x_1 \neq x_2$ en X entonces $f(x_1) \neq f(x_2)$ en Y.

Si f es uno a uno entonces cada f(x) en el rango es la imagen de exactamente un x en X. Si todo elemento del contradominio Y es imagen de algún elemento del dominio X y f es uno, a uno, se dice que hay una correspondencia uno a uno entre X y Y. Un ejemplo de la correspondencia uno a uno. Un ejemplo de la correspondencia uno a uno es la asociación de los números reales con los puntos de una recta coordenada.

Ejemplo 1.17.

Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$ con x real. Demuestre que f es uno a uno.

Solución:

Si $x_1 \neq x_2$ en $\mathbb{R}$, debemos probar que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Es decir, probar que $\sqrt{x_1+1} \neq \sqrt{x_2+1}$. Puesto que $x_1 \neq x_2$, se tiene que $x_1 + 1 \neq x_2 + 1$. De ahí $\sqrt{x_1+1} = \sqrt{x_2+1}$. Por lo tanto $f(x_1) \neq f(x_2)$.

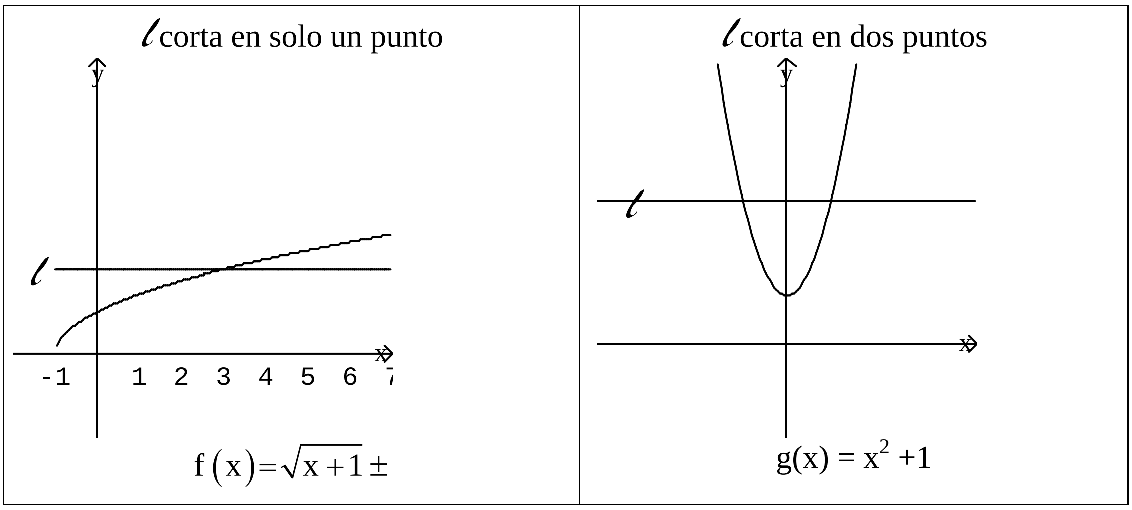
Ejemplo 1.18.

Sea $g(x) = x^2 + 1$, con x real. Demuestre que g no es uno a uno.

Solución:

La función f no es uno a uno ya que existen números diferentes en el dominio que tienen la misma imagen. Por ejemplo, aunque $-2 \neq 2$, se tiene que g (-2) = 5 = g (2).

Si observamos las gráficas de las funciones de los ejemplos anteriores vemos que en el ejemplo vemos que en el ejemplo (1.6) donde la función es uno a uno, cualquier recta horizontal corta a la gráfica de la función en un solo punto. En cambio en la gráfica de la función $g(x) = x^2 + 1$, cualquier recta horizontal, arriba del eje de las c, corta a la gráfica en dos puntos.



Definición 1.4

Una función f con dominio A se llama: I) ***par****, si f (-a) = f(a) para todo número en X, ii)* ***impar****, si f (-a) = -f(a) para toda a en X.*

Ejemplo 1.19.

Determine si i) $h(x) = x^3$, ii) $g(x) = |x|$ y iii) $k(x) = 2x + 1$ son funciones pares, impares o ninguna de las dos.

Solución.

i) Sea $a \in \mathbb{R}$, $h(-a) = (-a)^3 = a^3$. Puesto que $h(-a) = -h(a)$ entonces h es impar. Obsérvese que la gráfica de h es simétrica respecto al origen.

ii) Sea $a \in \mathbb{R}$, $g(-a) = |-a| = g(a)$. Por lo tanto g es par. Nótese que la gráfica de g es simétrica con respecto al eje y.

iii) Sea $a \in \mathbb{R}$, $k(-a) + 1 = -2^{a} + 1$. Puesto que $k(-a) \neq k(a)$ y $-k(a)$, f no es par ni impar. A continuación se muestran las gráficas de las funciones h, g y k.