Gráfica de Sistemas de desigualdades lineales en dos variables

Una ecuación lineal con dos variables *x* y *y*, es de la forma:

$$ax+by+c=0, \quad a,b \text{ ambos no iguales a cero}$$

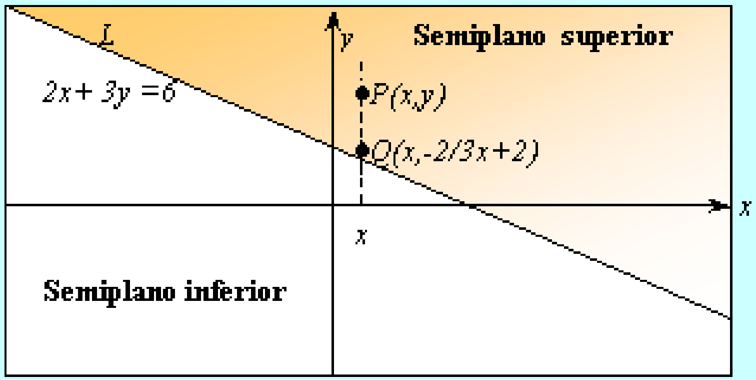
Donde tiene un *conjunto solución* que se puede exhibir en forma gráfica como los puntos de una línea recta en el plano *xy*. Ahora se mostrará que también existe una representación gráfica sencilla de las **desigualdades lineales** con dos variables:

$$ax+by+c<0 \qquad ax+by+c<0$$
$$ax+by+c>0 \qquad ax+by+c>0$$

Antes de ver un procedimiento general para graficar tales desigualdades, se analizará, un ejemplo específico. Supóngase que hay que graficar

$$2x+ 3y <6 \qquad \textbf{(1)}$$

Primero se grafica la ecuación $2x+ 3y =6$, la cual se obtiene de la desigualdad dada reemplazando la desigualdad "<" por una igualdad "=" (Fig. 1)



Obsérvese que la recta divide al plano *xy* en dos semiplano: uno superior y uno inferior. Se mostrará que el semiplano es la gráfica de la desigualdad lineal

$$2x+3y>6 \qquad \textbf{(2)}$$

mientras que el semiplano inferior es la gráfica de la desigualdad lineal

$$2x+3y<6 \qquad \textbf{(3)}$$

Para ver esto, se escriben (2) y (3) en las formas equivalentes

$$y>-2/3x+2 \qquad \textbf{(4)}$$

$$y<-2/3x+2 \qquad \textbf{(5)}$$

La ecuación de la propia recta es

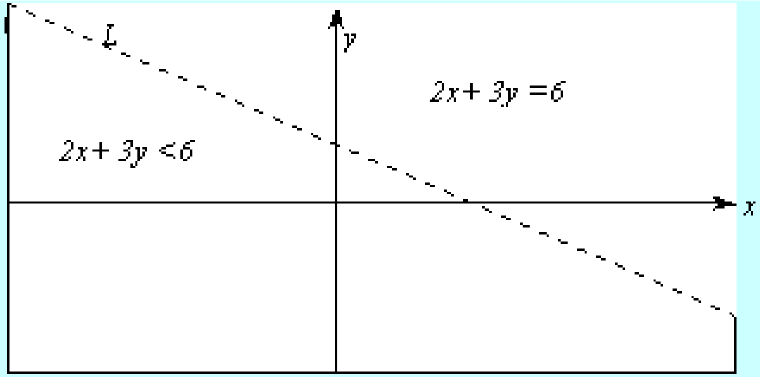
$$y=-2/3x+2 \qquad \textbf{(6)}$$

Ahora, se elige cualquier punto $P(x,y)$ que está arriba de la recta L; sea que Q el punto en L que está directamente bajo P.(fig.1). Como Q está en L sus coordenadas deben satisfacer la ecuación (6). En otras palabras, Q se representa como $Q(x,-2/3x+2)$. Al comparar las coordenadas de P y Q y recordar que P está arriba de Q, de modo que su ordenada debe ser mayor que la de Q, se tiene

$$y>-2/3x+2$$

Pero esta desigualdad es precisamente la ecuación (4) o, en forma equivalente, la ecuación (2). De manera análoga, se puede mostrar que cualquier punto que se encuentre debajo de L debe satisfacer la ecuación (5) y por lo tanto (3).

Este análisis muestra que el semiplano inferior proporciona una solución a nuestro problema (fig.2). (La línea punteada indica que los puntos en L no pertenecen al conjunto solución.). Obsérvese que los dos semiplanos en cuestión son mutuamente excluyentes; es decir, no tienen puntos en común. Debido a esto, existe un método alternativo más sencillo para determinar la solución del problema.



Para determinar el semiplano requerido, se elige *cualquier* punto en uno de los semiplanos. Para simplificar el proceso, elíjase el origen *(0,0), que está en el semiplano inferior. Al sustituir x =0 y y =0* (las coordenadas de este punto) en la desigualdad dada (1), se tiene

$$2(0)+3(0)<6$$

o 0<6, lo que es cierto. Esto dice que el semiplano requerido es el semiplano que contiene al punto de verificación; esto es, el semiplano inferior.

A continuación se verá que ocurre al elegir el punto (2,3), que está en el semiplano superior. Al sustituir *x =2* y *y =3* en la desigualdad dada se tiene

$$2(2)+3(3)<6$$

o 13<6, lo que es falso. Esto significa que el semiplano superior *no* es el semiplano requerido, como era de esperarse. Obsérvese también que ningún punto *(x,y)* que esté en la recta constituye una solución a este problema, debido a la desigualdad *estricta* “<”.

Este análisis sugiere el siguiente procedimiento para graficar una desigualdad lineal en dos variables.

Procedimiento para graficar desigualdades lineales	1. Se traza la gráfica de la ecuación obtenida de la desigualdad dada, reemplazando el signo de desigualdad con un signo de igualdad. Se utiliza una línea punteada si el problema comprende una desigualdad estricta, “<” o “>”. En caso contrario, se usa una línea sólida para indicar que la recta forma parte de la solución. 2. Se elige un punto de verificación que esté en alguno de los semiplanos determinados por la recta trazada en el paso 1 y se sustituyen los valores de *x* y *y* en la desigualdad dada. Cuando sea posible, se utilizará el origen. 3. Si se satisface la desigualdad, su gráfica incluye el semiplano que contiene al punto de verificación. En caso contrario, la solución incluye el semiplano que no lo contiene.

Gráfica de Sistemas de desigualdades lineales

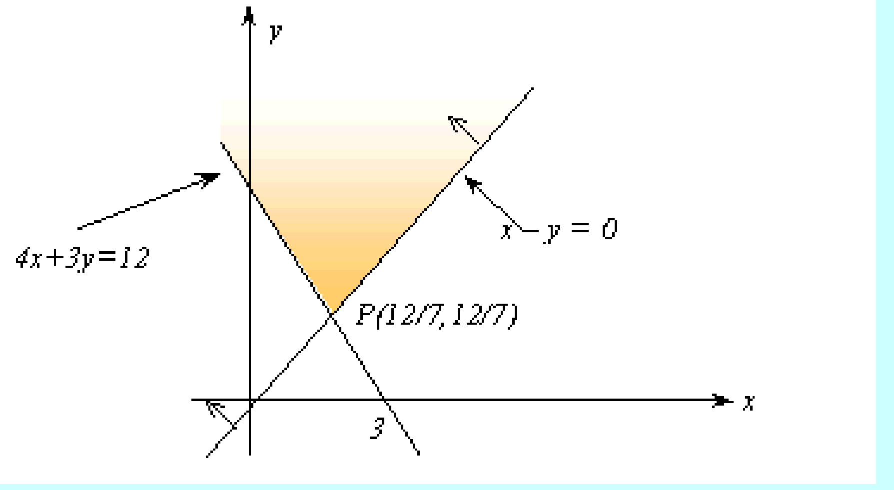
El *conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales* en los dos variables *x* y *y* es el conjunto de todos los puntos (*x,y*) que satisfacen cada desigualdad del sistema. La solución
gráfica de tal sistema se puede obtener graficando el conjunto solución para cada desigualdad de manera independiente y determinando a continuación la región común de los diversos conjuntos solución .

Determinar el Conjunto solución del sistema

$$4x + 3y > 12$$
$$x - y < 0$$

Solución: Al proceder como en los ejemplos anteriores, no tendríamos la dificultad en localizar los semiplanos determinados por cada uno de las desigualdades lineales que forman el sistema. Estos semiplanos aparecen en la figura 3. La intersección de los dos semiplanos es la región sombreada. Un punto de esta región es un elemento del conjunto solución del sistema dado. El punto P, la intersección de las dos líneas rectas determinadas por las ecuaciones, se encuentra resolviendo las ecuaciones simultáneas.

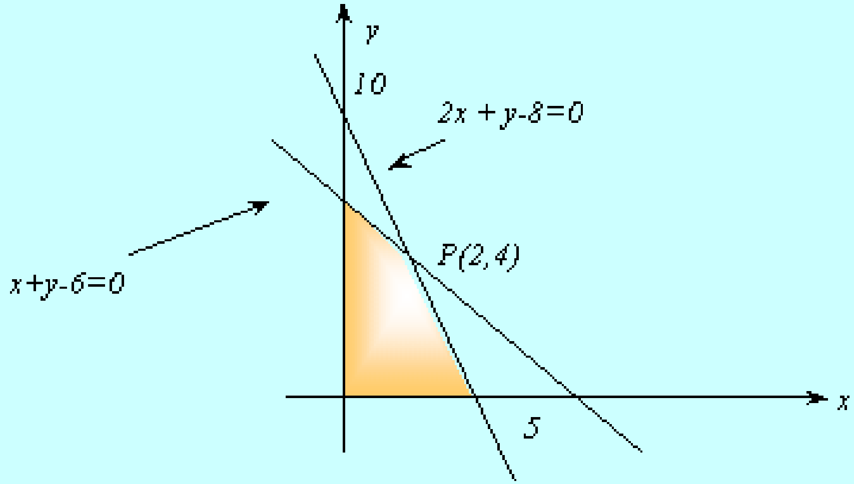
$4x + 3y = 12$
$x - y = 0$



Trazar el conjunto solución del sistema

$$x + y - 6 < 0$$
$$2x + y - 8 < 0$$
$$y > 0 \quad x > 0$$

Solución: La tercera desigualdad del sistema define el semiplano derecho (todos los puntos a la derecha del eje *y*, más todos los puntos que están sobre el propio eje *y*). La cuarta desigualdad del sistema define el semiplano superior, incluyendo el eje *x*. Los semiplanos definidos por la primera y segundad desigualdad aparecen indicados mediante flechas en la figura 4. Así la región requerida, la intersección de los cuatros semiplanos definidos mediante las cuatros desigualdades en el sistema dado de desigualdades lineales, es la región sombreada. El punto *P* se determina resolviendo las ecuaciones simultáneas $x + y - 6 = 0$ y $2x + y - 8 = 0$.



El conjunto solución que se encontró en el ejemplo 2 es un ejemplo de *conjunto acotado.* Obsérvese que el conjunto se puede encerrar en un círculo de radio 10 con centro en el origen, se verá que el conjunto está completamente dentro del círculo. Por otro lado, el conjunto solución del ejemplo 1 no se puede encerrar en un círculo y se dice que *no está acotado.*

Conjunto solución acotados y no acotados	Un conjunto solución de un sistema de desigualdades lineales está **acotado** si se puede encerrar en un círculo. En caso contrario, **no está acotado.**