Si a es negativo, entonces $|a| = -a$; por tanto

$$-a = |a| > a$$

Si $a = 0$, $0 = |0| = 0$.

Corolario 6.16. $|x| \leq a$, si y sólo si $-a \leq x \leq a$.

PROBLEMAS 6.1

1. Dése la prueba del corolario 6.5 y del teorema 6.6.
2. Pruébese que si $a < b$, $-b < -a$.
3. Dado $-5 \leq x \leq 5$; escríbase como una expresión usando el signo de valor absoluto.
4. Dado $|x| \leq 2a$; escríbase como un conjunto de desigualdades, sin el signo del valor absoluto.
5. Pruébese que: si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$, dado que a, b y c son números reales.
6. Pruébese que: si a es un número real distinto de cero, entonces $a^2 \in R^+$.

6.3 CÓMO GRAFICAR DESIGUALDADES

Las desigualdades no son funciones (¿por qué no?), pero son relaciones. De aquí que podamos encontrar subconjuntos de E^1 y E^2 que son las gráficas de tales relaciones.

Ejemplo 6.17. Graficar la desigualdad $x \leq 5$ sobre la recta real.

Solución. La gráfica de $x \leq 5$ es el conjunto de todos los puntos sobre la recta real a la izquierda e incluyendo a 5 (fig. 6.1), ya que las coordenadas de estos puntos satisfacen la desigualdad dada.

Ejemplo 6.18. Grafíquese la conjunción de las desigualdades $x \leq 2$ y $x > -3$.

Solución. La gráfica de $(x \leq 2)$ & $(x > -3)$ o $-3 < x \leq 2$ es la intersección del conjunto de puntos sobre la recta real a la izquierda de e incluyendo a 2 y el conjunto de puntos sobre la recta real a la derecha de -3, pero sin incluir a -3. Éste es el conjunto de todos los puntos sobre la recta real desde (sin incluirlo) -3 hasta 2, (fig. 6.2). Al conjunto resultante le llamamos el *intervalo* desde -3 hasta 2, abierto en su extremo inferior (abierto a la izquierda).

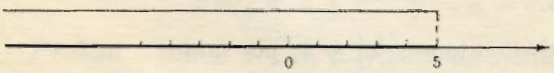

Figura 6.1

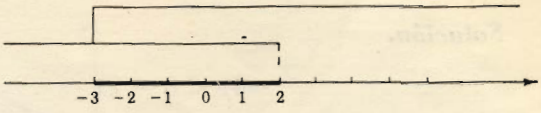

Figura 6.2

Ejemplo 6.19. Grafíquese la desigualdad $|x| < 2$ sobre la recta real.

Solución. $|x| < 2$ es lógicamente equivalente a $(x < 2)$ & $(x > -2)$, es decir, $-2 < x < 2$. (¿Por qué?) De aquí que la gráfica es el intervalo desde -2 hasta 2 sin los puntos extremos. Llamamos a este conjunto el intervalo abierto desde -2 hasta $+2$.

6.4 DESIGUALDAD LINEAL EN DOS VARIABLES

Estudiaremos ahora desigualdades lineales de la forma

$$ax + by < c$$

donde $a \neq 0 \neq b$ y a, b, y c son números reales.

Usando los teoremas sobre desigualdades, podemos escribir

$$by < c - ax$$

o para $b > 0$

$$y < \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \tag{6.1}$$

mientras que para $b < 0$

$$y > \frac{c}{b} - \frac{a}{b}x \tag{6.2}$$

El conjunto solución de 6.1 es el conjunto de pares ordenados $\langle x,y \rangle$ para los cuales $y < c/b - (a/b)x$; y para 6.2 es el conjunto de pares ordenados $\langle x,y \rangle$ para los que $y > c/b - (a/b)x$.

Ejemplo 6.20. Resuélvase la desigualdad lineal $2x + 4y < 8$.

Solución. Como 4 es positivo, obtenemos

$$4y < 8 - 2x$$

$$y < 2 - \frac{x}{2}$$

El conjunto solución, es decir, $\{\langle x,y \rangle | y < 2 - x/2\}$, contiene a $\langle 0,0 \rangle$, $\langle 0,1 \rangle$, $\langle 0,\frac{1}{2} \rangle$, etc.; para $x = 0$, $y < 2$; para $x = 2$, $y < 1$, etc.

Ejemplo 6.21. Resuélvase la desigualdad lineal $2x - 4y < 8$.

Solución.

$$-4y < 8 - 2x$$

$$y > -2 + \frac{x}{2} = \frac{x}{2} - 2$$

El conjunto solución es

$$\{\langle x,y\rangle | y > \frac{x}{2} - 2\}$$

Para graficar una desigualdad lineal sobre el plano real, necesitamos indicar el conjunto de puntos en los que el conjunto solución se mapea, es decir, cuyas coordenadas satisfacen la desigualdad. Recordamos que si a y b son dos números reales cualesquiera, $a = b$, $a < b$, o $a > b$. Sobre el plano real; por tanto, si tenemos los puntos (x,y) para los que $y = x$, los puntos (x_i,y_i) para los que $y_i < x_i$, estarán bajo la recta $y = x$ y todos los puntos (x_i,y_i) para los cuales $y_i > x_i$ estarán sobre la recta $y = x$. Usando esta idea, graficaremos una desigualdad lineal en dos variables graficando la igualdad lineal obtenida al cambiar el signo de desigualdad por un signo de igualdad. La gráfica de la desigualdad será el conjunto de puntos arriba o abajo de la recta definida por la igualdad.

Ejemplo 6.22. Grafíquese la desigualdad lineal

$$2x + 4y < 8$$

Solución. Escribimos la igualdad $2x + 4y = 8$ o $x + 2y = 4$. La gráfica de $x + 2y = 4$ es la recta cuya pendiente es $-\frac{1}{2}$ y que intersecta al eje y en $y = 2$.

La parte sombreada de la gráfica (fig. 6.3) representa el conjunto de puntos cuyas coordenadas satisfacen $2x + 4y < 8$. Este conjunto *no* incluye el de los puntos sobre la recta. Para indicar el conjunto de puntos que están sobre la recta y los que están debajo de ella, escribimos

$$2x + 4y \leq 8$$

El conjunto de puntos por encima de la recta está definido por la desigualdad $2x + 4y > 8$.

Ejemplo 6.23. Grafíquese la relación $y \leq x$.

Solución. La gráfica es la unión de las gráficas de $y = x$ y $y < x$. La gráfica de $y = x$ es el conjunto de puntos de la línea recta que pasa por el origen formando un ángulo de 45° con el eje de las x. La gráfica

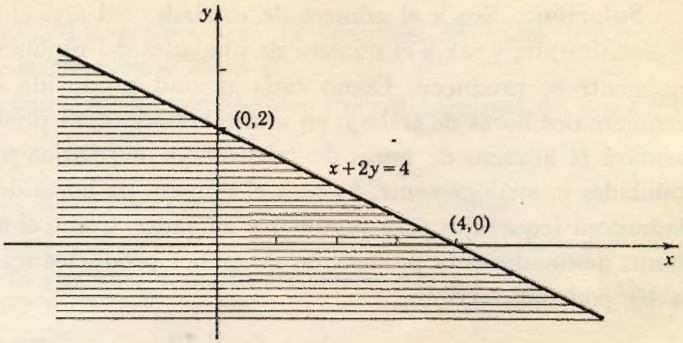

Figura 6.3

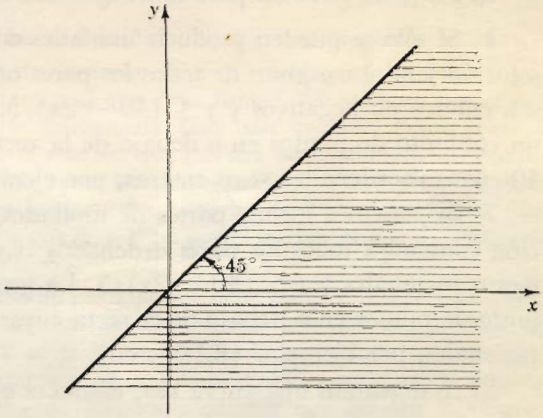

Figura 6.4

de $y < x$ es el conjunto de puntos que están situados debajo y a la derecha de la recta. En la figura 6.4 hemos sombreado la región del plano que constituye tal gráfica.

Ejemplo 6.24. Una firma fabrica dos productos, X y Y. Cada unidad del artículo X producida requiere dos horas de trabajo en una taladradora, y cada unidad del artículo Y, cinco horas de trabajo en una taladradora. La firma tiene un máximo de 40 horas de trabajo para la taladradora obtenible en la semana. Si la sola limitación en la producción semanal es la posibilidad de obtención de horas de taladradora, grafíquese la relación que muestra las combinaciones de los dos productos que la firma es capaz de producir semanalmente.

Solución. Sea x el número de unidades del artículo X producidas semanalmente, y sea y el número de unidades del producto Y que semanalmente se producen. Como cada unidad producida del artículo X requiere dos horas de trabajo en una taladradora, el producto $2x$ representará el número de horas de taladradora necesarias para producir x unidades y, análogamente, $5y$ será el número de horas de trabajo en taladradora requeridos para producir y unidades. Como el número total de horas destinadas a la producción de ambos productos no puede exceder a 40, podemos escribir

$$2x + 5y \leq 40$$

Graficamos (fig. 6.5) $2x + 5y = 40$.

El conjunto solución para la desigualdad se define como sigue:

1. Si sólo se pueden producir unidades enteras, entonces el conjunto solución será el conjunto de todos los pares ordenados $\langle x,y \rangle$, donde x y y son enteros no negativos y $y \leq (40 - 2x)/5$. La gráfica será, entonces, un conjunto de puntos en o debajo de la recta definida por $2x + 5y = 40$ cuyas coordenadas sean enteras, por ejemplo, (4,2), (8,2), etc.

2. Si podemos incluir partes de unidades, entonces el conjunto solución contendrá todos los pares ordenados $\langle x,y \rangle$ tales que x y y sean números racionales y $y \leq (40 - 2x)/5$. La gráfica será, entonces, el conjunto de puntos en o debajo de la recta cuyas coordenadas sean números racionales, por ejemplo, (8,1.5), etc.

3. Si deseamos una curva lisa, entonces el conjunto solución incluirá todos los pares ordenados $\langle x,y \rangle$ tales que x y y son números reales y

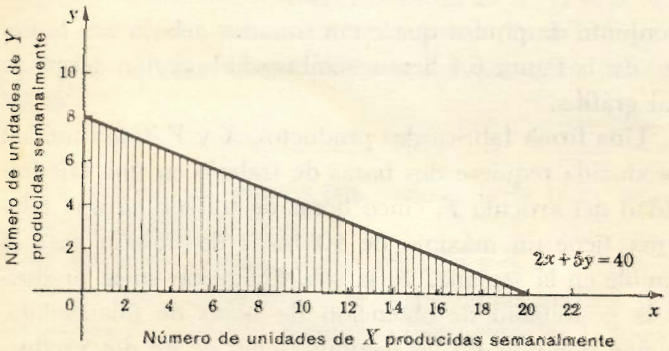

Figura 6.5

$y \leq (40 - 2x)/5$. La gráfica será el conjunto de todos los puntos en y debajo de la recta $5y + 2x = 40$.

En ningún caso podrán considerarse valores negativos de x o de y. (¿Por qué?)

PROBLEMAS 6.2

1. Resolver las siguientes desigualdades lineales para y:
   a) $2y + x > 5$
   b) $-x - y < 0$
   c) $\frac{x}{2} + \frac{y}{4} < 1$
   d) $2x - 3y < -5$
   e) $2x + 3y > 5$
2. Graficar cada una de las desigualdades lineales del problema 1.
3. Un fabricante produce dos artículos, X y Y. Solamente los vende en el establecimiento de un minorista con el que tiene firmado un contrato por el que éste se compromete a aceptarle diariamente hasta seis unidades del artículo X y hasta tres del Y. Grafíquese la relación que muestra las combinaciones posibles de los dos productos que el fabricante puede embarcar diariamente. Nos suponemos que es posible embarcar unidades fraccionarias de los dos productos. (*Sugerencia:* X no puede ser mayor que 6, y Y no puede ser mayor que 3. Indíquese esto en la gráfica.)
4. Un fabricante ha firmado un contrato que debe cumplir, a saber: al cliente A han de suministrársele diariamente dos veces tantas unidades del producto X como unidades del producto Y se le envíen, debiendo ser cuando menos seis el número total de unidades de ambos productos combinados. Grafíquese la relación que muestra las combinaciones de los dos productos que pueden legalmente embarcarse.
5. La dieta de un animal debe ser la mezcla de dos productos alimenticios X y Y. El producto X contiene cinco gramos de proteína por onza, y el producto Y tres gramos. Cada paquete de la mezcla resultante ha de contener al menos 50 gramos de proteínas. Grafíquese la relación que muestra las combinaciones de X y Y que satisfarán este requisito.

6.5 DESIGUALDADES LINEALES SIMULTÁNEAS

Al resolver desigualdades lineales simultáneas, debemos tener presente que lo que estamos buscando es la intersección de los conjuntos solución de un sistema de dos o más desigualdades. Esto puede lograrse con la máxima facilidad graficando las desigualdades y observando la intersección de sus gráficas. Si la intersección es vacía no hay soluciones simultáneas.

Ejemplo 6.25. Resuélvase, graficando, el sistema de desigualdades lineales

$$2x + 2y < 4$$
$$x - y < 0 \quad \text{es decir, } y > x\,.$$

Solución. Graficamos $2x + 2y < 4$ o $x + y < 2$, graficando $x + y = 2$, y $x - y < 0$, graficando $x = y$. Las soluciones simultáneas están en la región cuadriculada de la figura 6.6.

Ejemplo 6.26. Resuélvase el sistema de desigualdades lineales

$$x - y < 0 \quad \text{o} \quad y > x$$
$$x + y > 2$$
$$x \leq 3$$
$$y \geq 0$$

Solución. La región (fig. 6.7) limitada por líneas gruesas contiene los puntos cuyas coordenadas satisfarán las cuatro desigualdades.

Ejemplo 6.27. La producción de motores de camión y requiere dos veces más tiempo que la producción de motores de automóvil x. Una fábrica puede producir o 50 motores de automóvil o 25 motores de camión, o alguna combinación lineal de motores de camión y motores de automóvil. ¿Cuál es la ecuación de la relación de capacidad entre los dos tipos de motores? Grafíquese la relación. ¿Cuáles son el dominio y el rango? Suponiendo que no se utiliza la capacidad total, muéstrese sobre la gráfica la región que representa las posibles combinaciones de motores de automóvil y camión.

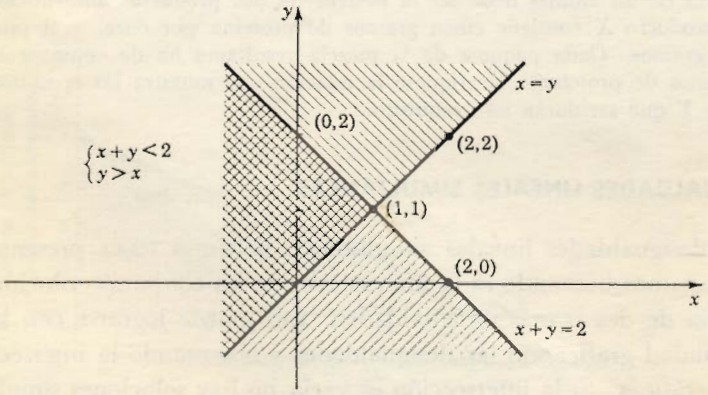

Figura 6.6

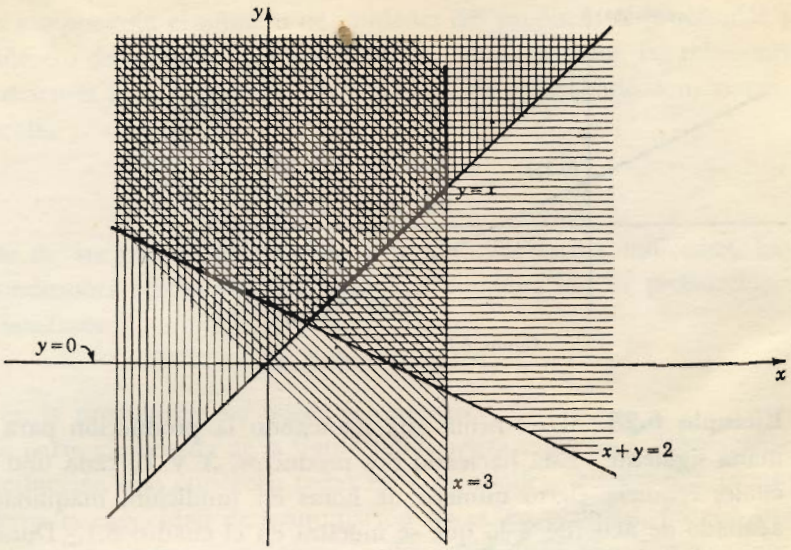

Figura 6.7

Solución. Como hemos supuesto una relación lineal, podemos conocer la ecuación en cuanto sepamos la pendiente. Conocemos dos puntos sobre la recta, a saber, el (0,25) y el (50,0). Por tanto la pendiente debe ser

$$m = \frac{25 - 0}{0 - 50} = -\frac{1}{2}$$

Tomando cualquier otro punto (x,y) en la recta, tenemos

$$-\frac{1}{2} = \frac{y - 25}{x - 0} = \frac{y - 25}{x}$$

$$-x = 2y - 50$$

$$2y = -x + 50$$

$$y = -\tfrac{1}{2}x + 25$$

El dominio es el conjunto de enteros del 0 al 50 y el rango el de los enteros del 0 al 25. No son posibles números negativos ni en el rango ni en el dominio. (¿Por qué?) La región que representa las combinaciones posibles está sombreada (fig. 6.8) y está limitada por

$$x \geq 0$$

$$y \geq 0$$

$$y \leq -\tfrac{1}{2}x + 25$$

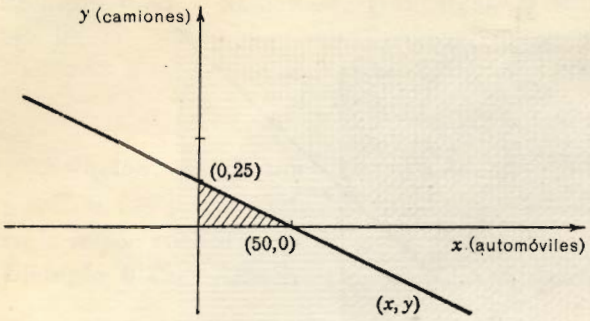

Figura 6.8

Ejemplo 6.28. Una firma está planeando la producción para la semana siguiente. Está haciendo dos productos, X y Y, cada uno de los cuales requiere cierto número de horas en fundición, maquinación y acabado de acuerdo a lo que se muestra en el cuadro 6.1. Durante la semana que se está planeando, el número de horas de que se va a disponer en cada una de las áreas en cuestión es el siguiente:

Fundición, 110
Maquinación, 150
Acabado, 60

Grafíquese el sistema de desigualdades lineales que muestra las cantidades de X y Y que pueden ser producidas.

Solución. Como los productos X y Y requieren, cada uno, seis horas de trabajo de fundición por cada unidad producida, y como hay 110 horas disponibles para tal trabajo, la cantidad total del tiempo de trabajo de fundición que se utiliza debe satisfacer la relación

$$6x + 6y \leq 110$$

CUADRO 6.1

Producto	*Horas por unidad*		
	Fundición	*Maquinación*	*Acabado*
X	6	3	4
Y	6	6	2

donde x representa el número de unidades del producto X procesadas y y el número de unidades del producto Y. Análogamente, las relaciones pertenecientes a la capacidad de maquinación y acabado son, respectivamente,

$$3x + 6y \leq 150$$
$$4x + 2y \leq 60$$

Aparte de las tres limitaciones a la producción arriba indicadas, hay dos condiciones adicionales que cualquier combinación de producciones debe satisfacer.

$$x \geq 0 \quad y \geq 0$$

Esto es, la producción no puede ser negativa.

La parte sombreada de la figura 6.9 muestra todas las combinaciones de producción que satisfacen todas las restricciones. Nótese que en este problema la capacidad de maquinación no es, en realidad, ningún tipo de restricción; es decir, cualquier combinación de producción que satisface las otras dos limitaciones satisfará también la capacidad de maquinación.

Ejemplo 6.29. El alimento para un animal ha de ser una mezcla de dos productos alimenticios, cada unidad de los cuales contiene proteína, grasas, y carbohidratos en el número de gramos que se da en el cuadro 6.2.

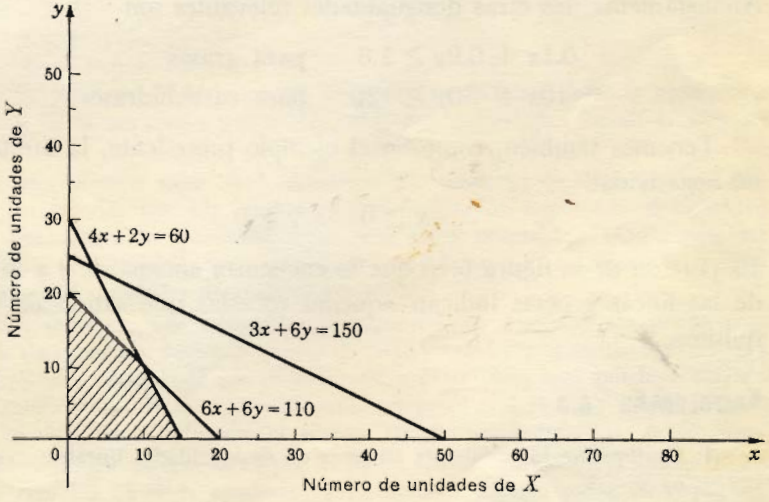

Figura 6.9

CUADRO 6.2

	Producto alimenticio	
	1	2
Proteínas	10	5
Grasas	0.1	0.9
Carbohidratos ...	10	30

Cada bolsa de la mezcla resultante tiene que contener cuando menos 40 gramos de proteínas, 1.8 gramos de grasas, y 120 gramos de carbohidratos. Grafíquese el sistema de desigualdades que muestra las mezclas que satisfacen estos requisitos.

Solución. Como cada unidad del producto alimenticio 1 contiene 10 gramos de proteínas y cada unidad del producto 2 contiene 5 gramos de proteínas, y como cada bolsa de la mezcla debe contener al menos 40 gramos de proteínas, una desigualdad que debe satisfacerse es

$$10x + 5y \geq 40$$

donde x representa el número de unidades del producto alimenticio 1 y y el número de unidades del producto alimenticio 2 en la mezcla. Análogamente, las otras desigualdades relevantes son

$$0.1x + 0.9y \geq 1.8 \quad \text{para grasas}$$
$$10x + 30y \geq 120 \quad \text{para carbohidratos}$$

Tenemos también, como en el ejemplo precedente, la limitación de no negatividad

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

La porción de la figura 6.10 que se encuentra encima de y a la derecha de las líneas gruesas indican aquellas mezclas que satisfacen estos requisitos.

PROBLEMAS 6.3

1. Grafíquense los siguientes sistemas de desigualdades lineales:
   a) $x \leq 3$
   $y \geq 0$

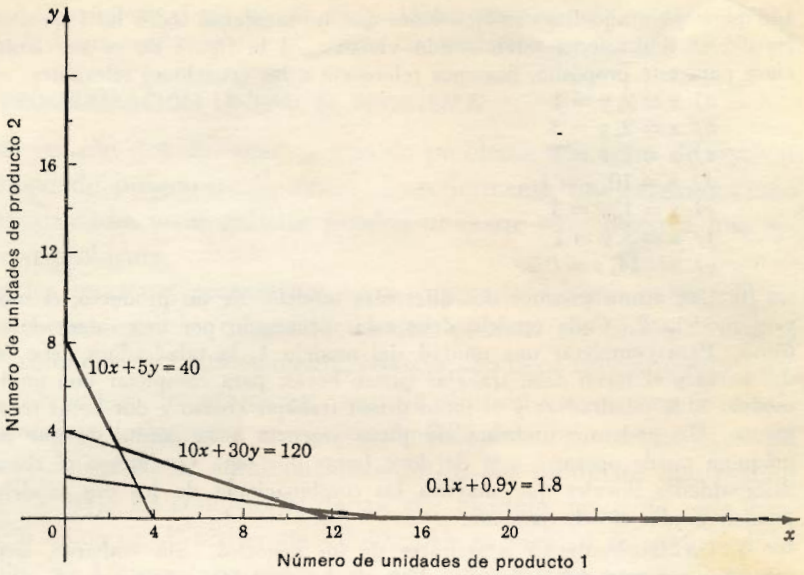

Figura 6.10

b) $x - y < 2$
$2x - y < 3$
$x - 4y < 5$

c) $x > 0$
$y > 0$
$2x + 3y > 5$

d) $x > 3$
$y < 4$
$x - y = -5$

2. En el problema 5 de la sección de problemas 5.3, exprésese la producción total posible de bienes civiles y militares como una desigualdad lineal. Grafíquese la desigualdad.

3. Si una persona debe tener al menos 900 unidades de vitaminas y 1 000 unidades de calorías por día, exprésese cada condición como una desigualdad lineal y determínese lo que constituiría una dieta aceptable. Grafíquense las desigualdades. (*Sugerencia:* sea x el número de unidades de vitaminas necesarias y y el número de unidades de calorías necesarias.)

4. Para satisfacer una limitación presupuestal, un ejecutivo no puede contratar más de cinco secretarias ni menos de siete vendedores. Escríbase un sistema de desigualdades expresando las combinaciones permisibles que puede contratar. Si debe tener cuando menos una secretaria, indíquese el dominio y el rango de la relación involucrada. Grafíquese el sistema de desigualdades.

5. Determínese directamente por la figura 6.10 (ejemplo 6.29) cuáles de las siguientes combinaciones de productos alimenticios satisfacen todos los requisitos.