NÚMEROS REALES

1. BREVE REPASO DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

En esta unidad utilizaremos las notaciones y la terminología de conjuntos. La idea de "conjunto" se emplea mucho en matemática y se trata de un concepto básico del que no daremos una definición formal.

Podemos decir que un **conjunto** es una agrupación de objetos distintos (pero con alguna característica en común), los que reciben el nombre de **elemento.** Generalmente se nombra a un conjunto con una letra mayúscula, y a un elemento de ese conjunto con una letra minúscula.

Un conjunto puede especificarse de dos maneras:

a) haciendo una lista de los elementos del conjunto (*enumeración*), en cuyo caso lo describiremos utilizando una notación de uso universal.

> **Ejemplo:**
>
> Para indicar el conjunto (que llamaremos M), formado por los números 4, 6 y 8, escribimos:
>
> $M = \{ 4, 6, 8\}$

b) estableciendo una propiedad que caracterice a los elementos del conjunto (*comprensión*).

> **Ejemplo:**
>
> Para indicar el mismo conjunto M escribimos:
>
> $M = \{x \,/\, x \text{ es un número par comprendido entre 3 y 9}\}$
>
> o bien
>
> $M = \{x \,/\, x \in N \;\wedge\; 3 < x < 9\}$

Recordar que: $/$: se lee "tal que"

$\wedge$: se lee "y"

$\in$: se lee "pertenece"

$<$: se lee "menor que"

$\vee$: se lee "o"

A menudo resulta de gran utilidad para visualizar ciertos conjuntos, representarlos mediante un recinto plano limitado por una línea cerrada, y cuando se representan los elementos del conjunto se conviene en hacerlo marcando un punto interior.

Esta representación se llama "diagrama de Venn".

Se emplea el símbolo $\in$ para indicar que un elemento específico pertenece al conjunto; y el símbolo $\notin$ para indicar que un elemento específico no es elemento de un conjunto.

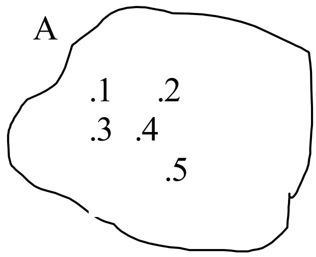
Ejemplo:

$A = \{ 1 , 2 , 3 , 4 , 5 \}$

$A = \{x / x$ es un número natural menor que $6 \}$

$A = \{x / x \in N \wedge x < 6 \}$

donde $1 \in A$; $2 \in A$; $6 \notin A$

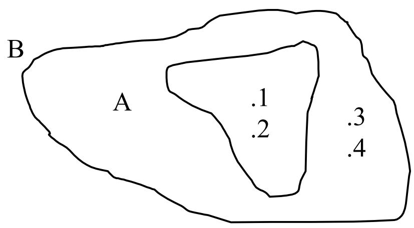


Dados los conjuntos A y B, si todo elemento de A es elemento de B se indica **A ⊂ B** (A está **incluído** en B, o A es parte de B). Mientras que si A no es parte de B, es decir que hay algún elemento de A que no es elemento de B, se escribe $A \not\subset B$.

Ejemplo:

$A = \{ 1,2 \}$

$B = \{ 1,2,3,4 \}$



$A \subset B$

Se dice que dos conjuntos A y B son **iguales** (y se escribe **A = B**) si A y B poseen elementos idénticos, es decir si $A \subset B$ y $B \subset A$. Mientras que si hay algún elemento de A que no es elemento de B ó si hay algún elemento de B que no es elemento de A se dice que $A \neq B$.

El conjunto que no tiene elementos se denomina **conjunto vacío** y se representa con el símbolo $\varnothing$.

Ejemplos:

$A = \{ x / x \in N \wedge 2x + 4 = 0 \}$ ó $A = \varnothing$

$B = \{ x : x^2 < 0 \}$ ó $B = \varnothing$

Se llama conjunto **universal** (o referencial) y se denota con **U** al conjunto que contiene a todos los elementos de todos los conjuntos considerados del tema tratado.

Ejemplo:

$U = \{x / x \in N\}$

$A = \{x / x \in N \wedge x \text{ es par } \}$

$B = \{x / x \in N \wedge x \text{ es impar } \}$

Se llama **complemento de A** (respecto de **U** al conjunto de elementos de **U** que no están en A. Para indicar el complemento del conjunto A, usaremos el símbolo A'.

Ejemplo:

$U = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{2, 4, 6, 8\}$ $A' = \{ 1, 3, 5, 7, 9\}$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ $B' = \{ 6, 7, 8, 9 \}$

Operaciones entre conjuntos

Algunas operaciones entre conjuntos que utilizaremos son: unión, intersección y diferencia.

La **unión** de dos conjuntos A y B (representada $\mathbf{A \cup B}$) es el conjunto de elementos que se encuentran en A o en B o en ambos.

En símbolos: $\mathbf{A \cup B} = \{ x / x \in A \vee x \in B \}$

Ejemplo:

$A = \{x / x \in Z \wedge -2 \leq x < 3\}$ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$B = \{x / x \in Z \wedge 0 \leq x \leq 5\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cup B = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

La **intersección** de dos conjuntos A y B (representada **A** $\cap$ **B**) es el conjunto de elementos que se encuentran tanto en A como en B (o sea los elementos comunes a A y B).
En símbolos: $\mathbf{A \cap B} = \{ x / x \in A \wedge x \in B \}$

Ejemplo:

$A = \{x / x \in Z \wedge -2 \leq x < 3\}$ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$B = \{x / x \in Z \wedge 0 \leq x \leq 5\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$A \cap B = \{0, 1, 2\}$

La **diferencia** entre los conjuntos A y B (representada A – B) es el conjunto formado por los elementos de A que no son elementos de B.
En símbolos: $\mathbf{A - B} = \{ x / x \in A \wedge x \notin B \}$

Ejemplo:

$A = \{x / x \in Z \wedge -2 \leq x < 3\}$ $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$B = \{x / x \in Z \wedge 0 \leq x \leq 5\}$ $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

$A - B = \{-2, -1\}$

$B - A = \{3, 4, 5\}$

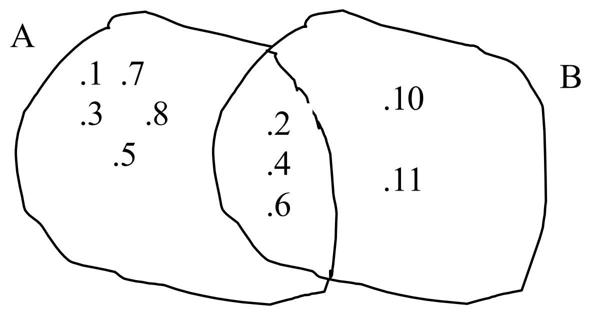
A modo de resumen de las operaciones vistas,se presenta el siguiente ejemplo:

Ejemplo:

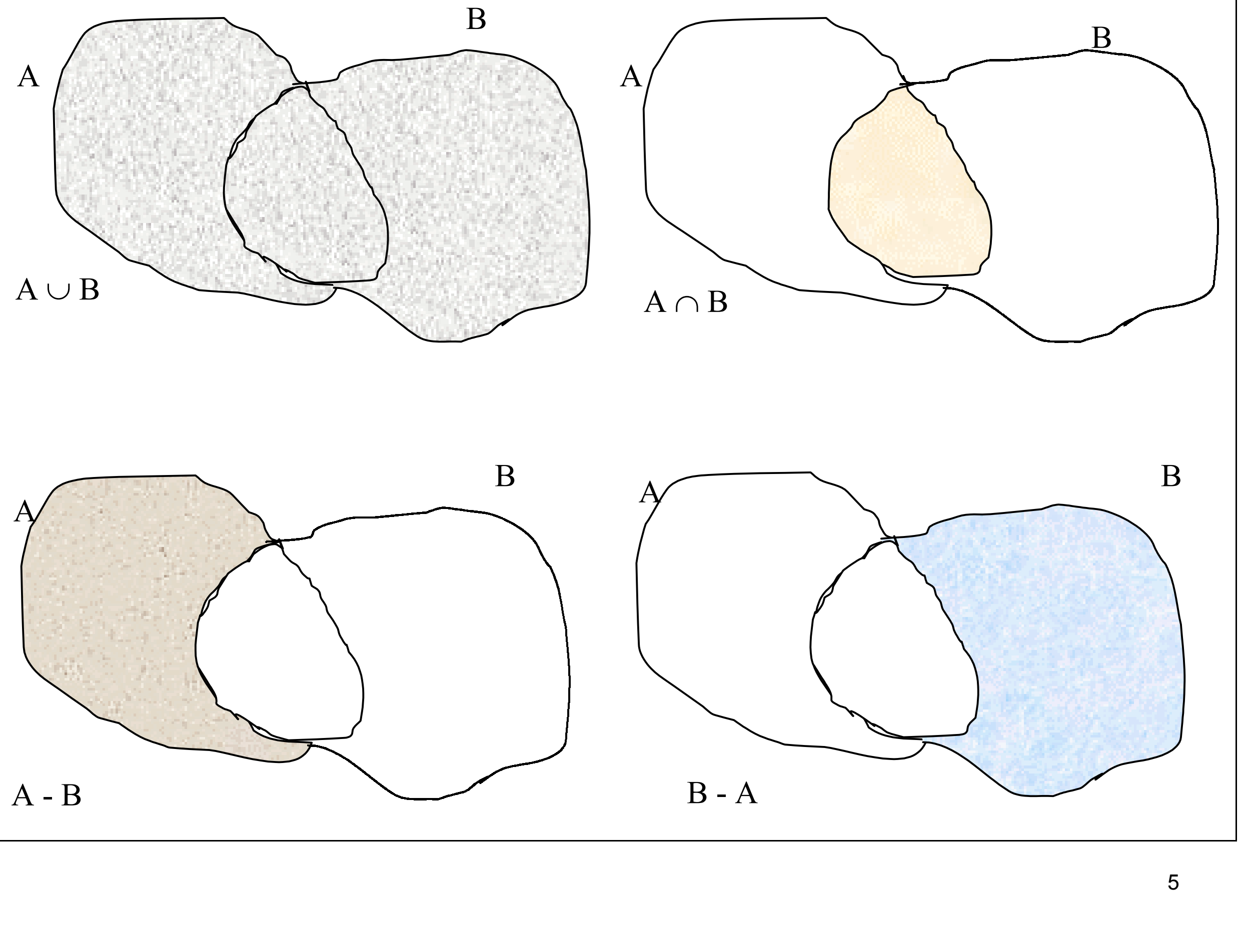
$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ $\qquad$ $B = \{2, 4, 6, 10, 11\}$

1) $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11\}$
2) $A \cap B = \{2, 4, 6\}$
3) $A - B = \{1, 3, 5, 7, 8\}$
4) $B - A = \{10, 11\}$

Esta situación se puede representar mediante el diagrama de Venn siguiente.



Cada zona sombreada corresponde a la operación indicada



2. LOS NÚMEROS REALES

2.1. Conjunto de los números reales

Aunque la Matemática va más allá del estudio de los números, comenzaremos trabajando con el conjunto de los números reales.

Recordaremos que el conjunto de los números **naturales** o **enteros positivos**, se compone de: N = { 1, 2 , 3 , 4 ,... }; y que N es un subconjunto del conjunto de los **enteros**: Z = { ... –3 , -2 , -1 , 0 , 1 , 2 ,3 , 4 ,...}. El conjunto Z incluye tanto los enteros positivos como los negativos y el número cero, el cual no es ni negativo ni positivo.

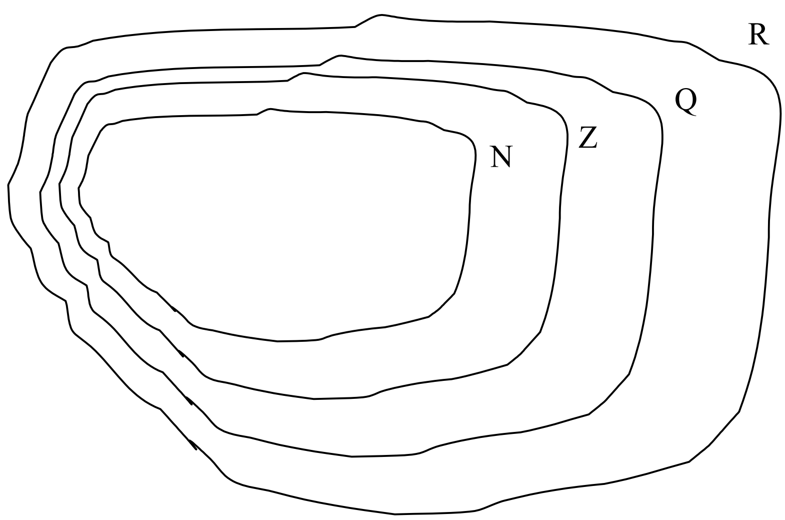
A su vez el conjunto de enteros es un subconjunto del conjunto de los números **racionales** (que denotaremos con Q):

Q = { $\frac{p}{q}$ / p y q son enteros, $q \neq 0$ }. El conjunto Q está compuesto de todos los cocientes de dos enteros, siempre que el denominador no sea cero.

El conjunto de los números racionales no es suficiente para solucionar ciertos problemas elementales algebraicos y geométricos. Por ejemplo no hay un número racional p / q para el que $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, o sea que el número $\sqrt{2}$ no es un número racional, pertenece al conjunto de los números **irracionales**, es decir al conjunto de números reales que no puede expresarse como cociente de dos enteros.

Otros ejemplos de números irracionales: π , e, $\sqrt{3}$, $-\sqrt{7}$.

Luego podemos afirmar que: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.



2.2. Sistema de números reales

El sistema de números reales consiste en un conjunto de elementos denominados **números reales** y dos operaciones conocidas como **adición** y **multiplicación**. El conjunto de números reales se representa **R.** La operación de la adición se representa con el símbolo (+), y la multiplicación por (·) . **Si** ***a*** y ***b*** son elementos del conjunto R, ***a*** + ***b*** designa la **suma** de ***a*** y de ***b*,** mientras que ***a . b*** designa su **producto**.

El sistema de números reales se puede describir completamente por un conjunto de axiomas (enunciado formal que se da por cierto sin necesidad de demostrarlo). Con estos axiomas podemos deducir las propiedades de los números reales de las cuales siguen las operaciones algebraicas de adición, sustracción, multiplicación y división.

PROPIEDADES BÁSICAS

Las propiedades básicas del sistema de números reales con respecto a las operaciones de adición y multiplicación son las siguientes:

Sean ***a***, ***b*** y ***c*** dos números reales:

Adición	Multiplicación
1) Ley clausurativa (ley de cierre) $a + b$ es un número real	$a \,.\, b$ es un número real
2) La suma es asociativa $a + (b + c) = (a + b) + c$	El producto es asociativo $a \,.\, (b \,.\, c) = (a \,.\, b) \,.\, c$
3) La suma es conmutativa $a + b = b + a$	El producto es conmutativo $a \,.\, b = b \,.\, a$
4) Existe elemento neutro para la suma $A + 0 = 0 + a = a$	Existe elemento neutro para el producto $a \,.\, 1 = 1 \,.\, a = a$
5) Para cada número real existe un único número real (llamado **negativo** o **inverso aditivo de *a***), representado por (***-a***) tal que: $a + (-a) = a - a = 0$	Para cada número real $a \neq 0$ existe un único número real (llamado **recíproco** o **inverso multiplicativo de *a***),representado por $1/a$ o también por a^{-1} tal que: $a \,.\, \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \,.\, a = 1$

86) Propiedad distributiva (el producto es distributivo respecto de la suma).

$$a\,(b+c) = (a.b) + (a.c) = ab + ac$$

$$(a+b)\,c = (a.b) + (a.c) = ac + bc$$

OTRAS PROPIEDADES

Muchas otras propiedades de los números reales pueden demostrarse a partir de las propiedades básicas. Algunas que utilizaremos son las siguientes:

a) Ley cancelativa (o anulativa)

Si $a + c = b + c$ entonces $a = b$

Si $a.c = b.c$, entonces $a = b$

b) $a\,.\,0 = 0\,.\,a = 0$

(Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$)

(Si $a = b$, entonces $a.c = b.c$)

c) Si $a\,.\,b = 0 \Rightarrow a = 0$ ó $b = 0$

d) Para los números a y b, la diferencia $a - b$ se define como: $a - b = a + (-b)$

Si $b \neq 0$, el cociente a/b se define

$$a : b = a\,.\,\frac{1}{b} = \frac{a}{b}$$

En el cociente $\frac{a}{b}$, a se llama **numerador** y b se llama **denominador**.

Con frecuencia el cociente de dos números reales se llama **fracción**.

Recordar que $\frac{a}{b}$ no está definida para $b = 0$.

No todas las propiedades que funcionan para la adición y la multiplicación son válidas para la sustracción y la división. Haremos una lista de otras propiedades importantes.

e) $(-1)\,.\,a = -a$

f) $-(-a) = a$

g) $(-a)\,.\,b = a.(-b) = -(a.b) = = -a\,b$

h) $(-a)\,(-b) = ab$

i) $-(a+b) = (-a) + (-b) = -a - b$

j) $(a^{-1})^{-1} = a$

k) $(a\,b)^{-1} = a^{-1}\,b^{-1}$

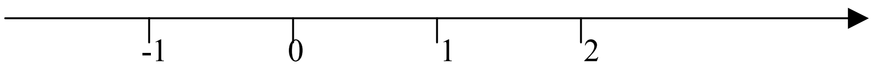
2.3. Los números reales y la recta

Al conjunto **R** se le impone una condición denominada *axioma de completitud* (que no estudiaremos ahora). Sin embargo daremos una interpretación geométrica al conjunto de números reales asociándolos a los puntos de una recta horizontal llamada **eje**. El axioma de completitud garantiza una correspondencia biunívoca (de uno a uno) entre el conjunto **R** y el conjunto de puntos en el eje.

Se elige un punto en el eje para que represente el punto **0**. Este punto recibe el nombre de **origen**. Se selecciona luego una unidad de distancia. Entonces cada número positivo **x** quedará representado por un punto situado a una distancia de **x** unidades a la derecha del origen, y cada número negativo **x** se representará por un punto a una distancia de **–x** unidades a la izquierda del origen.

Existe una correspondencia biunívoca entre **R** y los puntos del eje, es decir, a cada número real le corresponde un único punto en el eje y a cada punto en el eje se le asocia un único número real.

A la recta **R** se la denomina recta de números reales o recta numérica.



2.4 Orden en los reales

Existe un ordenamiento en el conjunto **R** por medio de una relación denotada por los símbolos $<$ ("menor que") y $>$ ("mayor que") que se definen así:

$a < b$ si y sólo si $b - a$ es positiva.

$a > b$ si y sólo si $a - b$ es positiva.

La relación de orden así definida verifica las siguientes propiedades.

PROPIEDADES BÁSICAS DEL ORDEN:

Sean $a, b, c \in \mathbf{R}$, se cumple :

1) Una y sólo una de las siguientes afirmaciones es verdadera: $a < b$, ó $a > b$, ó $a = b$
2) Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a + b > 0$.
3) Si $a > 0$ y $b > 0$, entonces $a\,b > 0$.

Son de uso universal las siguientes notaciones:

- $\boldsymbol{a \leq b}$ si y sólo si: $\boldsymbol{a < b,}$ o bien $\boldsymbol{a = b.}$
- $\boldsymbol{a \geq b}$ si y sólo si : $\boldsymbol{a > b,}$ o bien $\boldsymbol{a = b.}$
- $\boldsymbol{a < b < c}$ para indicar que $\boldsymbol{a < b}$ y $\boldsymbol{b < c.}$
- $\boldsymbol{a \leq b \leq c}$ para indicar que $\boldsymbol{a \leq b}$ y $\boldsymbol{b \leq c.}$

OTRAS PROPIEDADES DEL ORDEN EN ***R***

Muchas otras propiedades relativas al orden pueden demostrarse a partir de las básicas; algunas son las siguientes:

O 1) $a \leq b$ y $b \leq a \Rightarrow a = b.$

O 2) $\mathrm{a} \leq \mathrm{b}$ y $\mathrm{b} \leq \mathrm{c} \Rightarrow \mathrm{a} \leq \mathrm{c}.$

O 3) Si $\boldsymbol{a > b}$ y $\boldsymbol{b > c}$, entonces $\boldsymbol{a > c.}$ (ley de transitividad)

Si $\boldsymbol{a < b}$ y $\boldsymbol{b < c}$, entonces $\boldsymbol{a < c.}$

O 4) Leyes de monotonía de la suma

a) Si $\boldsymbol{a > b}$ entonces $\boldsymbol{a + c > b + c.}$

b) Si $\boldsymbol{a < b}$ entonces $\boldsymbol{a + c < b + c.}$

c) Si $\boldsymbol{a < b}$ y $\boldsymbol{c < d}$ entonces $\boldsymbol{a + c < b + d.}$

O 5) Leyes de monotonía del producto:

a) Si $\boldsymbol{a > b}$ y $\boldsymbol{c > 0}$, entonces $\boldsymbol{a\,c > b\,c.}$

b) Si $\boldsymbol{a < b}$ y $\boldsymbol{c > 0}$, entonces $\boldsymbol{a\,c < b\,c.}$

c) Si $\boldsymbol{a > b}$ y $\boldsymbol{c < 0}$, entonces $\boldsymbol{a\,c < b\,c}$.

d) Si $\boldsymbol{a < b}$ y $\boldsymbol{c < 0}$, entonces $\boldsymbol{a\,c > b\,c.}$

O 6) Si $0 < a < b$ entonces $a^2 < b^2$, (donde $a^2 = aa$ y $b^2 = bb$)

O 7) Si $a < b < 0$ entonces $b^2 < a^2$.

O 8) Si $a \neq 0$ entonces $a^2 > 0.$

2.5. Intervalos

Para indicar que un número x se encuentra entre a y b, o sea si $a < x$ y $x < b$. Esto puede escribirse de la siguiente manera: $a < x < b$.

También son utilizadas las expresiones: $a \le x \le b$, $a \le x < b$, $a < x \le b$.

Al conjunto formado por todos los valores reales de x que cumplen con alguna de las condiciones anteriores se lo denomina intervalo, tiene una notación determinada y se lo puede representar en la recta numérica.

$(a , b) = \{ x \in R : a < x < b\}$ (intervalo abierto)

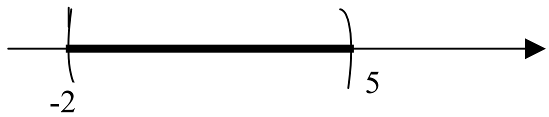
$[a , b] = \{ x \in R : a \le x \le b\}$ (intervalo cerrado)

$(a , b] = \{ x \in R : a < x \le b\}$ (intervalo semiabierto a la izquierda o semicerrado)

$[a , b) = \{ x \in R : a \le x < b\}$ (intervalo semiabierto a la derecha o semicerrado)

Ejemplos:

A = $\{x / x \in R \wedge -2 < x < 5\} = (-2 , 5)$



B = $\{x / x \in R \wedge -2 \le x \le 5\} = [-2 , 5]$

C = $\{x / x \in R \wedge -2 \le x < 5\} = [-2 , 5)$

D = $\{x / x \in R \wedge -2 < x \le 5\} = (-2, 5]$

Otros intervalos:

$[a , +\infty) = \{ x \in R : x \ge a \}$

$(a , +\infty) = \{ x \in R : x > a \}$

$(-\infty, a] = \{ x \in R : x \le a \}$

$(-\infty, a) = \{ x \in R : x < a \}$

$(-\infty, +\infty) = \{ x \in R \} = R$

2.6. Otras operaciones: potenciación y radicación

Potenciación

Así como una suma repetida $x + x + x + x$ se podía escribir $4\,x$, el producto repetido se puede escribir $x\,.x\,.x\,.x = x^4$.

En general, para cualquier entero positivo n, el símbolo x^n representa el producto de n factores de x.

$$x^n = \underbrace{x.x.x....x.}_{n\ veces} \qquad \text{donde } n \text{ es el exponente y } x \text{ es la base}$$

También para cualquier entero positivo n definimos $x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$

De las propiedades vistas del producto surgen las siguientes

PROPIEDADES DE LA POTENCIACIÓN

a) $x^m \, . \, x^n = x^{m+n}$

b) $(x^m)^n = x^{m \, . \, n}$

c) $(x.\, y)^m = x^m \, . \, y^m$

d) $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m = \dfrac{x^m}{y^m}$

e) $\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

Ejemplos:

$\dfrac{a^5}{a^{-3}} = .a^8$ $\qquad$ $\dfrac{1}{a^{-3}a^5} = .a^{-2}$

$\left(a^{-2}\right)^4 = .a^{-8}$ $\qquad$ $2^3 \, . \, 2^2 = 2^{.5}$

$(3\,.\,2)^4 = 3^{.4}.\,2^4$ $\qquad$ $\left(\dfrac{5}{2}\right)^4 = \dfrac{5^4}{2^{.4}}$

Radicación

Las raíces de los números reales se definen por el enunciado

$$\sqrt[n]{x} = r \quad \text{si y sólo si} \quad r^n = x$$

donde $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{r}$ son números reales no negativos y $\boldsymbol{n}$ es un entero positivo, ó $\boldsymbol{x}$ y $\boldsymbol{r}$ son números reales negativos y $\boldsymbol{n}$ es un número entero positivo impar.

Al número $\sqrt[n]{x}$ se lo denomina *la raíz enésima de* $\boldsymbol{x}$.

La expresión $\sqrt[n]{x}$ se llama *radical*; el número $\boldsymbol{n}$ es el *índice* del radical y $\boldsymbol{x}$ se llama *radicando.*

El símbolo $\sqrt{\ }$ se llama *signo radical.*

PROPIEDADES DE LA RADICACIÓN

Las propiedades siguientes se utilizan para operar y simplificar expresiones que contengan radicales.

Sean $\boldsymbol{m}$ y $\boldsymbol{n}$ números positivos y $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ números reales. Entonces:

a) $(\sqrt[n]{x})^n = x$

b) $\sqrt[n]{x} \,.\, \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x.y}$

c) $\dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}$

d) $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m.n]{x}$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{5^3} = 5$

b) $\sqrt{8}.\sqrt{8} = \sqrt{64} = 8$ ó $\sqrt{8}.\sqrt{8} = \left(\sqrt{8}\right)^2 = 8$

c) $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{64}} = \sqrt[6]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Al **racionalizar** un denominador estamos encontrando una expresión equivalente a la dada que no tiene radicales en el denominador. Para ello basta multiplicar a la expresión dada por 1, escrito en forma especial.

Ejemplo:

$$\frac{1}{\sqrt{7}} = \frac{1}{\sqrt{7}}.\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = \frac{\sqrt{7}}{\left(\sqrt{7}\right)^2} = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

Si una fracción contiene expresiones del tipo $\left(\sqrt{\boldsymbol{x}} + \sqrt{\boldsymbol{y}}\right)$ ó $\left(\boldsymbol{x} - \sqrt{\boldsymbol{y}}\right)$ bastará multiplicar por una expresión conveniente para obtener otra expresión, equivalente a la dada, pero que no contenga radicales en el denominador.

Ejemplos:

a) $$\frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{7}-\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{7}+\sqrt{3}}{\sqrt{7}+\sqrt{3}} = \frac{3\,(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{\left(\sqrt{7}\right)^2-\left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{3\,(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{7-3} = \frac{3\,(\sqrt{7}+\sqrt{3})}{4}$$

b) $$\frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\left(\sqrt{x}\right)^2-\left(\sqrt{y}\right)^2} = \frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}$$

c) $$\frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{5}+\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} = \frac{3\,(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{\left(\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2} = \frac{3\,(\sqrt{5}-\sqrt{2})}{5-2} = (\sqrt{5}-\sqrt{2})$$

Exponentes racionales

El concepto de raíz enésima de un número nos permite ampliar la definición de exponentes enteros a exponentes racionales, y a veces es más cómodo trabajar con exponentes racionales que con radicales.

Si el valor $\sqrt[n]{x}$ está definido, diremos que:

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$$

Análogamente

$$\boldsymbol{x^{\frac{m}{n}} = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)^{m} = \sqrt[n]{x^{m}}}$$

Ejemplos:

a) $64^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(64)^{2}} = \sqrt[3]{\left(2^{6}\right)^{2}} = \sqrt[3]{(2)^{12}} = 2^{4} = 16$

b) $(32)^{-\frac{3}{5}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{(32)^{3}}} = \dfrac{1}{\sqrt[5]{\left(2^{5}\right)^{2}}} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2^{15}}} = \dfrac{1}{2^{3}} = \dfrac{1}{8}$

c) $\sqrt[3]{x^{5}} = x^{\frac{5}{3}}$

d) $\dfrac{2}{\sqrt[7]{y^{4}}} = y^{-\frac{4}{7}}$

PROPIEDADES

Las propiedades de la potenciación vistas para exponentes enteros positivos también son válidas para los exponentes racionales o sea si $\boldsymbol{x}$ e $\boldsymbol{y}$ son números reales adecuados, y $\boldsymbol{r}$ y $\boldsymbol{p}$ son números racionales se cumple que:

a) $\boldsymbol{x^r \, . \, x^p = x^{r+p}}$

b) $\boldsymbol{(x^r)^{\,p} = x^{\,r \cdot p}}$

c) $\boldsymbol{(x.\, y)^{\,r} = x^r \, . \, y^r}$

d) $\left(\dfrac{\boldsymbol{x}}{\boldsymbol{y}}\right)^{\boldsymbol{r}} = \dfrac{\boldsymbol{x^r}}{\boldsymbol{y^r}}$

e) $\dfrac{\boldsymbol{x^r}}{\boldsymbol{x^p}} = \boldsymbol{x^{r-p}}$

<u>Ejemplos:</u>

a.) $\left(2\ a^{\frac{1}{2}}\right)\left(2\ a^{\frac{1}{3}}\right)\left(2\ a^{\frac{1}{6}}\right) = 8\ \ a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}} = 8\ a$

b) $\left(\dfrac{3}{2}\ x^{\frac{3}{2}}\right)\left(2\ x^{\frac{1}{4}}\right)^{-\frac{4}{3}}\left(\dfrac{2}{3}\ x^{-\frac{5}{6}}\right)^{\frac{3}{5}} = \dfrac{3}{2}\ .\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{3}}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}}\ x^{\frac{3}{2}}\ x^{-\frac{1}{3}}\ \ x^{-\frac{1}{2}} = 12\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{3}{5}}\ x^{\frac{2}{3}}$

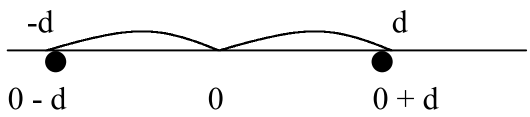
2.7 Valor absoluto

El valor absoluto de un número real x se designa mediante |x| ,y se define como:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

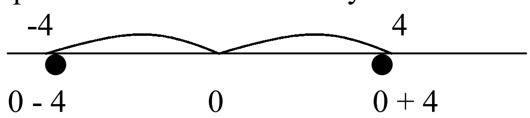
Geométricamente el valor absoluto de un número x es la distancia entre ese número x y el origen.

La expresión |x| = d representa a aquellos valores de x cuya distancia al origen es d. Gráficamente:

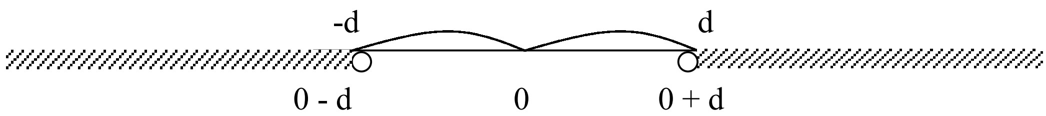


<u>Ejemplos</u>

|x| = 4, esto puede interpretarse: “los números cuya distancia al origen es igual a 4 “



|x| > 5, esto se lee: “los números cuya distancia al origen es mayor a 5 “

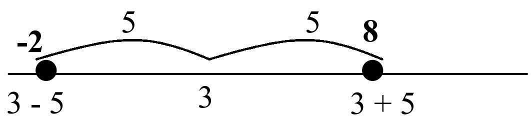


Análogamente, se define la distancia (no dirigida) entre dos números x y a como: |x - a|

En particular si a = 0, |x - 0| = | x | tendríamos la distancia al origen como se definió antes.

<u>Ejemplo</u>

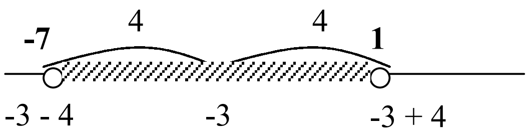
La expresión |x - 3| = 5 se lee “los números cuya distancia a 3 es 5” . Los números que satisfacen esta igualdad son: -2 y 8, tal como se muestra en la siguiente figura:



Nota: Si a es un número negativo la expresión $|x - (-a)| = |x + a|$

Ejemplo:

La expresión $|x + 3| < 4$ se lee "los números cuya distancia a -3 es menor que 4" . Los números que satisfacen esta desigualdad son los que pertenecen al intervalo: (-5,1) tal como se muestra en la siguiente figura:



2.8 Propiedades del valor absoluto

1. $|x| \geq 0$ ($|x| > 0$ si $x \neq 0$ y $|x| = 0$ si $x = 0$)
2. $|x \,.\, y| = |x| \,.\, |y|$
3. $|x + y| \leq |x| + |y|$ (desigualdad triangular)

Otras propiedades de valor absoluto

4. $|x - y| \geq \big||x| - |y|\big|$
5. $|x|^2 = x^2$
6. $|x| < |y| \Leftrightarrow x^2 < y^2$
7. $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$

Observación $\sqrt{x^2} = |x|$