Capítulo 4

Inecuaciones

M.Sc. Alcides Astorga M., Lic. Julio Rodríguez S.

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
...
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, María Elena Abarca, Lisseth Angulo. y Walter Mora.
Colaboradores:	Cristhian Paéz, Alex Borbón, Juan José Fallas, Jeffrey Chavarría
Edición y composición final:	Walter Mora.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

4.1 Intervalos

En el Capítulo 1, estudiamos algunos subconjuntos del Conjunto de los Números Reales, entre estos vimos: el Conjunto de los Números Naturales, el Conjunto de los Números Enteros, el Conjunto de los Números Racionales y el Conjunto de los Números Irracionales. Estudiaremos a continuación otros subconjuntos del Conjunto de los Números Reales, a los cuales llamaremos intervalos.

Para esto es conveniente recordar que es posible establecer una correspondencia biunívoca, entre los puntos de una recta (recta numérica), y el Conjunto de los Números Reales. Así, para cada número real corresponde un, y sólo un, punto de la recta numérica, e inversamente cada punto de la recta numérica representa un, y sólo un, número real.

■ **Definición 1**

Sean a y b números reales tales que a es menor que b $(a < b)$. Se llama **intervalo abierto** de extremos a y b, al conjunto cuyos elementos son los números reales x que cumplen la condición de que:

$$a < x \quad \text{y} \quad x < b$$

Notación:

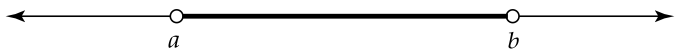
i.) El intervalo abierto de extremos a y b lo denotaremos por $]a, b[$

ii.) Si $a < x$ y $x < b$ escribimos $a < x < b$, por ejemplo, la expresión $-3 < x < 5$, significa que $-3 < x$ y $x < 5$.

De esta manera se tiene que:

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x < b\}$$

El intervalo abierto de extremos a y b lo representamos geométricamente de la manera siguiente:



Definición 2

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Se llama **intervalo cerrado** de extremos a y b, al conjunto cuyos elementos son los números reales x que cumplen la condición:

$$a \leq x \quad \text{y} \quad x \leq b$$

Notación:

i.) El intervalo cerrado de extremos a y b lo denotaremos por $[a, b]$

ii.) Si $a \leq x$ y $x \leq b$ escribimos $a \leq x \leq b$, por ejemplo, la expresión $-7 \leq x \leq 2$, significa que $-7 \leq x$ y $x \leq 2$.

De esta manera se tiene que:

$$[a, b] \ = \ \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x \leq b\}$$

El intervalo cerrado de extremos a y b lo representamos geométricamente de la manera siguiente:

Observación: Note que en el intervalo abierto de extremos a y b no se incluyen extremos, mientras que en el intervalo cerrado se incluyen los extremos.

Definición 3

Sean a y b números reales tales que $a < b$. Se llama intervalo semi-abierto de extremos a y b, "abierto" en a y "cerrado" en b, al conjunto cuyos elementos son los números reales x que cumplen la condición:

$$a < x \quad \text{y} \quad x \leq b$$

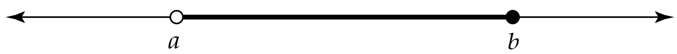
Este intervalo lo denotaremos por: $]a, b]$

Notación: Si $a < x \quad \text{y} \quad x \leq b$ escribimos $a < x \leq b$

De esta manera se tiene que:

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} \ / \ a < x \leq b\}$$

Geométricamente el intervalo semi-abierto, de extremos a y b, "abierto" en a y "cerrado" en b, lo representamos de la manera siguiente:



En forma similar se define el intervalo "semi-abierto" de extremos a y b, "cerrado" en a y "abierto" en b, y se denota $[a, b[$ de la manera siguiente:

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ a \leq x < b\}$$

Geométricamente este intervalo se representa de la manera siguiente:

Definición 4

Sea a un número real. El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x > a$, lo denotaremos por $]a, +\infty[$ (el símbolo $+\infty$ se lee"más infinito") y lo representamos geométricamente de la manera siguiente:

así: $]a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x > a\}$

En forma similar:

i.) El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x \geq a$, lo denotaremos por $[a, +\infty[$ y lo representaremos geométricamente de la manera siguiente:

Así: $[a, +\infty[= \{x \in \mathbb{R} / x \geq a\}$

ii.) El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x < a$, lo denotaremos por $]-\infty, a[$ (el símbolo $-\infty$ se lee "menos infinito") y lo representaremos geométricamente de la manera siguiente:

Así: $]-\infty, a[= \{x \in \mathbb{R} / x < a\}$

iii.) El conjunto cuyos elementos son los números reales x tales que $x \leq a$, lo denotaremos por $]-\infty, a]$ y lo representaremos geométricamente de la manera siguiente:

Así: $]-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} / x \leq a\}$

4.1.1 Operaciones con intervalos

Dado que los intervalos constituyen un tipo particular de conjuntos, definiremos a continuación algunas operaciones, con conjuntos en general, e ilustraremos estas operaciones mediante ejemplos, de entre los cuales en algunos casos se involucrarán intervalos.

Debido a su gran utilidad en este capítulo, las operaciones que nos interesa definir aquí son: la intersección, la unión y la diferencia de conjuntos.

■ **Definición 5**

Sean A y B conjuntos. Se define la intersección de A y B y se denota $A \cap B$, al conjunto cuyos elementos pertenecen a A y también a B.

Simbólicamente se tiene que: $A \cap B = \{x \,/\, x \in A \quad \text{y} \quad x \in B\}$

■ **Ejemplo 1**

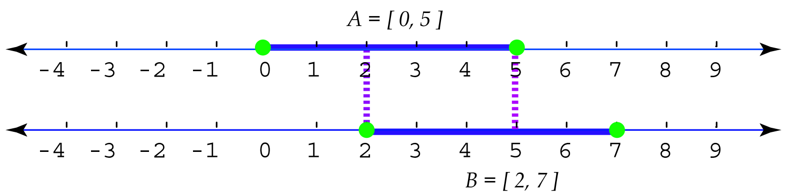
Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{4, 5, 6\}$. Determine $A \cap B$

Solución. Los elementos que están en A y también en B son: 4 y 5.
Por lo tanto: $A \cap B = \{4, 5\}$

■ Ejemplo 2

Si $A = [0, 5]$ y $B = [2, 7]$, determine $A \cap B$

Solución. Geométricamente podemos representar los conjuntos A y B de la manera siguiente:



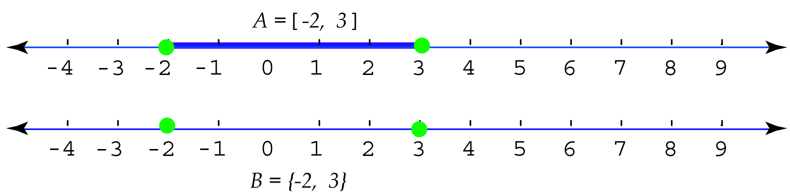
De aquí podemos observar que los elementos que están en A y también en B son los números reales que están entre 2 y 5, incluyendo a éstos; por lo que:

$$A \cap B = [0, 5] \cap [2, 7] = [2, 5] \quad \text{o sea:} \quad A \cap B = [2, 5]$$

■ Ejemplo 3

Si $A = [-2, 3]$ y $B = \{-2, 3\}$, determine $A \cap B$

Solución. Geométricamente podemos representar a los conjuntos A y B de la siguiente manera:

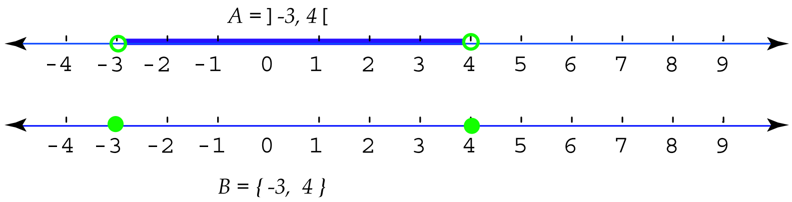


De aquí observamos que los únicos elementos que están en A y también en B son -2 y 3; por lo que:

$$A \cap B = [-2, 3] \cap \{-2, 3\} = \{-2, 3\} \quad \text{o sea} \quad A \cap B = \{-2, 3\}$$

■ Ejemplo 4

Si $A =]-3, 4[$ y $B = \{-3, 4\}$, determine $A \cap B$



Solución
Como podemos observar A y B no tienen elementos comunes por lo que:

$$A \cap B = \ ]-3,4[\ \cap \ \{-3,4\} \ = \emptyset, \quad \text{o sea} \quad A \cap B = \emptyset$$

Ejercicios 1

Para cada uno de los casos siguientes determine el conjunto $A \cap B$.

1.) $A = \ [2,5]\ ; \quad B = [-1,3[$

2.) $A = \ [2,+\infty[\ ; \quad B = \ ]-\infty,5[$

3.) $A = [-3,11[\ \ ; \quad B = \{6,11\}$

4.) $A = \mathbb{R}; \qquad\qquad B = [-3,4[$

■ Definición 6

Sean A y B conjuntos. Se define la unión de A y B y se denota $A \cup B$, al conjunto cuyos elementos pertenecen al menos a uno de los dos conjuntos A y B.

Simbólicamente se tiene que $\quad A \cup B = \{x/x \in A \quad \text{o} \quad x \in B\}$

■ Ejemplo 5

Si $A = \{1,2,3,4,5\}$ y $B = \{4,5,6\}$, determine $A \cup B$

Solución. $A \cup B \ = \ \{1,2,3,4,5\} \ \cup \ \{4,5,6\} \ = \ \{1,2,3,4,5,6\}$ o sea $A \cup B = \ \{1,2,3,4,5,6\}$

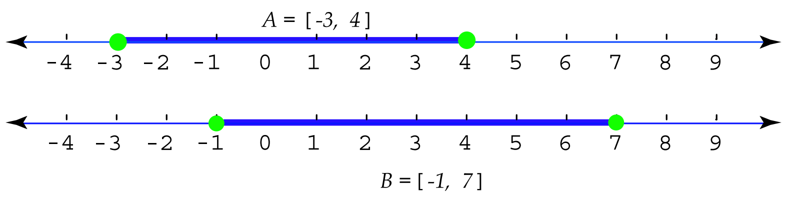
■ Ejemplo 6

Si $A = [-3,4]$ y $B = [-1,7]$, determine $A \cup B$

Solución

De aquí podemos observar que los elementos que están en A o en B, son los números reales que están entre -3 y 7, incluyendo a éstos, así:

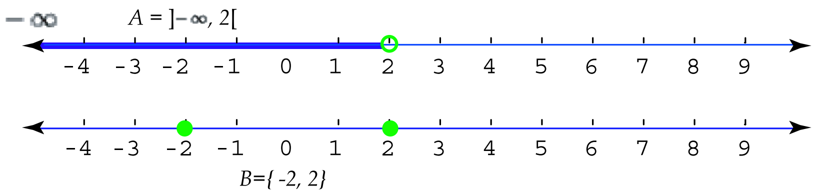
$$A \cup B = \ [-3,4] \ \cup \ [-1,7] \ = \ [-3,7] \quad \text{o sea} \quad A \cup B = \ [-3,7]$$



Ejemplo 7

Si $A =]-\infty, 2[$ y $B = \{-2, 2\}$, determine $A \cup B$

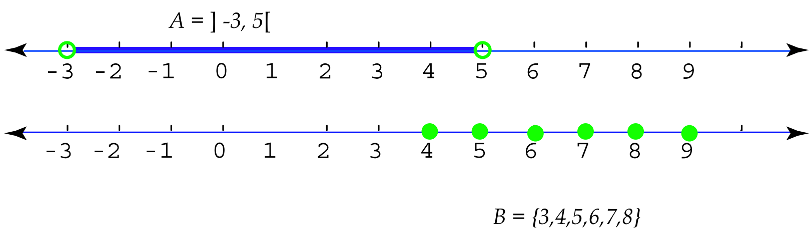
Solución. Representaremos a A y a B geométricamente:



De aquí observamos que: $A \cup B =]-\infty, 2[\ \cup \ \{-2, 2\} \ = \ ]-\infty, 2]$

Ejemplo 8

Si $A = \ ]-3, 5[$ y $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, determine $A \cup B$



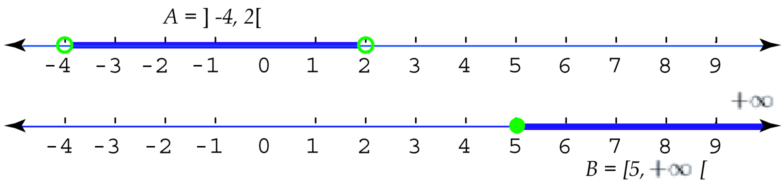
Solución. Representemos a A y a B geométricamente:

De aquí observamos que: $A \cup B = \ ]-3, 5] \ \cup \ \{6, 7, 8\}$

Ejemplo 9

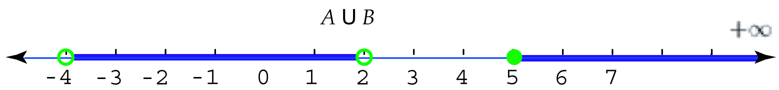
Si $A =]-4, 2[$ y $B = \ [5, +\infty[$, determine $A \cup B$

Solución. Representaremos a A y a B geométricamente:



De aquí observamos que: $A \cup B =]-4, 2[\ \cup \ [5, +\infty[$

Geométricamente podemos representar $A \cup B$ así:



Ejercicios 2

Para cada uno de los casos siguientes determine el conjunto $A \cup B$ y represente geométricamente los conjuntos A, B y $A \cup B$.

1.) $A = \ [-2, 5] \quad B =]0, 7[$

2.) $A =]-5, 3] \quad B = \{-5, 0, 5, 10\}$

3.) $A =]-\infty, -1[\quad B =]2, +\infty[$

4.) $A =]-\infty, 3[\quad B =]3, +\infty[$

5.) $A = \ [3, 5[\quad B = \{8, 10\}$

6.) $A =]-\infty, 2[\quad B =]0, +\infty[$

■ **Definición 7**

Sean A y B conjuntos. Se define la **diferencia** de A y B y se denota $A - B$, al conjunto cuyos elementos pertenecen a A y no a B.

■ **Ejemplo 10**

Si $A = \ \{2, 4, 6, 8, 10\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, determine $A - B$ y $B - A$

Solución

i.) Los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B son $6, 8, 10$; por lo que $A - B = \{6, 8, 10\}$

ii.) Los elementos que pertenecen a B y no pertenecen a A son $1, 3, 5$; por lo que $B - A = \{1, 3, 5\}$

Ejemplo 11

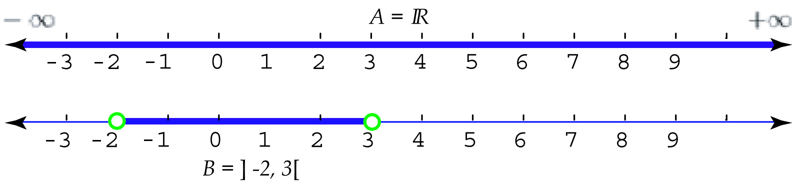
Si $A = \ [-3,5]$ y $B = \{5\}$, determine $A - B$

Solución. $A - B = [-3,5] - \{5\} = [-3,5[$ o sea: $A - B = [-3,5[$

Ejemplo 12

Si $A = \ \mathbb{R}$ y $B =]-2,3[$, determine $A - B$ y $B - A$

Solución. Representemos a A y a B geométricamente.



De aquí podemos observar que:

i.) $A - B = \ \mathbb{R} -]-2,3[\ = \ ]-\infty,-2[\ \cup \ [3,+\infty[$

ii.) $B - A =]-2,3[- \mathbb{R} = \emptyset$; o sea: $B - A = \emptyset$

Ejercicios 3

Para cada uno de los casos siguientes determine el conjunto $A - B$ y $B - A$.

1.) $A = \ [-10,7]$; $B = \{-10,7\}$

2.) $A =]-\infty,3]$; $B = \ \{0,3,5\}$

3.) $A = \mathbb{R}$; $B =]-5,9[$

4.) $A =]-2,6[$; $B = [3,+\infty[$

5.) $A =]-\infty,2[$; $B = \ ]-3,+\infty[$

4.2 Inecuaciones

Definición 8

Si a y b representan expresiones en el conjunto de los números reales entonces expresiones como: $a < b$, $a \leq b$, $a > b$ y $a \geq b$ reciben el nombre de *desigualdades* y se dice que a y b son los miembros de la desigualdad.

Ejemplo 13

a.) $50 > 22$

b.) $\frac{5}{2} \geq -2$

c.) $3 < \sqrt{24}$

d.) $x + 2 \geq 5$

e.) $x \leq y$

f.) $x + 3 < y - 5$

Definición 9

Una desigualdad entre dos expresiones algebraicas donde al menos una de ellas involucra variables, recibe el nombre de *inecuación*.

Ejemplo 14

a.) $x + 2 \geq 5$

b.) $x \cdot y + z \leq x + 3$

c.) $\frac{x + y}{x - y} > 1$

d.) $\sqrt{5x - 2} < 3$

e.) $x + y < -3x - y$

d.) $a^3 - 1 \geq 0$

Definición 10

En una inecuación las variables involucradas reciben el nombre de **incógnitas**.

Definición 11

Si la inecuación involucra n variables, se dice que es una inecuación con n incógnitas.

A continuación nuestro objetivo es estudiar, analizar y resolver inecuaciones con una incógnita.

■ Definición 12

En una inecuación con una incógnita, cualquier número real que esté contenido en el dominio de las incógnitas, y que al sustituirse por la incógnita en la inecuación hace que la desigualdad correspondiente sea verdadera, es *una solución de la inecuación.*

■ Ejemplo 15

a.) En $x+2>3$; si x se sustituye por 5, se obtiene una desigualdad verdadera: $5+2>3$; además 5 pertenece al dominio de la incógnita, por lo que 5 es una solución de la inecuación $x+2>3$.

b.) En $x^2 \geq 5$, si x se sustituye por -3, se obtiene una desigualdad verdadera: $(-3)^2 \geq 5$; además -3 pertenece al dominio de la incógnita, por lo que -3 es una solución de la inecuación $x^2 \geq 5$.

c.) En $\sqrt{x+2}<2$; si x se sustituye por 3, se obtiene una desigualdad *falsa*: $\sqrt{3+2}<2$ por lo que 3 *no* es una solución de la inecuación $\sqrt{x+2}<2$.

Ejercicios 4

Para cada una de las siguientes inecuaciones, escriba 3 soluciones:

1.) $x+3 \leq -6$

2.) $\dfrac{1}{x} > 7$

3.) $\sqrt{x+3} \geq x$

4.) $7-x^2>0$

■ Definición 13

Dada una inecuación de una incógnita, el subconjunto S del dominio de la incógnita, cuyos elementos son las soluciones de la inecuación dada, recibe el nombre de *conjunto solución.*

■ Ejemplo 16

a.) En $x > -3$, el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$, y esta desigualdad es verdadera únicamente para los valores de x mayores que -3; por lo que su conjunto solución es $]-3,+\infty[$ o sea:

$$S =]-3,+\infty[$$

b.) En $x^2 - 4 \leq 0$ el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$ y se puede demostrar que esta desigualdad es verdadera únicamente para los valores de x mayores o iguales que -2 y menores o iguales que 2, por lo que su conjunto solución es $[-2,2]$ o sea:

$$S = [-2,2]$$

c.) En $x^2-2x-3 > 0$; el dominio de la incógnita es $\mathbb{R}$, y se puede demostrar que esta desigualdad es verdadera únicamente para los valores de x menores que -1 o mayores que 3, por lo que su conjunto solución es $]-\infty,-1[\ \cup\ ]3,+\infty[$ o sea:

$$S =]-\infty,-1[\ \cup\ ]3,+\infty[$$

Convenio: Resolver una inecuación consiste en determinar su conjunto solución.

■ **Definición 14**

Diremos que dos inecuaciones con una incógnita son equivalentes sí y solo sí, tienen el mismo dominio de la incógnita y el mismo conjunto solución.

■ **Ejemplo 17**

a.) El conjunto solución de $x \geq 3$ es $[3,+\infty[$

El conjunto solución de $3x \geq 6$ es $[3,+\infty[$

como las inecuaciones $x \geq 3$ y $3x \geq 6$ tienen el mismo conjunto solución , entonces son equivalentes entre sí.

b.) El conjunto solución de $x+2 < 7$ es $]-\infty,5[$

El conjunto solución de $x < 5$ es $]-\infty,5[$

como las inecuaciones $x+2 < 7$ y $x < 5$ tienen el mismo conjunto solución , entonces son equivalentes entre sí.

4.2.1 Inecuaciones lineales con una incógnita

■ **Definición 15**

Sean a, b y c constantes reales con $a \neq 0$. Se llama inecuación lineal o inecuación de primer grado con una incógnita a toda inecuación que se pueda llevar a alguna de las formas siguientes: $ax + b < c$, $ax + b \leq c$; $ax + b > c$ o $ax + b \geq c$

Para resolver algunas inecuaciones lineales usaremos el concepto de inecuaciones equivalentes. Para esto transformaremos la inecuación dada en otras equivalentes a la original, hasta obtener una inecuación de alguna de las formas: $x < c$; $x \leq c$; $x > c$ o $x \geq c$; donde x es la incógnita y c es una constante.

Algunas transformaciones que se pueden usar para obtener inecuaciones equivalentes entre sí.

1.) Permutación de miembros

Se pueden intercambiar los miembros de una inecuación de acuerdo con las propiedades siguientes:

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $b \in \mathbb{R}$

i.) $a < b \Rightarrow b > a$

ii.) $a \leq b \Longrightarrow b \geq a$

iii.) $a > b \Longrightarrow b < a$

iv.) $a \geq b \Longrightarrow b \leq a$

■ **Ejemplo 18**

a.) $4 < x - 2 \Longrightarrow x - 2 > 4$

b.) $8 \leq x + 3 \Longrightarrow x + 3 \geq 8$

c.) $-3 > 2x + 3 \Longrightarrow 2x + 3 < -3$

d.) $2x - 1 \geq 3 \Longrightarrow 3 \leq 2x - 1$

2.) Sumar una constante k a ambos miembros de la inecuación

Se puede sumar una constante k a ambos miembros de una inecuación de acuerdo con las propiedades siguientes:

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, y $k \in \mathbb{R}$, k constante *i.)* $a < b \Longrightarrow a + k < b + k$

ii.) $a \leq b \Longrightarrow a + k \leq b + k$

iii.) . $a > b \Longrightarrow a + k > b + k$

iv.) $a \geq b \Longrightarrow a + k \geq b + k$

Ejemplo 19

a.) $x + 2 > -3 \Longrightarrow x + 2 + (-2) > -3 + (-2)$

b.) $2x - 3 \leq 5 \Longrightarrow 2x - 3 + 3 \leq 5 + 3$

c.) $-2x + 5 \geq 2 \Longrightarrow -2x + 5 + (-5) \geq 2 + (-5)$

d.) $x - 3 < -7 \Longrightarrow x - 3 + 3 < -7 + 3$

3.) Multiplicar por una constante k, positiva, ambos miembros de la inecuación

Se puede multiplicar cada miembro de la inecuación por una constante k positiva de acuerdo con las propiedades siguientes:

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $k \in \mathbb{R}$, k *una constante positiva*

i.) $a < b \Longrightarrow ka < kb$

ii.) $a \leq b \Longrightarrow ka \leq kb$

iii.) $a > b \Longrightarrow ka > kb$

iv.) $a \geq b \Longrightarrow ka \geq kb$

Ejemplo 20

a.) $2x - 4 \leq 6 \Longrightarrow \frac{1}{2}\,(2x - 4) \leq \frac{1}{2} \cdot 6$

b.) $\frac{1}{4}\,x - \frac{1}{2} > 3 \Longrightarrow 4\left(\frac{1}{4}\,x - \frac{1}{2}\right) > 4 \cdot 3$

c.) $3x + 2 < 5 \Longrightarrow 7(3x + 2) < 7 \cdot 5$

d.) $\frac{1}{3}\,x + 7 \geq -3 \Longrightarrow 6\left(\frac{1}{3}\,x + 7\right) \geq 6(-3)$

4.) Multiplicar por una constante k, negativa, a ambos miembros de la inecuación.

Se puede multiplicar cada miembro de la inecuación por una constante k negativa de acuerdo con las propiedades siguientes.

Sean $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, y $k \in \mathbb{R}$, k *una constante negativa*

i.) $a < b \Longrightarrow ka > kb$

ii.) $a \leq b \Longrightarrow ka \geq kb$

iii.) $a > b \Longrightarrow ka < kb$

iv.) $a \geq b \Longrightarrow ka \leq kb$

Ejemplo 21

a.) $\dfrac{-1}{3}\,x < 7 \Longrightarrow -3 \cdot \left(\dfrac{-1}{3}\,x\right) > -3 \cdot 7$

b.) $-2x \leq 5 \Longrightarrow -11(-2x) \geq -11 \cdot 5$

c.) $-x + 3 > 2 \Longrightarrow -1(-x+3) < -1 \cdot 2$

d.) $\dfrac{-x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2} \geq 5 \Longrightarrow -\sqrt{2}\left(\dfrac{-x}{\sqrt{2}} + \sqrt{2}\right) \leq -\sqrt{2} \cdot 5$

Observación: Para resolver inecuaciones, además de las transformaciones enunciadas e ilustradas anteriormente, se pueden aplicar propiedades y algoritmos de la adición y de la multiplicación definidas en $\mathbb{R}$ (conmutatividad, asociatividad, distributividad, etc.)

Veamos algunos ejemplos que se resuelven usando algunas de las transformaciones anteriores.

Ejemplo 22

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones

a.) $x + 3 < -2$

b.) $x - 7 \leq 23$

c.) $2x + 5 > 9$

d.) $3x - 2 \geq -11$

e.) $-3x - 5 \leq 13$

f.) $3 - 2x > -2$

Solución

a.) $x + 3 < -2$

$$\begin{aligned} x + 3 + -3 &< -2 + -3 \\ x + 0 &< -5 \\ x &< -5 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $x + 3 < -2$ es $]-\infty, -5[$

$\therefore\ S =]-\infty, -5[$

b.) $x - 7 \leq 23$

$$\begin{aligned} x - 7 + 7 &\leq 23 + 7 \\ x + 0 &\leq 30 \\ x &\leq 30 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $x - 7 \leq 23$ es $]-\infty, 30]$

$\therefore\ S =]-\infty, 30]$

c.) $2x + 5 > 9$

$$\begin{aligned} 2x + 5 + -5 &> 9 + -5 \\ 2x + 0 &> 4 \\ 2x &> 4 \\ \frac{1}{2} \cdot 2x &> \frac{1}{2} \cdot 4 \\ x &> 2 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $2x + 5 > 9$ es $]2, +\infty[$

$\therefore\ S =]2, +\infty[$

d.) $3x - 2 \geq -11$

$$\begin{aligned}
3x-2+2 &\geq -11+2\\
3x+0 &\geq -9\\
3x &\geq -9\\
\frac{1}{3}\cdot 3x &> \frac{1}{3}\cdot -9\\
x &\geq -3
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $3x-2\geq -11$ es $[-3,+\infty[$

$\therefore\ S = [-3,+\infty[$

e.) $-3x-5\leq 13$

$$\begin{aligned}
-3x-5+5 &\leq 13+5\\
-3x+0 &\leq 18\\
-3x &\leq 18\\
\frac{-1}{3}\cdot -3x &\geq \frac{-1}{3}\cdot 18\\
x &\geq -6
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $-3x-5\leq 13$ es $[-6,+\infty[$

$\therefore\ S = [-6,+\infty[$

f.) $3-2x>-2$

$$\begin{aligned}
-3+3-2x &> -3-2\\
0-2x &> -5\\
-2x &> -5\\
\frac{-1}{2}\cdot -2x &< \frac{-1}{2}\cdot -5\\
x &< \frac{5}{2}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $3-2x>-2$ es $\left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$

$\therefore\ S = \left]-\infty,\frac{5}{2}\right[$

Not: En el proceso de resolución de inecuaciones no es necesario indicar todas las transformaciones que se realicen, en las inecuaciones que resolveremos en adelante, omitiremos escribir algunas transformaciones.

Ejemplo 23

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones

a.) $2x+3>-5$

b.) $\dfrac{-x}{3}-3>2$

c.) $5x-3<8x-2$

d.) $-2+4x\leq 5x-9$

e.) $\dfrac{-x}{4}+2>\dfrac{2x}{3}+7$

f.) $(x-1)(x+2)<x^2+3$

g.) $2x-3(x+1)\geq 3x$

h.) $2(x-3)+5\geq -x$

i.) $\dfrac{x-3}{4}-1>\dfrac{x}{2}$

Solución

a.) $2x+3>-5$

$$\begin{aligned} 2x &> -5+-3 \\ 2x &> -8 \\ x &> \frac{1}{2}\cdot -8 \\ x &> -4 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $2x+3>-5$ es $]-4,+\infty[$

$\therefore\ S\ =]-4,+\infty[$

b.) $\dfrac{-x}{3}-3>2$

$$\begin{aligned}
\frac{-x}{3} &> 2+3 \\
\frac{-x}{3} &> 5 \\
x &< -3\cdot 5 \\
x &< -15
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $\dfrac{-x}{3} - 3 > 2$ es $]-\infty, -15[$

$\therefore\ S\ =\ ]-\infty, -15[$

c.) $5x - 3 < 8x - 2$

$$\begin{aligned}
5x + -8x &< -2+3 \\
-3x &< 1 \\
x &> \frac{-1}{3}\cdot 1 \\
x &> \frac{-1}{3}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $5x - 3 < 8x - 2$ es $\left]\dfrac{-1}{3}, +\infty\right[$

$\therefore\ S\ =\ \left]\dfrac{-1}{3}, +\infty\right[$

d.) $-2 + 4x \leq 5x - 9$

$$\begin{aligned}
4x + -5x &\leq -9+2 \\
-x &\leq -7 \\
x &\geq (-1)(-7) \\
x &\geq 7
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $-2 + 4x \leq 5x - 9$ es $[7, +\infty[$

$\therefore\ S\ =\ [7, +\infty[$

e.) $\dfrac{-x}{4} + 2 > \dfrac{2x}{3} + 7$

$$\begin{aligned}
\frac{-x}{4} - \frac{2x}{3} &> 7 + -2 \\
\frac{-3x - 8x}{12} &> 5 \\
-3x - 8x &> 12 \cdot 5 \\
-11x &> 60 \\
x &< \frac{-1}{11} \cdot 60 \\
x &< \frac{-60}{11}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $\frac{-x}{4} + 2 > \frac{2x}{3} + 7$ es $\left]-\infty, \frac{-60}{11}\right[$

$\therefore\ S \ = \left]-\infty, \frac{-60}{11}\right[$

f.) $(x-1)(x+2) < x^2 + 3$

$$\begin{aligned}
x^2 + 2x - x - 2 &< x^2 + 3 \\
x^2 + -x^2 + 2x - x &< 3 + 2 \\
x &< 5
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $(x-1)(x+2) < x^2 + 3$ es $]-\infty, 5[$

$\therefore\ S \ =]-\infty, 5[$

g.) $2x - 3(x+1) \geq 3x$

$$\begin{aligned}
2x - 3x - 3 &\geq 3x \\
2x - 3x - 3x &\geq 3 \\
-4x &\geq 3 \\
x &\leq \frac{-1}{4} \cdot 3 \\
x &\leq \frac{-3}{4}
\end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $2x - 3(x+1) \geq 3x$ es $\left]-\infty, \frac{-3}{4}\right]$

$\therefore\ S \ = \left]-\infty, \frac{-3}{4}\right]$

h.) $2(x-3)+5 \geq -x$

$$\begin{aligned} 2x-6+5 &\geq -x \\ 2x+x &\geq 6-5 \\ 3x &\geq 1 \\ x &\geq \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $2(x-3)+5 \geq -x$ es $\left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

$\therefore\ S = \left[\frac{1}{3}, +\infty\right[$

i.) $\dfrac{x-3}{4} - 1 > \dfrac{x}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} - \frac{3}{4} - 1 &> \frac{x}{2} \\ \frac{x}{4} - \frac{x}{2} &> \frac{3}{4} + 1 \\ \frac{2x-4x}{8} &> \frac{7}{4} \\ 2x-4x &> 8 \cdot \frac{7}{4} \\ -2x &> 14 \\ x &< \frac{-14}{2} \\ x &< -7 \end{aligned}$$

Por lo que el conjunto solución de $\dfrac{x-3}{4} - 1 > \dfrac{x}{2}$ es $]-\infty, -7[$

$\therefore\ S =]-\infty, -7[$

Ejercicios 5

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $-2x - \dfrac{5}{3} > \dfrac{x}{3} + 10$

2.) $-3x - 4 \leq \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{2}$

3.) $x - (5x - 1) - \dfrac{7 - 5x}{10} < 1$

4.) $-2x + 5 > x + 2$

5.) $\dfrac{x - 3}{4} - 1 > \dfrac{x}{2}$

6.) $-\dfrac{7x}{2} + 3 \leq \dfrac{3}{2}\,x$

En los ejemplos anteriores hemos resuelto inecuaciones en la cuales, después de haber realizado algunas transformaciones obtenemos una desigualdad de alguno de los tipos $x < c$, $x \leq c$, $x > c$, $x \geq c$, donde "x" es la incógnita y "c" es una constante real. Sin embargo al resolver inecuaciones, después de realizar ciertas transformaciones podemos obtener una desigualdad numérica de alguno de los tipos $a < c$, $a \leq c$, $a \geq c$, $a > c$, en estos casos el conjunto solución de estas inecuaciones se determina de acuerdo con las siguientes reglas.

Regla 1

Si en el proceso de resolución de una inecuación se obtiene una desigualdad numérica verdadera, entonces el conjunto solución de de la inecuación original es el dominio de la incógnita.

Regla 2

Si en el proceso de resolución de una inecuación se obtiene una desigualdad numérica falsa, entonces el conjunto solución de de la inecuación original es el conjunto vacío ($\emptyset$).

■ **Ejemplo 24**

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones

a.) $x - 3(x - 1) < -2x + 5$

b.) $(x - 2)^2 - x^2 + 4x \geq 0$

c.) $-2x + 13 \leq 2(5 - x)$

d.) $(x - 3)(x + 2) - (x^2 - x + 8) > 0$

Solución

a.) $x - 3(x - 1) < -2x + 5$

$$x - 3x + 3 < -2x + 5$$

$$x - 3x + 2x + 3 < 5$$

$$0x + 3 < 5$$

$$3 < 5$$

Como esta desigualdad es verdadera, entonces el conjunto solución de $x-3(x-1) < -2x+5$ es el dominio de la incógnita, en este caso $\mathbb{R}$

$\therefore S = \mathbb{R}$

b.) $(x-2)^2 - x^2 + 4x \geq 0$

$$x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x \geq 0$$

$$4 \geq 0$$

Como esta desigualdad es verdadera, entonces el conjunto solución de $(x-2)^2 - x^2 + 4x \geq 0$ es el dominio de la incógnita, en este caso $\mathbb{R}$

$\therefore S = \mathbb{R}$

c.) $-2x + 13 \leq 2(5 - x)$

$$-2x + 13 \leq 10 - 2x$$

$$-2x + 2x + 13 \leq 10$$

$$13 \leq 10$$

Como esta desigualdad es falsa, entonces el conjunto solución de $-2x + 13 \leq 2(5 - x)$ es vacío

$\therefore S = \emptyset$

d.) $(x-3)(x+2) - (x^2 - x + 8) > 0$

$$x^2 + 2x - 3x - 6 - x^2 + x - 8 > 0$$

$$-14 > 0$$

Como esta desigualdad es falsa, entonces el conjunto solución de $(x-3)(x+2) - (x^2 - x + 8) > 0$ es vacío

$\therefore S = \emptyset$

Ejercicios 6

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $3x + 5 < 20$

2.) $x - 5 \leq 2x - 6$

3.) $5x - 2 > 3x - 4$

4.) $3 - 7x < 7(2 - x)$

5.) $\dfrac{-3}{4}\,x + 12 \geq 24$

6.) $(x - 1)^2 - 7 > (x - 2)^2$

7.) $(x - 4)(x + 5) < (x - 3)(x - 2)$

8.) $(x - 2)(x + 2) \leq x^2 - 7$

9.) $2x - 1 < 4x - 3$

10.) $3 - 2x > 2x - 5$

11.) $x - 2(x + 3) \geq 5 - x$

12.) $x - 5(x + 2) \geq -2(2x + 6)$

4.2.2 Inecuaciones en las que cada uno de sus miembros es o puede expresarse como un producto y el otro miembro es cero

Las inecuaciones de este tipo se resuelven aplicando la ley de signos de la multiplicación definida en el conjunto de los números reales, de acuerdo con las siguientes propiedades:

Sean $a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}$

1.) $a \cdot b > 0 \Longrightarrow [(a > 0 \; y \; b > 0) \; o \; (a < 0 \; y \; b < 0)]$

2.) $a \cdot b < 0 \Longrightarrow [(a > 0 \; y \; b < 0) \; o \; (a < 0 \; y \; b > 0)]$

■ **Ejemplo 25**

Resuelva la siguiente inecuación: $(x + 3)(x - 2) < 0$

Solución. Aplicando la propiedad 2 anterior se tiene que:

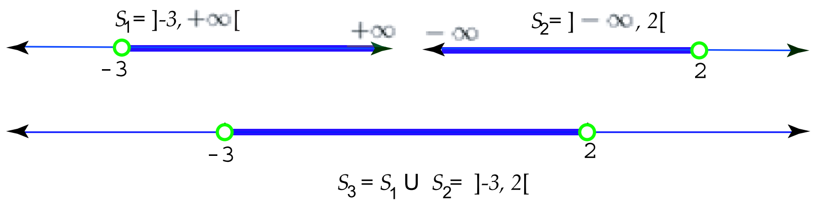
$$(x + 3)(x - 2) < 0 \quad \Longrightarrow \quad ((x + 3) > 0 \quad \text{y} \quad (x - 2) < 0) \quad \text{o} \quad ((x + 3) < 0 \quad \text{y} \quad (x - 2) > 0)$$

i.) Analicemos el caso $x + 3 > 0$ y $x - 2 < 0$

En este caso se tiene que:

$x + 3 > 0 \implies x > -3 \implies S_1 =]-3, +\infty[$

$x - 2 < 0 \implies x < 2 \implies S_2 =]-\infty, 2[$

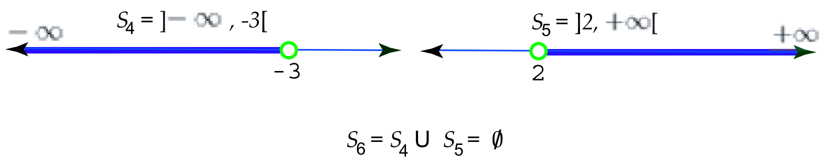


ii.) Analicemos el caso $x + 3 < 0$ y $x - 2 > 0$

En este caso se tiene que:

$x + 3 < 0 \implies x < -3 \implies S_4 =]-\infty, -3[$

$x - 2 > 0 \implies x > 2 \implies S_5 =]2, \infty[$



$S_6 = S_4 \cap S_5 = \emptyset$

La solución final será igual a la unión de las soluciones obtenidas en los casos (i) y (ii), o sea:

$$\therefore\ S_F =]-3, 2[$$

Nota: El procedimiento usado anteriormente para resolver inecuaciones de este tipo es un poco largo y tedioso, por esta razón es que preferimos resolver este tipo de inecuaciones por medio de una "tabla de signos", en la cual usaremos dos resultados generales que se enunciaran posteriormente, pero antes resolveremos algunos ejemplos que son casos particulares de dichos resultados.

■ Ejemplo 26

Para cada uno de los casos siguientes determine el intervalo en donde la expresión dada es positiva, y el intervalo en donde dicha expresión es negativa.

a.) $2x+3$

b.) $-x+3$

c.) $-3x-2$

d.) $x+5$

Solución

a.) $2x+3$

$i.)$ $2x+3$ es positiva si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & 2x+3 & > & 0 \\ \iff & 2x & > & -3 \\ \iff & x & > & \dfrac{-3}{2} \end{array}$$

o sea: $2x+3$ es positiva si y sólo sí: $x \in \left]\dfrac{-3}{2}, +\infty\right[$

$ii.)$ $2x+3$ es negativa si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & 2x+3 & < & 0 \\ \iff & 2x & < & -3 \\ \iff & x & < & \dfrac{-3}{2} \end{array}$$

o sea: $2x+3$ es negativa si y sólo sí: $x \in \left]-\infty, \dfrac{-3}{2}\right[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$ $\quad$ $-3/2$	$-3/2$ $\quad$ $+\infty$
$2x+3$	$-$	$+$

b.) $-x+3$

$i.)$ $-x+3$ es positiva si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & -x+3 & > & 0 \\ \iff & -x & > & -3 \\ \iff & x & < & 3 \end{array}$$

o sea: $-x+3$ es positiva si y sólo sí: $x \in]-\infty, 3[$

ii.) $2x+3$ es negativa si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & -x+3 & < & 0 \\ \Longleftrightarrow & -x & < & -3 \\ \Longleftrightarrow & x & > & 3 \end{array}$$

o sea: $-x+3$ es negativa si y sólo sí: $x \in]3,+\infty[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$	3	$+\infty$
$-x+3$	$+$		$-$

c.) $-3x-2$

i.) $-3x-2$ es positiva si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & -3x-2 & > & 0 \\ \Longleftrightarrow & -3x & > & 2 \\ \Longleftrightarrow & x & < & \dfrac{-2}{3} \end{array}$$

o sea: $-3x-2$ es positiva si y sólo sí: $x \in \left]-\infty, \dfrac{-2}{3}\right[$

ii.) $-3x-2$ es negativa si y sólo sí:

$$\begin{array}{rrcl} & -3x-2 & < & 0 \\ \Longleftrightarrow & -3x & < & 2 \\ \Longleftrightarrow & x & > & \dfrac{-2}{3} \end{array}$$

o sea: $-3x-2$ es negativa si y sólo sí: $x \in \left]\dfrac{-2}{3}, +\infty\right[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$	$-2/3$	$+\infty$
$-3x-2$	$+$		$-$

d.) $x+5$

$i.)$ $x+5$ es positiva si y sólo sí:

$$\begin{array}{rcl} x+5 & > & 0 \\ \Longleftrightarrow \quad x & > & -5 \end{array}$$

o sea: $x+5$ es positiva si y sólo sí: $x \in\ ]-5,+\infty[$

$ii.)$ $x+5$ es negativa si y sólo sí:

$$\begin{array}{rcl} x+5 & < & 0 \\ \Longleftrightarrow \quad x & < & -5 \end{array}$$

o sea:

$x+5$ es negativa si y sólo sí:

$x \in\ ]-\infty,-5[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$	-5	$+\infty$
$x+5$	$-$	$+$	

Resultado 1

Si a y b son constantes reales tales que $a>0$, y x es una variable real, entonces se cumple que:

$i.)$ $ax+b>0 \Longleftrightarrow x>\dfrac{-b}{a}$

$\left(ax+b \text{ es positivo si y sólo sí } x \text{ es mayor que } \dfrac{-b}{a}\right)$

$ii.)$ $ax+b<0 \Longleftrightarrow x<\dfrac{-b}{a}$

$\left(ax+b \text{ es negativo si y sólo sí } x \text{ es menor que } \dfrac{-b}{a}\right)$

En forma resumida podemos expresar este resultado en la "tabla" siguiente:

	$-\infty$	$\dfrac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax+b$	$-$	$+$	

Siempre que se cumpla que $a>0$

Resultado 2

Si a y b son constantes reales tales que $a < 0$, y x es variable real, entonces se cumple que:

i.) $ax + b > 0 \Longleftrightarrow x < \dfrac{-b}{a}$ $\quad \left(ax + b \text{ es positivo si y sólo sí } x \text{ es menor que } \dfrac{-b}{a} \right)$

ii.) $ax + b < 0 \Longleftrightarrow x > \dfrac{-b}{a}$ $\quad \left(ax + b \text{ es negativo si y sólo sí } x \text{ es mayor que } \dfrac{-b}{a} \right)$

En forma resumida podemos expresar este resultado en la“tabla” siguiente:

	$-\infty$	$\dfrac{-b}{a}$ $+\infty$
$ax + b$	$+$	$-$

Siempre que se cumpla que $a < 0$

Ejemplo 27

Para cada uno de los casos siguientes, use los resultados anteriores para determinar el intervalo en donde la expresión dada es positiva, y el intervalo en donde es negativa.

a.) $3x - 2$

b.) $-2x + 5$

c.) $-x - 2$

d.) $x - 3$

Solución
De acuerdo con los resultados anteriores se tiene:

a.) $3x - 2$

i.) $3x - 2 > 0 \Longleftrightarrow x > \dfrac{2}{3}$ o sea: $3x - 2$ es positivo si y sólo sí $x \in \left]\dfrac{2}{3}, +\infty\right[$

ii.) $3x - 2 < 0 \Longleftrightarrow x < \dfrac{2}{3}$ o sea: $3x - 2$ es negativo si y sólo sí $x \in \left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right[$

En forma resumida se tiene:

$-\infty \qquad 2/3 \qquad +\infty$

$3x-2$	$-$	$+$

b.) $-2x+5$

i.) $-2x+5>0 \Longleftrightarrow x<\dfrac{5}{2}$ o sea: $-2x+5$ es positivo si y sólo sí $x \in \left]-\infty, \dfrac{5}{2}\right[$

ii.) $-2x+5<0 \Longleftrightarrow x>\dfrac{5}{2}$ o sea: $-2x+5$ es negativo si y sólo sí $x \in \left]\dfrac{5}{2}, +\infty\right[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$ $5/2$	$5/2$ $+\infty$
$-2x+5$	$+$	$-$

c.) $-x-2$

i.) $-x-2>0 \Longleftrightarrow x<-2$ o sea $-x-2$ es positivo si y sólo sí $x \in]-\infty,-2[$

ii.) $-x-2<0 \Longleftrightarrow x>-2$ o sea $-x-2$ es negativo si y sólo sí $x \in]-2,+\infty[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$ -2	-2 $+\infty$
$-x-2$	$+$	$-$

d.) $x-3$

i.) $x-3>0 \Longleftrightarrow x>3$ o sea: $x-3$ es positivo si y sólo sí $x \in]3,+\infty[$

ii.) $x-3<0 \Longleftrightarrow x<3$ o sea: $x-3$ es negativo si y sólo sí $x \in]-\infty,3[$

En forma resumida se tiene:

	$-\infty$ 3	3 $+\infty$
$x-3$	$-$	$+$

Ejercicios 7

Para cada uno de los casos siguientes use los resultados anteriores para determinar el intervalo en donde la expresión dada es positiva, y el intervalo donde es negativa.

1.) $2x+9$

2.) $-3x+1$

3.) $-x+7$

4.) $\sqrt{3}\,x-11$

5.) $\pi x-8$

6.) $\dfrac{-3}{2}x+13$

4.2.3 Resolviendo inecuaciones con tablas de signos

Ejemplo 28

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $(x+2)(x-3)<0$

b.) $(x+4)(3x+2)>0$

c.) $(3x+3)(2x+1)<0$

d.) $(2x+5)(-x+1)>0$

e.) $x(-x-7)(-5x+2)<0$

f.) $-x(x-7)(x+5)>0$

Solución

a.) $(x+2)(x-3)<0$

Por los resultados (1) y (2) anteriores podemos determinar los intervalos en los cuales cada uno de los factores $(x+2)$ y $(x-3)$, son positivos o negativos, lo cual se puede expresar en forma resumida en una tabla como la siguiente:

$-\infty \qquad -2 \qquad 3 \qquad +\infty$

$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$

Los signos correspondientes al producto $(x+2)(x-3)$, se obtienen usando los signos de los factores $(x+2)$ y $(x-3)$ y la ley de signos para la multiplicación definida en $\mathbb{R}$, así obtenemos:

$$-\infty \qquad -2 \qquad 3 \qquad +\infty$$

$x+2$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x+2)(x-3)$	$+$	$-$	$+$

De esta última tabla puede observarse que el producto $(x+2)(x-3)$ es negativo, si y sólo sí $x \in]-2, 3[$ y por lo tanto el conjunto solución de la inecuación $(x+2)(x-3) < 0$ es: $]-2, 3[$ o sea:

$$S =]-2\,,\,3[$$

b.) $(x+4)(3x+2) > 0$

En forma similar al caso anterior obtenemos la siguiente tabla:

$$-\infty \qquad -4 \qquad \frac{-2}{3} \qquad +\infty$$

$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$

Los signos correspondientes al producto $(x+4)(3x+2)$, se obtienen usando los signos de los factores $(x+4)$ y $(3x+2)$ y la ley de signos para la multiplicación definida en $\mathbb{R}$, así obtenemos:

$$-\infty \qquad -4 \qquad \frac{-2}{3} \qquad +\infty$$

$x+4$	$-$	$+$	$+$
$3x+2$	$-$	$-$	$+$
$(x+4)(3x+2)$	$+$	$-$	$+$

De esta tabla puede observarse que el producto $(x+4)(3x+2)$ es positivo si y sólo si $x \in]-\infty, -4[$ o $x \in \left]\frac{-2}{3}, -\infty\right[$ y por lo tanto el conjunto solución de la inecuación $(x+4)(3x+2) > 0$ es: $]-\infty, -4[\ \cup \left]\frac{-2}{3}, +\infty\right[$ o sea:

$$\text{S} =]-\infty, -4\,[\ \cup \left]\frac{-2}{3}, +\infty\right[$$

Nota: En los ejemplos (a) y (b) anteriores se ha explicado la forma en que se han construido cada una de las tablas correspondientes y también la forma de determinar el conjunto solución de cada inecuación. En los ejemplos siguientes omitiremos la explicación.

c.) $(3x+3)(2x+1) < 0$

$$-\infty \quad -1 \quad \frac{-1}{2} \quad +\infty$$

$3x+3$	$-$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$-$	$+$
$(3x+3)(2x+1)$	$+$	$-$	$+$

$$\therefore \ \mathrm{S} = \left]-1, \frac{-1}{2}\right[$$

d.) $(2x+5)(-x+1) > 0$

$$-\infty \quad \frac{-5}{2} \quad 1 \quad +\infty$$

$2x+5$	$-$	$+$	$+$
$-x+1$	$+$	$+$	$-$
$(2x+5)(-x+1)$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore \ \mathrm{S} = \left]\frac{-5}{2}, 1\right[$$

e.) $x(-x-7)(-5x+2) < 0$

$$-\infty \quad -7 \quad 0 \quad \frac{2}{5} \quad +\infty$$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$-x-7$	$+$	$-$	$-$	$-$
$-5x+2$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x(-x-7)(-5x+2)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$$\therefore \ \mathrm{S} =]-\infty, -7[\ \cup \left]0, \frac{2}{5}\right[$$

f.) $-x(x-7)(x+5) > 0$

$$-\infty \quad -5 \quad 0 \quad 7 \quad +\infty$$

$-x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+5$	$-$	$+$	$+$	$+$
$-x(x-7)(x+5)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore \ \mathrm{S} =]-\infty, -5[\ \cup \ ]0, 7[$$

En el ejemplo anterior hemos resuelto inecuaciones en las cuales se involucra alguno de los signos " $<$ " o " $>$ ", en el ejemplo siguiente el objetivo es resolver inecuaciones en las que se involucra alguno de los signos " $\leq$ " o " $\geq$ "

Ejemplo 29

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $(x+1)(x-2) \leq 0$

b.) $(x-3)(x+2) \geq 0$

c.) $3(2-x)(x-3) \leq 0$

d.) $-5(-x+1)(-x-2) \geq 0$

e.) $-2x(x+2)(x-2) \leq 0$

f.) $3x(5-x)(x+2) \geq 0$

Solución

a.) $(x+1)(x-2) \leq 0$

En forma similar a los ejercicios resueltos en el ejemplo anterior formamos la siguiente "tabla"

	$-\infty$ -1	-1 2	2 $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x-2)$	$+$	$-$	$+$

De aquí sabemos que:

$(x+1)(x-2) < 0 \Longleftrightarrow x \in]-1, 2[$

Luego

$(x+1)(x+2) = 0 \Longleftrightarrow x = -1 \ \text{ o } \ x = 2$

Por lo tanto:

El conjunto solución de $(x+1)(x+2) \leq 0$ es $[-1, 2]$ o sea $S = \ [-1, 2]$

b.) $(x-3)(x+2) \geq 0$

Procediendo en forma análoga al ejemplo anterior:

$$-\infty \quad -2 \qquad 3 \quad +\infty$$

$x-3$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+2)$	$+$	$-$	$+$

De aquí sabemos que:

$(x-3)(x+2) > 0 \Longleftrightarrow x \in]-\infty, -2\ [\cup]\ 3, +\infty[$

Luego

$(x-3)(x+2) = 0 \Longleftrightarrow x = 3$ o $x = -2$

Por lo tanto:

El conjunto solución de $(x-3)(x+2) \geq 0$ es $]-\infty, -2\ ]\ \cup\ [\ 3, +\infty[$ o sea: $S =]-\infty, -2\ ]\ \cup\ [\ 3, +\infty[$

Nota: En las inecuaciones que resolveremos a continuación, no especificaremos la forma en que se obtiene el conjunto solución para cada una de ellas, el estudiante deberá justificar estos resultados.

c.) $3(2-x)(x-3) \leq 0$

$-\infty$ 2 3 $+\infty$			
3	$+$	$+$	$+$
$2-x$	$+$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$3(2-x)(x-3)$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore\ S =]-\infty, 2[\ \cup [3, +\infty[$$

Observación: En esta inecuación, 3 es un factor siempre positivo de la expresión $3(2-x)(x-3)$, pues no depende del valor de la variable x.

d.) $-5(-x+1)(-x-2) \geq 0$

$-\infty$ -2 1 $+\infty$			
-5	$-$	$-$	$-$
$-x+1$	$+$	$+$	$-$
$-x-2$	$+$	$-$	$-$
$-5(-x+1)(-x-2)$	$-$	$+$	$-$

$$S = [-2, 1]$$

Observación: En esta inecuación, -5 es un factor siempre positivo de la expresión $-5(-x+1)(-x-2)$, pues no depende del valor de la variable x.

e.) $-2x(x+2)(x-2) \leq 0$

	$-\infty$ -3	-3 0	0 1	1 $+\infty$
$-2x$	$+$	$+$	$-$	$-$
$x+3$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$-2x(x+3)(x-1)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore\ S = [-3, 0]\ \cup\ [1, +\infty[$$

f.) $3x(5-x)(x+2) \geq 0$

	$-\infty$ -2	-2 0	0 5	5 $+\infty$
$3x$	$-$	$-$	$+$	$+$
$5-x$	$+$	$+$	$+$	$-$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$3x(5-x)(x+2)$	$+$	$-$	$+$	$-$

$$\therefore\ S = [-\infty, -2]\ \cup\ [0, 5]$$

Ejercicios 8

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $(x-1)(2x+1) < 0$

2.) $6x(1-x) > 0$

3.) $(2x+3)(4x-1) \geq 0$

4.) $(5-7x)(x+2)(6x+1) \leq 0$

5.) $(2x-1)(2x-1) \geq 0$

6.) $(2x-1)^2 > 0$

7.) $(1-3x)^2 \leq 0$

8.) $-2(x+2)(3-x)(5x+1) \geq 0$

9.) $3(2-x)(4-3x)(x+2) > 0$

10.) $\dfrac{-1}{2}(x-2)(x-2)(x+2) \leq 0$

11.) $x^3(2x+7) < 0$

12.) $\sqrt{5}(2-3x)^3(x+5)^4 \leq 0$

4.3 Inecuaciones cuadráticas

Definición 16

Sean a, b, c constantes reales tales que $a \neq 0$. Sea x una variable real. Llamaremos inecuación cuadrática a toda inecuación en la que uno de sus miembros se puede llevar a una expresión de la forma $ax^2 + bx + c$ y el otro miembro es cero.

Ejemplo 30

Son inecuaciones cuadráticas:

a.) $2x^2 + 2x + 1 < 0$

b.) $x^2 - 5x + 6 \geq 0$

c.) $2x^2 + 8 > 0$

d.) $3x^2 - 27 \leq 0$

Caso 1

Consideremos como caso 1, aquel en el cual la expresión $ax^2 + bx + c$ es factorizable ($\triangle \geq 0$). Para resolver estas inecuaciones se debe factorizar la expresión $ax^2 + bx + c$, para posteriormente aplicar el procedimiento usado para resolver las inecuaciones de los ejemplos anteriores (por medio de una "tabla de signos")

Recuerde que si la expresión $ax^2 + bx + c$ es factorizable entonces se cumple que:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Con x_1 y x_2 los ceros del polinomio $ax^2 + bx + c$

Ejemplo 31

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $x^2 - 2x - 35 < 0$

b.) $2x^2 - x - 6 \geq 0$

c.) $-3x^2 + x + 2 > 0$

d.) $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$

e.) $x^2 - 4x \leq 0$

f.) $18x - 2x^2 > 0$

g.) $x^2 - 9 \geq 0$

h.) $7 - x^2 < 0$

Solución.

a.) $x^2 - 2x - 35 < 0$

Para la expresión $x^2 - 2x - 35$ se tiene:

$$\begin{aligned} \triangle &= 4 - 4(1)(-35) \\ \triangle &= 4 + 140 \\ \triangle &= 144 \end{aligned}$$

$\therefore$ $x^2 - 2x - 35$ es factorizable y además:

$$x_1 = \frac{2+\sqrt{144}}{2} \Longrightarrow x_1 = \frac{14}{2} \Longrightarrow x_1 = 7$$

$$x_2 = \frac{2-\sqrt{144}}{2} \Longrightarrow x_2 = \frac{-10}{2} \Longrightarrow x_2 = -5$$

así:

$$x^2 - 2x - 35 = (x-7)(x+5)$$

$$\therefore \quad x^2 - 2x - 35 < 0 \iff (x-7)(x+5) < 0$$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

	$-\infty$ -5	-5 7	7 $+\infty$
$x-7$	$-$	$-$	$+$
$x+5$	$-$	$+$	$+$
$(x-7)(x+5)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto el conjunto solución de $x^2-2x-35<0$ es $]-5,7\ [$, o sea : $\quad S =]-5,7[$

b.) $2x^2-x-6 \geq 0$

Para la expresión $2x^2-x-6$ se tiene:

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & 1-4(2)(-6) \\ \triangle & = & 1+48 \\ \triangle & = & 49 \end{array}$$

$\therefore \quad 2x^2-x-6$ es factorizable y además:

$$x_1 = \frac{1+\sqrt{49}}{4} \Longrightarrow x_1 = \frac{8}{4} \Longrightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{1-\sqrt{49}}{4} \Longrightarrow x_2 = \frac{-6}{4} \Longrightarrow x_2 = \frac{-3}{2}$$

Así:

$$2x^2-x-6 = 2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)$$

$$\therefore \quad 2x^2-x-6 \geq 0 \iff 2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right) \geq 0$$

Resolviendo esta última inecación se tiene:

	$-\infty$ $\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{2}$ 2	2 $+\infty$
2	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$
$x+\frac{3}{2}$	$-$	$+$	$+$
$2(x-2)\left(x+\frac{3}{2}\right)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto el conjunto solución de $2x^2-x-6<0$ es $\left]-\infty,\frac{-3}{2}\right] \cup [2,+\infty[$ o sea: $S = \left]-\infty,\frac{-3}{2}\right] \cup [2,+\infty[$

c.) $-3x^2 + x + 2 > 0$

Para la expresión $-3x^2 + x + 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \triangle &= 1 - 4(-3)(2) \\ \triangle &= 1 + 24 \\ \triangle &= 25 \end{aligned}$$

$\therefore \quad -3x^2 + x + 2$ es factorizable y además:

$$x_1 = \frac{-1 + \sqrt{25}}{-6} \Longrightarrow x_1 = \frac{4}{-6} \Longrightarrow x_1 = \frac{-2}{3}$$

$$x_2 = \frac{-1 - \sqrt{25}}{-6} \Longrightarrow x_2 = \frac{-6}{-6} \Longrightarrow x_2 = 1$$

así: $-3x^2 + x + 2 = -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1)$

$\therefore \quad -3x^2 + x + 2 > 0 \iff -3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1) > 0$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

	$-\infty$ $-2/3$	$-2/3$ 1	1 $+\infty$
-3	$-$	$-$	$-$
$x + \frac{2}{3}$	$-$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$-3\left(x + \frac{2}{3}\right)(x - 1)$	$-$	$+$	$-$

Por lo que el conjunto solución de $-3x^2 + x + 2 > 0$ es $\left]\frac{-2}{3}, 1\right[$ o sea: $S = \left]\frac{-2}{3}, 1\right[$

d.) $-2x^2 + 3x + 2 \leq 0$

Para la expresión $-2x^2 + 3x + 2$ se tiene:

$$\begin{aligned} \triangle &= 9 - 4(-2)(2) \\ \triangle &= 9 + 16 \\ \triangle &= 25 \end{aligned}$$

$\therefore \quad -2x^2 + 3x + 2$ es factorizable, además:

$$x_1 = \frac{-3 + \sqrt{25}}{-4} \Longrightarrow x_1 = \frac{2}{-4} \Longrightarrow x_1 = \frac{-1}{2}$$

$x_2 = \dfrac{-3-\sqrt{25}}{-4} \Longrightarrow x_2 = \dfrac{-8}{-4} \Longrightarrow x_2 = 2$

Así:

$-2x^2+3x+2 = -2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-2)$

$\therefore\ \ -2x^2+3x+2 \leq 0 \iff -2\left(x+\dfrac{1}{2}\right)(x-2) \leq 0$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

	$-\infty$ $\quad -1/2$	2	$+\infty$
-2	$-$	$-$	$-$
$x+\frac{1}{2}$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$-2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)$	$-$	$+$	$-$

Por lo que el conjunto solución de $-2x^2+3x+2 \leq 0$ es $\left]-\infty, \dfrac{-1}{2}\right] \cup [\,2,+\infty\,[$ o sea: $S = \left]-\infty, \dfrac{-1}{2}\right] \cup [\,2,+\infty\,[$

e.) $x^2-4x \leq 0$

Factorizando x^2-4x por factor común se tiene: $x^2-4x \leq 0 \iff x(x-4) \leq 0$

Resolviendo esta inecuación:

	$-\infty$ $\quad 0$	4	$+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$(x-4)$	$-$	$-$	$+$
$x(x-4)$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de $x^2-4x \leq 0$ es: $[\,0,4\,]$; o sea : $S = [\,0,4\,]$

f.) $18x-2x^2 > 0$

Factorizando $18x - 2x^2$ por factor común se tiene: $18x - 2x^2 > 0 \iff 2x(9-x) > 0$

Resolviendo esta inecuación:

$-\infty$	0	9	$+\infty$
$2x$	$-$	$+$	$+$
$(9-x)$	$+$	$+$	$-$
$2x(9-x)$	$-$	$+$	$-$

Por lo que el conjunto solución de $18x - 2x^2 > 0$ es $]\,0, 9\,[$; o sea : $S = \;]\,0, 9\,[$

g.) $x^2 - 9 \geq 0$

Factorizando $x^2 - 9 \geq 0$ por fórmula notable se tiene: $x^2 - 9 \geq 0 \iff (x-3)(x+3) \geq 0$

Resolviendo esta inecuación:

$-\infty$	-3	3	$+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$(x+3)$	$-$	$+$	$+$
$(x-3)(x+3)$	$+$	$-$	$+$

Por lo que : $S =]-\infty, -3] \cup [3, +\infty[$

h.) $7 - x^2 < 0$

Factorizando $7 - x^2$ por fórmula notable se tiene: $7 - x^2 < 0 \iff (\sqrt{7} - x)(\sqrt{7} - x) < 0$

Resolviendo esta inecuación:

$-\infty$	$-\sqrt{7}$	$\sqrt{7}$	$+\infty$
$\sqrt{7} - x$	$+$	$+$	$-$
$\sqrt{7} + x$	$-$	$+$	$+$
$(\sqrt{7} - x)(\sqrt{7} + x)$	$-$	$+$	$-$

Por lo que $S = \,]-\infty, -\sqrt{7}\,[\; \cup \;]\sqrt{7}, +\infty\,[$

Caso2

Consideremos como **caso 2**, aquel en el cual la expresión $ax^2 + bc + c$ no es factorizable ($\triangle < 0$). Para resolver estas inecuaciones usaremos el siguiente teorema:

Teorema 1

Sean a, b, c, constantes reales y x una variable real tales que $a \neq 0$ y $b^2 - 4ac < 0$ ($\triangle < 0$), entonces se cumple que:

i.) Si $a > 0$ entonces $ax^2 + bx + c > 0; \forall \ x \in \mathbb{R}$

ii.) Si $a < 0$ entonces $ax^2 + bx + c < 0; \forall \ x \in \mathbb{R}$

Demostración

En el teorema 3, Capítulo $III.$, se demostró que:

$ax^2 + bc + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\triangle}{4a^2}\right]$; con $\triangle = b^2 - 4ac$ y además si $\triangle < 0$ entonces $\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\triangle}{4a^2}\right] > 0; \forall \ x \in I\!R$ y por lo tanto:

i.) Si $a > 0$ entonces $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\triangle}{4a^2}\right] > 0; \forall \ x \in I\!R$ es equivalente a:

si $a > 0$ entonces $ax^2 + bc + c > 0; \forall \ x \in I\!R$

ii.) Si $a < 0$ entonces $a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\triangle}{4a^2}\right] < 0; \forall \ x \in I\!R$ es equivalente a:

si $a < 0$ entonces $ax^2 + bc + c < 0; \forall \ x \in I\!R$

Ejemplo 32

Usando el teorema anterior resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $2x^2 + x + 3 > 0$

b.) $-x^2 - x - 1 \geq 0$

c.) $3x^2 - 5x + 3 \leq 0$

d.) $-4x^2 + 3x - 5 < 0$

e.) $2x^2 + 6 \leq 0$

f.) $-3x^2 - 5 > 0$

Solución

a) $2x^2 + x + 3 > 0$

En este caso, para la expresión $2x^2 + x + 3$; se tiene:

$a = 2$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & 1^2 - 4(2)(3) \\ \triangle & = & 1 - 24 \\ \triangle & = & -23 \end{array}$$

como $\triangle < 0$ y $a > 0$, entonces $2x^2 + x + 3 > 0; \ \forall \ x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $2x^2 + x + 3 > 0$ es $\mathbb{R}$ o sea: $S = \mathbb{R}$

b) $-x^2 - x - 1 \geq 0$

En este caso, para la expresión $-x^2 - x - 1$; se tiene:

$a = -1$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (-1)^2 - 4(-1)(-1) \\ \triangle & = & 1 - 4 \\ \triangle & = & -3 \end{array}$$

como $\triangle < 0$ y $a < 0$, entonces $-x^2 - x - 1 < 0; \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $-x^2 - x - 1 \geq 0$ es vacío o sea: $\mathrm{S} = \emptyset$

c) $3x^2 - 5x + 3 \leq 0$

En este caso, para la expresión $3x^2 - 5x + 3$; se tiene:

$a = 3$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (-5)^2 - 4(3)(3) \\ \triangle & = & 25 - 36 \\ \triangle & = & -11 \end{array}$$

como $\triangle < 0$ y $a > 0$, entonces $3x^2 - 5x + 3 > 0; \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $3x^2 - 5x + 3 \leq 0$ es vacío o sea: $\mathrm{S} = \emptyset$

d) $-4x^2 + 3x - 5 < 0$

En este caso, para la expresión $-4x^2 + 3x - 5$; se tiene:

$a = -4$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (3)^2 - 4(-4)(-5) \\ \triangle & = & 9 - 80 \\ \triangle & = & -71 \end{array}$$

como $\triangle < 0$ y $a < 0$, entonces $-4x^2 + 3x - 5 < 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $-4x^2 + 3x - 5 < 0$ es $\mathbb{R}$ o sea: $\mathrm{S} = \mathbb{R}$

e) $2x^2 + 6 \leq 0$

En este caso, para la expresión $2x^2 + 6$; se tiene:

$a = 2$ y

$$\begin{aligned} \triangle &= 0 - 4(2)(6) \\ \triangle &= -48 \end{aligned}$$

como $\triangle < 0$ y $a > 0$, entonces $2x^2 + 6 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $2x^2 + 6 \leq 0$ es vacío o sea: $S = \emptyset$

f) $-3x^2 - 5 > 0$

En este caso, para la expresión $-3x^2 - 5$; se tiene:

$a = -3$ y

$$\begin{aligned} \triangle &= 0 - 4(-3)(-5) \\ \triangle &= -60 \end{aligned}$$

como $\triangle < 0$ y $a < 0$, entonces $-3x^2 - 5 < 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore$ el conjunto solución de $-3x^2 - 5 > 0$ es vacío o sea: $S = \emptyset$

Ejercicios 9

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $2x^2 - 3x - 2 < 0$

2.) $x^2 + 2x - 8 \geq 0$

3.) $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$

4.) $x^2 + x + 1 > 0$

5.) $-2x^2 - 8 > 0$

6.) $7x - 21x^2 \leq 0$

7. $3 - x^2 \geq 0$

8. $-2x^2 + 7x - 3 \geq 0$

9. $-2x^2 + 3x - 1 > 0$

10. $-4x^2 + x \geq 0$

11. $4x^2 + 4x + 1 \leq 0$

12. $x^2 - 2x + 1 > 0$

13. $x^2 + 5x + 4 \leq 0$

14. $-3x^2 + 6x - 4 > 0$

4.4 Inecuaciones polimoniales de grado mayor que 2

Definición 17

Llamaremos inecuación polimonial de grado mayor que 2, a toda inecuación en la cual uno de sus miembros es un polinomio de grado mayor que 2, y el otro miembro es cero.

Ejemplo 33

Son inecuaciones polimoniales de grado mayor que 2 :

a.) $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$

b.) $2x^4 - 4x^2 - 6x - 4 > 0$

c.) $x^5 + 32 \geq 0$

d.) $x^3 + 2x^2 + x + 2 < 0$

Para resolver inecuaciones polimoniales de grado mayor que 2, frecuentemente es necesario factorizar el polinomio que es miembro de la ecuación. Una vez factorizado dicho polinomio, se aplicará alguno de los métodos estudiados anteriormente para resolver inecuaciones.

Ejemplo 34

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$

b.) $2x^3 - 2x^2 - 2x - 4 > 0$

c.) $-x^4 + 2x^2 + 3x + 2 \geq 0$

d.) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x > 0$

Solución

a.) $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$

Debemos tratar de factorizar el polinomio $x^3 - 4x^2 + x + 6$.

Por división sintética se tiene que:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x^2 - 5x + 6)$

Ahora, factorizando $x^2 - 5x + 6$ por fórmula general se tiene:

$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$

Por lo que:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 = (x + 1)(x - 2)(x - 3)$

Así tenemos que:

$x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0 \iff (x+1)(x-2)(x-3) \leq 0$

Ahora vamos a la tabla de signos:

	$-\infty$ $\quad$ -1	-1 $\quad$ 2	2 $\quad$ 3	3 $\quad$ $+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)(x+2)(x-3)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de $x^3 - 4x^2 + x + 6 \leq 0$ es:

$]-\infty, -1] \,\cup\, [2, 3]$; o sea: $S = \,]-\infty, -1] \,\cup\, [2, 3]$

b.) $2x^3 - 2x^2 - 2x - 4 > 0$

Factoricemos el polinimio $2x^3 - 2x^2 - 2x - 4$

Por división sintética se tiene que:

$2x^3 - 2x^2 - 2x - 4 = (x-2)(2x^2 + 2x + 2)$

Ahora para $2x^2 + 2x + 2$ tenemos que:

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (2)^2 - 4(2)(2) \\ \triangle & = & 4 - 16 \\ \triangle & = & -12 \end{array}$$

Como $\triangle < 0$ entonces $2x^2 + 2x + 2$ NO es factorizable, pero como $\triangle < 0$ y $a = 2$ (coeficiente de x^2) por el teorema anterior tenemos que:

$2x^2 + 2x + 2 > 0; \forall x \in \mathbb{R}$. o sea, $2x^2 + 2x + 2$ es positivo, $\forall\ x \in \mathbb{R}$.

Así tenemos que:

$2x^3 - 2x^2 - 2x - 4 > 0 \iff (x-2)(2x^2 + 2x + 2) > 0$

y podemos resolver esta inecuación de acuerdo con la información anterior así:

	$-\infty$	2 $+\infty$
$x-2$	$-$	$+$
$2x^2+2x+2$	$+$	$+$
$(x-2)(2x^2+2x+2)$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de $2x^3-2x-4>0$ es: $]2,+\infty[$ o sea: $S=]2,+\infty[$

c.) $-x^4+2x^2+3x+2\geq 0$

Debemos factorizar el polinimio $-x^4+2x^2+3x+2$, aplicando división sintética se tiene que:

$-x^4+2x^2+3x+2=(x+1)(-x^3+x^2+x+2)(*)$ y a su vez:

$-x^3+x^2+x+2=(x-2)(-x^2-x-1)$ (**)

y para $-x^2-x-1$, tenemos:

$$\begin{array}{lcl}\triangle & = & (-1)^2-4(-1)(-1)\\ \triangle & = & 1-4\\ \triangle & = & -3\end{array}$$

Como $\triangle<0$, entonces $-x^2-x-1$ no es factorizable, y por el teorema anterior.

$-x^2-x-1<0;\forall\ x\in\mathbb{R},$ o sea $-x^2-x-1$ es negativo, $\forall\ x\in\mathbb{R}$.

Así por (*) y (**)

$-x^4+2x^2+3x+2=(x+1)(x-2)(-x^2-x-1)$

y por lo tanto:

$-x^4+2x^2+3x+2\geq 0 \iff (x+1)(x-2)(-x^2-x-1)\geq 0$

y por la imformación anterior podemos resolver esta inecuación así:

	$-\infty \quad -1$	2	$+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$-x^2-x-1$	$-$	$-$	$-$
$(x+1)(x-2)(-x^2-x-1)$	$-$	$+$	$-$

De aquí $S = \ [-1, 2]$

d.) $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x > 0$

Factorizamos el polinomio $x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x$; por factor común:

$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x = x(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)(*)$

Factorizando $x^3 - 2x^2 - 4x + 8$; por división sintética:

$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)(x^2-4)(**)$;

y factorizando $x^2 - 4$, por fórmula notable:

$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$.

Así, de (**) se tiene que:

$x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = (x-2)(x-2)(x+2)$

y por (*) se tiene que:

$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x = x(x-2)(x-2)(x+2)$ y por lo tanto:

$x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x > 0 \iff x(x-2)(x-2)(x+2) > 0$

$$-\infty \qquad -2 \qquad 0 \qquad 2 \qquad +\infty$$

x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x(x-2)(x-2)(x+2)$	$+$	$-$	$+$	$+$

De aquí: S$=\,]-\infty,-2\,[\,\cup\,]\,0,2\,[\,\cup\,]\,2,+\infty[$

Ejercicios 10

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $x^3-12x+16\geq 0$

2.) $2x^3-x^2 18x+9\leq 0$

3.) $x^3+2x^2+x+2<0$

4.) $2x^3-7x^2+4x-3>0$

5.) $x^4-16\leq 0$

6.) $x^4+3x^2-4\geq 0$

7. $2x^4-5x^3+4x^2-x>0$

8. $x^4-2x^3-3x^2+8x-4<0$

Además de inecuaciones cuadráticas y de inecuaciones polinomiales de grado mayor que 2, podemos resolver algunas otras inecuaciones que son reducibles a inecuaciones cuadráticas, o bien a inecuaciones polinomiales de grado mayor que 2, aplicando las transformaciones estudiadas en este capitulo, y también las propiedades y algoritmos de las operaciones definidas en $\mathbb{R}$.

■ Ejemplo 35

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $x^2+5x+4\leq 2x+4$

b.) $4x^2+8x-5>5x-6$

c.) $x^4-1\geq -x^4+1$

d.) $x^3-2x^2+2<x^2+x-1$

Solución.

a.)

$$\begin{array}{rrcl} & x^2+5x+4 & \leq & 2x+4 \\ \Longleftrightarrow & x^2+5x+4-2x-4 & \leq & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^2+3x & \leq & 0 \\ \Longleftrightarrow & x(x+3) & \leq & 0 \end{array}$$

	$-\infty$ -3	0	$+\infty$
x	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$x(x+3)$	$+$	$-$	$+$

De aquí: $S = [-3, 0]$

b.)

$$
\begin{aligned}
& 4x^2+8x-5 &>& \;5x-6 \\
\iff & 4x^2+8x-5-5x+6 &>& \;0 \\
\iff & 4x^2+3x+1 &>& \;0
\end{aligned}
$$

Para $4x^2+3x+1$ se tiene:

$a = 4$ y

$$
\begin{aligned}
\triangle &= (3)^2-4(4)(1) \\
\triangle &= 9-16 \\
\triangle &= -7
\end{aligned}
$$

Como $\triangle < 0$ y $a > 0$, entonces: $4x^2+3x+1 > 0$; $\forall x \in \mathbb{R}$

$\therefore \quad S = \mathbb{R}$

c.)

$$
\begin{aligned}
& x^4-1 &\geq& \;-x^4+1 \\
\iff & x^4-1+x^4-1 &\geq& \;0 \\
\iff & 2x^4-2 &\geq& \;0 \\
\iff & 2(x^4-1) &\geq& \;0 \\
\iff & 2(x^2-1)(x^2+1) &\geq& \;0 \\
\iff & 2(x-1)(x+1)(x^2+1) &\geq& \;0 \quad (*)
\end{aligned}
$$

Observe que x^2+1 no es factorizable y además es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$

	$-\infty$, -1	-1 , 1	1 , $+\infty$
2	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
x^2+1	$+$	$+$	$+$
$2(x-1)(x+1)(x^2+1)$	$+$	$-$	$+$

Por lo tanto el conjunto de solución de la inecuación (*), y por lo tanto de la inecuación original, es: S= $]-\infty,-1]\ \cup\ [1,+\infty[$

d.)

$$\begin{array}{rrcl} & x^3-2x^2+2 & < & x^2+x-1 \\ \Longleftrightarrow & x^3-2x^2+2-x^2-x+1 & < & 0 \\ \Longleftrightarrow & x^3-3x^2-x+3 & < & 0\ (*) \end{array}$$

Factorizando x^3-3x^2-x+3 por agrupación se tiene:

$$\begin{array}{rcl} x^3-3x^2-x+3 & = & (x^3-3x^2)+(-x+3) \\ & = & x^2(x-3)-(x-3) \\ & = & (x-3)(x^2-1) \\ & = & (x-3)(x-1)(x+1) \end{array}$$

o sea: $x^3-3x^2-x+3=(x-3)(x-1)(x+1)$

volviendo a (*) obtenemos:

$x^3-3x^2-x+3<0 \iff (x-3)(x-1)(x+1)<0$

	$-\infty$, -1	-1 , 1	1 , 3	3 , $+\infty$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(x-3)(x-1)(x+1)$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que S= $]-\infty,-1[\cup]1,3[$

Ejercicios 11

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $x^2 - 4 \leq x - 2$

2.) $3x^2 - 4x + 5 \geq x^2 + 5$

3.) $2x^3 + x^2 + 1 > -2x - 2$

4.) $x^3 - 6 > 2x^2 - 3x$

4.4.1 Inecuaciones en las que uno de sus miembros es un cociente y el otro miembro es cero.

En general estudiaremos los tipos $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$; $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$; $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$; $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ en donde $P(x)$ y $Q(x)$ son polinomios con, $Q(x) \neq 0$.

Para resolver este tipo de inecuaciones nos basaremos en las siguientes propiedades:

Propiedades

Sean $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}$, con $b \neq 0$

1.) $\dfrac{a}{b} < 0 \iff a \cdot b < 0$

2.) $\dfrac{a}{b} \leq 0 \iff a \cdot b \leq 0$

3.) $\dfrac{a}{b} > 0 \iff a \cdot b > 0$

4.) $\dfrac{a}{b} \geq 0 \iff a \cdot b \geq 0$

Estas propiedades se pueden generalizar para polinomios de modo $P(x)$ y $Q(x)$ con, $Q(x) \neq 0$, entonces:

1.) Resolver $\dfrac{P(x)}{Q(x)} < 0$ es equivalente a resolver $P(x) \cdot Q(x) < 0$

2.) Resolver $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \leq 0$ es equivalente a resolver $P(x) \cdot Q(x) \leq 0$

3.) Resolver $\dfrac{P(x)}{Q(x)} > 0$ es equivalente a resolver $P(x) \cdot Q(x) > 0$

4.) Resolver $\dfrac{P(x)}{Q(x)} \geq 0$ es equivalente a resolver $P(x) \cdot Q(x) \geq 0$

Por lo anterior es que al resolver inecuaciones en las cuales uno de sus miembros es un cociente y el otro miembro es cero, usaremos tablas de signos tal y como se hizo para resolver inecuaciones, en las cuales uno de sus miembros es un producto y el otro es cero.

■ Ejemplo 36

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 0$

b.) $\dfrac{3-x}{x+1} < 0$

c.) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-4)} \leq 0$

d.) $\dfrac{x-2}{(2x+1)(x-5)} > 0$

e.) $\dfrac{6}{(x-3)(2-x)} \geq 0$

f.) $\dfrac{-3}{(2x-1)(3x+2)} \leq 0$

Solución

a.) $\dfrac{x-2}{x+3} \geq 0$

En este caso debe cumplirse que $x+3$ sea diferente de cero; pero $x+3=0 \iff x=-3$.

La“tabla de signos “correspondiente a esta inecuación se obtiene así:

	$-\infty$ -3	2	$+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$
$x+3$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{(x-2)}{(x+3)}$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que el cociente $\dfrac{(x-2)}{(x+3)}$ es mayor o igual que cero, si y sólo sí $x \in \,]-\infty,-3[\,\cup\,[2,+\infty\,[$.

Por lo que el conjunto solución de $\dfrac{(x-2)}{(x+3)} \geq 0$ es S, donde

$$\text{S}= \,]-\infty,-3\,[\,\cup\,[\,2,+\infty[$$

Nota

1.) La doble línea vertical en -3, se utilizó para indicar que -3 no pertenece al dominio de la incógnita.

2.) -3 no se incluye en el conjunto solución, por no pertenecer al dominio de la incógnota.

b.) $\dfrac{3-x}{x+1} < 0$

En este caso debe cumplirse que $x+1$ sea diferente de cero; pero $x+1=0 \iff x=-1$.

La "tabla de signos "correspondiente a esta inecuación se obtiene así:

	$-\infty$ -1	-1 3	3 $+\infty$
$3-x$	$+$	$+$	$-$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{(3-x)}{(x+1)}$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que el cociente $\dfrac{(3-x)}{(x+1)}$ es menor que cero, si y sólo sí $x \in]-\infty, -1[\, \cup \,]\, 3, +\infty\, [$.

Por lo que el conjunto solución de $\dfrac{(3-x)}{(x+1)} < 0$ es S, donde

$$\text{S}= \,]-\infty, -1\,[\, \cup \,]\, 3, +\infty[$$

Nota

La doble línea vertical en -1, se utilizó para indicar que -1 no pertenece al dominio de la incógnita.

Las inecuaciones siguientes serán resueltas en una forma más resumida, omitiremos la explicación correspondiente a cada uno de los pasos involucrados, el estudiante debe saber justificar cada uno de dichos pasos.

c.) $\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-4)} \leq 0$

Debe cumplirse que $x-4 \neq 0$, o sea $x \neq 4$.

	$-\infty$ -1	-1 2	2 4	4 $+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x-4)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$\text{S}= \,]-\infty, -1\,] \;\cup\; [\,2,\, 4\,[$$

d.) $\dfrac{x-2}{(2x+1)(x-5)} > 0$

Debe cumplirse que $2x+1 \neq 0$ y $x-5 \neq 0$, o sea $x \neq \dfrac{-1}{2}$ y $x \neq 5$.

	$-\infty$ — $-1/2$	$-1/2$ — 2	2 — 5	5 — $+\infty$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$2x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x-2)}{(2x+1)(x-5)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$S = \left]\frac{-1}{2}, 2\right[\cup \left]5, +\infty\right[$$

e.) $\dfrac{6}{(x-3)(2-x)} \geq 0$

Debe cumplirse que $x-3 \neq 0$ y $2-x \neq 0$, o sea $x \neq 3$ y $x \neq 2$.

	$-\infty$ — 2	2 — 3	3 — $+\infty$
6	$+$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$+$
$2-x$	$+$	$-$	$-$
$\dfrac{6}{(x-3)(2-x)}$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que:

$$S = \left]2, 3\right[$$

f.) $\dfrac{-3}{(2x-1)(3x+2)} \leq 0$

Debe cumplirse que $2x-1 \neq 0$ y $3x+2 \neq 0$, o sea $x \neq \dfrac{1}{2}$ y $x \neq \dfrac{-2}{3}$.

	$-\infty$ — $\frac{-2}{3}$	$\frac{-2}{3}$ — $\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$ — $+\infty$
-3	$-$	$-$	$-$
$2x-1$	$-$	$-$	$+$
$3x+2$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{-3}{(2x-1)(3x+2)}$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que:

$$S = \left]-\infty, \frac{-2}{3}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$$

Ejercicios 12

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $\dfrac{x-7}{x+2} \leq 0$

2.) $\dfrac{(x-1)(4-x)}{2x+1} \geq 0$

3.) $\dfrac{3x+1}{(1-2x)(3-x)} > 0$

4.) $\dfrac{-2}{2x-3} > 0$

5.) $\dfrac{-5}{(2x+5)(x+4)} < 0$

6.) $\dfrac{(x-2)(x+3)}{2(x-3)} \geq 0$

7.) $\dfrac{2-x}{3x+1} < 0$

8.) $\dfrac{x+7}{(x+3)(2-x)} \leq 0$

9.) $\dfrac{(1-x)(2+x)}{(3x+1)(5-x)} > 0$

■ **Ejemplo 37**

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

a.) $\dfrac{x^2-4x-5}{x-4} > 0$

b.) $\dfrac{9-x^2}{(x-2)(1-x)} < 0$

c.) $\dfrac{(x+2)}{x^2-4x} \leq 0$

d.) $\dfrac{-2x}{x^2+x+3} \geq 0$

e.) $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x+4} < 0$

f.) $\dfrac{x^3+4x}{x+1} \leq 0$

Solución

a.) $\dfrac{x^2-4x-5}{x-4} > 0$

En este caso 4 no pertenece al dominio de la incógita ($x \neq 4$); además debemos factorizar (si es posible) el numerador.

Aplicando fórmula general se tiene que:

$x^2-4x-5 = (x-5)(x+1)$

Por lo que:

$\dfrac{x^2-4x-5}{x-4} > 0 \iff \dfrac{(x-5)(x+1)}{x-4} > 0$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

$-\infty \quad -1 \quad 4 \quad 5 \quad +\infty$

$x-5$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{(x-5)(x+1)}{(x-4)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de: $\dfrac{x^2-4x-5}{x-4} > 0$ es S, donde:

$$S =]-1,\, 4\,[\cup]\,5, +\infty\,[$$

b.) $\dfrac{9-x^2}{(x-2)(1-x)} < 0$

En este caso 1 y 2 no pertenecen al dominio de la incógnita ($x \neq 1$ y $x \neq 2$); además debemos factorizar el numerador (si es posible).

Por fórmula notable se tiene que;

$9-x^2 = (3-x)(3+x)$

Por lo que:

$\dfrac{9-x^2}{(x-2)(1-x)} < 0 \iff \dfrac{(3-x)(3+x)}{(x-2)(1-x)} < 0$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

	$-\infty$ -3	1	2	3	$+\infty$
$3-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$3+x$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{(3-x)(3+x)}{(x-2)(1-x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de: $\dfrac{9-x^2}{(x-2)(1-x)} < 0$ es S, donde:

$$S =]-3,\, 1\,[\, \cup \,]\,2,\; 3\,[$$

c.) $\dfrac{(x+2)}{x^2-4x} \leq 0$

En este caso debemos factorizar el denominador si es posible. Por factor común se tiene que: $x^2 - 4x = x(x-4)$ y de aquí, como el denominador debe ser diferente de cero, entonces debe cumplirse que:

$$x \neq 0 \quad \text{y} \quad x \neq 4$$

Así se tiene: $\dfrac{x+2}{x^2-4x} \leq 0 \iff \dfrac{x+2}{x(x-4)} \leq 0$

Resolviendo esta última inecuación se tiene:

	$-\infty$ -2	0	4	$+\infty$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-4$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{(x+2)}{x(x-4)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de: $\dfrac{x+2}{x^2-4} \leq 0$ es S, donde:

$$S =]-\infty,\, -2\,]\, \cup \,]\,0,\, 4\,[$$

d.) $\dfrac{2x}{x^2+x+3} \geq 0$

En este caso debemos factorizar el denominador, si es posible, pero para x^2+x+3, se tiene:

$a = 1$ y

$$\begin{array}{rcl} \triangle & = & (1)^2 - 4(1)(3) \\ \triangle & = & 1 - 12 \\ \triangle & = & -11 \end{array}$$

Como $\triangle < 0$, entonces x^2+x+3 no es factorizable en $\mathbb{R}$, además como $a > 0$ y $\triangle < 0$ entonces x^2+x+3, es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$, por lo tanto, la tabla de signos correspondiente a:

$\dfrac{2x}{x^2+x+3} \geq 0$ es:

$-\infty$	0	$+\infty$
$-2x$	$+$	$-$
x^2+x+3	$+$	$+$
$\dfrac{-2x}{x^2+x+3}$	$+$	$-$

Por lo que el conjunto solución de: $\dfrac{2x}{x^2+x+3} \geq 0$ es S, donde:

$$S =]-\infty, 0]$$

e.) $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x+4} < 0$

En este caso -4 no pertenece al dominio de la incógnita, además debemos factorizar el numerador, si es posible.

Por factor común se tiene: $x^3+x^2-2x = x(x^2+x-2)$ (*)

Aplicando fórmula general a x^2+x-2 se tiene: $x^2+x-2 = (x+2)(x-1)$

Volviendo a (*) tenemos: $x^3+x^2-2x = x(x+2)(x-1)$

Así: $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x+4} < 0 \iff \dfrac{x(x+2)(x-1)}{x+4} < 0$

Resolviendo esta inecuación se tiene:

	$-\infty$	-4	-2	0	1 $+\infty$
x	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x+4$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{x(x+2)(x-1)}{(x+4)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

Por lo que el conjunto solución de: $\dfrac{x^3+x^2-2x}{x+4} < 0$ es S, donde:

$$S =]-4, -2\,[\,\cup\,]\,0, 1\,[$$

f.) $\dfrac{x^3+4x}{x+1} \leq 0$

En este caso -1 no pertenece al dominio de la incógnita, además debemos factorizar el numerador, si es posible.

Por factor común se tiene: $x^3+4x = x(x^2+4)(*)$

Aplicando formula general a x^2+4, se tiene: $a=1$ y

$$\begin{aligned}\triangle &= 0^2 - 4(1)(4)\\ \triangle &= -16\end{aligned}$$

Como $\triangle < 0$, y $a > 0$ entonces x^2+4 es positivo $\forall x \in \mathbb{R}$ y además no es factorizable por lo que la factorización completa de x^3+4x es la indicada en (*)

Así: $\dfrac{x^3+4x}{x+1} \leq 0 \iff \dfrac{x(x^2+4)}{x+1} \leq 0$

Resolviendo este inecuación se tiene:

	$-\infty$	-1	0 $+\infty$
x	$-$	$-$	$+$
x^2+4	$+$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$
$\dfrac{x(x^2+4)}{x+1}$	$+$	$-$	$+$

Por lo que

$$S =]-1\,,\,0]$$

Ejercicios 13

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones:

1.) $\dfrac{x^2+2x}{(1-x)(x-2)} \geq 0$

2.) $\dfrac{x^2+3}{(x+5)(x+3)} \leq 0$

3.) $\dfrac{3-x}{3x^2-6x} < 0$

4.) $\dfrac{-x^2+4x-5}{x^3+5x^2} > 0$

5.) $\dfrac{-2x^2+3x-2}{x^3+5x^2} \geq 0$

6.) $\dfrac{-4}{-3x^4+11x^2+4} \leq 0$

7. $\dfrac{-6x}{-x^2+3x-2} < 0$

8. $\dfrac{-3x^2+5x-3}{x^3+2x^2+x+2)} > 0$

Aplicando las transformaciones estudiadas en este capitulo, y además los algoritmos estudiados para realizar operaciones con fracciones racionales (capitulo $III.$)), podemos resolver inecuaciones que se pueden reducir a una inecuación, en la cual uno de sus miembros es un cociente y el otro miembro es cero, como se ilustra en los ejemplos anteriores.

■ **Ejemplo 38**

Resuelva cada una de las siguientes inecuacciones:

a.) $1 - \dfrac{x+2}{x-5} \geq 0$

b.) $\dfrac{1}{x-2} < 2$

c.) $\dfrac{3}{2} + \dfrac{x}{x-1} > \dfrac{-2}{x-1}$

d.) $\dfrac{x-5}{x+3} \leq \dfrac{2x+1}{x+3}$

e.) $\dfrac{3}{1-x} \geq \dfrac{x+6}{2-x}$

f.) $\dfrac{3-x}{x-2} < \dfrac{x-5}{1-x}$

g.) $\dfrac{3x}{x^2-1} - \dfrac{1}{x^2-x} \leq \dfrac{2x^2+1}{x^3-x}$

h.) $\dfrac{6x}{x^2-4x+3} > \dfrac{2}{12-4x}$

Solución.

Nota: En la solución de estas inecuaciones omitiremos la justificación de cada paso, dicha justificación debe ser brindada por el estudiante.

a.)

$$\begin{array}{rrcl} & 1-\dfrac{x+2}{x-5} & \geq & 0 \\ \iff & \dfrac{1\cdot(x-5)-1(x+2)}{x-5} & \geq & 0 \\ \iff & \dfrac{x-5x-2}{x-5} & \geq & 0 \\ \iff & \dfrac{-7}{x-5} & \geq 0\ ; & x \neq 5 \end{array}$$

$-\infty$		5	$+\infty$
-7	$-$		$-$
$x-5$	$-$		$+$
$\dfrac{-7}{x-5}$	$+$		$-$

De aquí se tiene que:

$$S =]-\infty, 5[$$

b.)

$$\begin{array}{rrcl} & \dfrac{1}{x-1} & < & 2 \\ \iff & \dfrac{1}{x-1}-2 & < & 0 \\ \iff & \dfrac{1-2(x-1)}{x-1} & < & 0 \\ \iff & \dfrac{1-2x+2}{x-1} & < & 0 \\ \iff & \dfrac{-2x+3}{x-1} & < & 0\ ;\ \ x \neq 1 \end{array}$$

$-\infty$		1		3/2	$+\infty$
$-2x+3$	$+$		$+$		$-$
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$\dfrac{-2x+3}{x-1}$	$-$		$+$		$-$

De aquí se tiene que:

$$S = \ ]-\infty, 1[\cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

c.)

$$\begin{aligned}
& \frac{3}{2}+\frac{x}{x-1} && > && \frac{-2}{x-1} \\
\iff & \frac{3}{2}+\frac{x}{x-1}-\frac{-2}{x-1} && > && 0 \\
\iff & \frac{3}{2}+\frac{x}{x-1}+\frac{2}{x-1} && > && 0 \\
\iff & \frac{3(x-1)+2x+2\cdot 2}{2(x-1)} && > && 0 \\
\iff & \frac{3x-3+2x+4}{2(x-1)} && > && 0 \\
\iff & \frac{5x+1}{2(x-1)} && > && 0\ ; \quad x\neq 1
\end{aligned}$$

	$-\infty$ $-1/5$		1 $+\infty$
$5x+1$	$-$	$+$	$+$
2	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$\frac{5x+1}{2(x-1)}$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$S=\left]-\infty,\frac{-1}{5}\right[\ \cup\ ]1,+\infty[$$

d.)

$$\begin{aligned}
& \frac{x-5}{x+3} && \leq && \frac{2x+1}{x+3} \\
\iff & \frac{x-5}{x+3}-\frac{2x+1}{x+3} && \leq && 0 \\
\iff & \frac{x-5-(2x+1)}{x+3} && \leq && 0 \\
\iff & \frac{x-5-2x-1}{x+3} && \leq && 0 \\
\iff & \frac{-x-6}{x+3} && \leq && 0\ ; \quad x\neq -3
\end{aligned}$$

$-\infty \quad -6 \quad -3 \quad +\infty$

$-x-6$	$+$	$-$	$-$
$x+3$	$-$	$-$	$+$
$\dfrac{-x-6}{x+3}$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que:

$$S = \;]-\infty, -6\,] \;\cup\;]-3, +\infty[$$

e.)

$$
\begin{array}{rrcl}
 & \dfrac{3}{1-x} & \geq & \dfrac{x+6}{2-x} \\
\iff & \dfrac{3}{1-x} - \dfrac{x+6}{2-x} & \geq & 0 \\
\iff & \dfrac{3(2-x)-(1-x)(x+6)}{(1-x)(2-x)} & \geq & 0 \\
\iff & \dfrac{6-3x-(x+6-x^2-6x)}{(1-x)(2-x)} & \geq & 0 \\
\iff & \dfrac{6-3x-x-6+x^2+6x}{(1-x)(2-x)} & \geq & 0 \\
\iff & \dfrac{x^2+2x}{(1-x)(2-x)} & \geq & 0 \\
\iff & \dfrac{x(x+2)}{(1-x)(2-x)} & \geq & 0\,; \quad x \neq 1 \text{ y } x \neq 2
\end{array}
$$

$-\infty \quad -2 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$

x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$+$	$+$	$-$	$-$
$2-x$	$+$	$+$	$+$	$+$	$-$
$\dfrac{x(x+2)}{(1-x)(2-x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$S = \;]-\infty, -2] \;\cup\; [0,\, 1[\;\cup\;]\,2,\, +\infty[$$

f.)

$$
\begin{aligned}
& & \frac{3-x}{x-2} &< \frac{x-5}{1-x} \\
&\Longleftrightarrow & \frac{3-x}{x-2}-\frac{x-5}{1-x} &< 0 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{(3-x)(1-x)-(x-5)(x-2)}{(x-2)(1-x)} &< 0 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{3-3x-x+x^2-(x^2-2x-5x+10)}{(x-2)(1-x)} &< 0 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{3-3x-x+x^2-x^2+2x+5x-10}{(x-2)(1-x)} &< 0 \\
&\Longleftrightarrow & \frac{3x-7}{(x-2)(1-x)} &< 0\ ;\ \ x \neq 2 \text{ y } x \neq 1
\end{aligned}
$$

	$-\infty$ — 1	1 — 2	2 — $7/3$	$7/3$ — $+\infty$
$3x-7$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$1-x$	$+$	$-$	$-$	$-$
$\dfrac{3x-7}{(x-2)(1-x)}$	$+$	$-$	$+$	$-$

De aquí se tiene que:

$$S = \;]\,1,2\,[\; \cup \left]\,\frac{7}{3},+\infty\right[$$

g.)

$$
\begin{aligned}
& & \frac{3x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x} &\leq \frac{2x^2+1}{x^3-x} \\
&\iff & \frac{3x}{x^2-1} - \frac{1}{x^2-x} - \frac{2x^2+1}{x^3-x} &\leq 0 \\
&\iff & \frac{3x}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2x^2+1}{x(x^2-1)} &\leq 0 \\
&\iff & \frac{3x}{(x-1)(x+1)} - \frac{1}{x(x-1)} - \frac{2x^2+1}{x(x-1)(x+1)} &\leq 0 \\
&\iff & \frac{(3x)(x) - 1(x+1) - (2x^2+1)}{x(x-1)(x+1)} &\leq 0 \\
&\iff & \frac{3x^2 - x - 1 - 2x^2 - 1}{x(x-1)(x+1)} &\leq 0 \\
&\iff & \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)(x+1)} &\leq 0 \\
&\iff & \frac{(x-2)(x+1)}{x(x-1)(x+1)} &\leq 0 \text{ considerando } x \neq -1 \\
&\iff & \frac{x-2}{x(x-1)} &< 0\,; \quad x \neq 0 \text{ y } x \neq 1
\end{aligned}
$$

$-\infty \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad +\infty$

$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$+$
x	$-$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{(x-2)}{x(x-1)}$	$-$	$-$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$S =]-\infty, -1[\,\cup\,]-1, 0[\,\cup\,]1, 2[$$

Observe que es importante la restricción $x \neq -1$, a pesar que el factor correspondiente fue simplificado.

h.)

$$
\begin{aligned}
\iff \quad & \frac{6x}{x^2-4x+3} &>& \frac{2}{12-4x} \\
\iff \quad & \frac{6x}{x^2-4x+3} - \frac{2}{12-4x} &>& 0 \\
\iff \quad & \frac{6x}{(x-3)(x-1)} - \frac{2}{4(3-x)} &>& 0 \\
\iff \quad & \frac{6x}{(x-3)(x-1)} - \frac{2}{-4(x-3)} &>& 0 \\
\iff \quad & \frac{6x(-4)-2(x-1)}{-4(x-3)(x-1)} &>& 0 \\
\iff \quad & \frac{-24x-2x+2}{-4(x-3)(x-1)} &>& 0 \\
\iff \quad & \frac{-26x+2}{-4(x-3)(x-1)} &>& 0; \;\; x \neq 3, \;\; x \neq 1
\end{aligned}
$$

$-\infty$ $\quad 1/13 \quad 1 \quad 3 \quad +\infty$

$-26x+2$	$+$	$-$	$-$	$-$
-4	$-$	$-$	$-$	$-$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\frac{-26x+2}{-4(x-3)(x-1)}$	$-$	$+$	$-$	$+$

De aquí se tiene que:

$$S = \left]\frac{1}{13}, 1\right[\cup \left]3, +\infty\right[$$

Ejercicios 14

Resuelva cada una de las siguientes inecuaciones.

1.) $\dfrac{x+1}{x^2+3x} \geq \dfrac{1}{x}$

2.) $\dfrac{x+3}{2} - \dfrac{2x-4}{3} < \dfrac{3x+2}{6}$

3.) $\dfrac{5}{x-2} + \dfrac{x}{1-x} \leq \dfrac{-7x+6}{(x-2)(1-x)}$

4.) $\dfrac{(x+7)x+10}{x+10} > 0$

5.) $\dfrac{9}{x+2} < \dfrac{21}{x+4} - 2$

6.) $\dfrac{x-5}{1-x} \leq \dfrac{3-x}{x-2}$

7.) $\dfrac{2x^2-x}{x^2-2x+1} \geq \dfrac{x}{x-1}$

8.) $\dfrac{2x+1}{x(x-3)} > \dfrac{3}{x-3}$

9.) $\dfrac{x-5}{4-x} \leq \dfrac{3-x}{x-2}$

10.) $2 - \dfrac{x}{x+3} \geq \dfrac{-x}{2-x}$

11.) $\dfrac{1}{2-x} > \dfrac{x^2}{-x^2+3x-2}$

12.) $\dfrac{(x-3)x-4}{x-4} \leq \dfrac{(x+2)x-2}{x-2}$

13.) $\dfrac{-x}{x-2} + \dfrac{3}{x+2} \leq \dfrac{2-x}{x^2-4}$

14.) $\dfrac{-x^2}{4-x} \geq \dfrac{x^3-x+1}{(4-x)^2}$