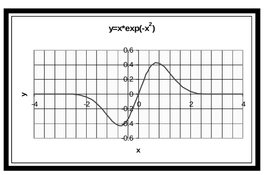
Teoría de máximos y mínimos

2

Definición de extremos relativos

- Un número y1=f(c1) es un máximo relativo de una función f, si f(x)<f(c1) para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c1.
- Un número y1=f(c1) es un mínimo relativo de una función f, si f(x)>f (c1) para toda x en algún intervalo abierto que contenga a c1.



- Por ejemplo: la función

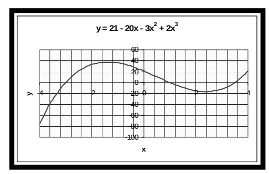
F (x)= x* exp. (-x2)

- tiene un máximo relativo en x =0.7 y un mínimo relativo en x =-0.7

3

Definición de extremos absolutos

- Sea f(x) una función definida en un intervalo I, decimos que:
  - Un número f(c) es un máximo absoluto de f si f(x)<f(c) para todo x en el intervalo I.
  - Un número f(c) es un mínimo absoluto de f si f(x)>f(c) para todo x en el intervalo I.



Por ejemplo, si consideramos la función

F (x) = 21 - 20x - 3x2 + 2x3

En el intervalo [-4,4] entonces f (x) tiene:

- un máximo absoluto en x = -1.4
- y un mínimo absoluto en x = -4

Definición de punto crítico de una función

– Un valor crítico de una función f(x) es un número c en su dominio para el cual f'(c)=0 ó f'(c) no existe.

–

– Ejemplos:
- f(x) = |x| tiene punto crítico en x=0. En ese punto f'(x) no existe.
- f(x)=x3-3x tiene puntos críticos en x =-1,1. En esos puntos la derivada es igual a cero.

5

Teorema de extremos relativos en puntos críticos

- Si una función f(x) tiene un extremo relativo en un número c, entonces c es un valor crítico.
- Ejemplos:
  - f(x) = |x| tiene mínimo relativo en x = 0. Ese punto es un punto crítico.
  - f(x)=x3-3x tiene máximo relativo y = 2 en x = -1 y tiene mínimo relativo y = -2 en x = 1.
  - Los puntos x= -1,1 son puntos críticos

6

Teorema de existencia de extremos absolutos

- Si f(x) es una función continua en un intervalo cerrado [a,b] entonces f(x) alcanza sus valores extremos absolutos (máximo y mínimo) en el intervalo.
- Ejemplo:
  - f(x) = x2-4 en el intervalo [-2,3] tiene un valor mínimo y=-4 en x=0 y un valor máximo y=5 en x=3. Estos valores máximo y mínimo son los extremos absolutos de f en el intervalo [-2,3].

7

Teorema de extremos absolutos de funciones continuas en intervalos cerrados

- Si f(x) es continua en un intervalo cerrado [a,b], entonces un extremo absoluto ocurre en un punto frontera del intervalo o en un valor crítico en el intervalo abierto (a,b).

8

Método para determinar extremos absolutos de una función continua y=f(x) en [a,b]

- Evaluar f en los extremos x=a y x=b.
- Determinar todos los valores críticos c1, c2, c3,..., cn en (a,b).
- Evaluar f en todos los valores críticos.
- El más grande y el más pequeño de los valores de la lista, f(a), f(b), f(c1), f(c2),..., f (cn) son el máximo absoluto y el mínimo absoluto, respectivamente, de f en el intervalo [a,b].

9

Ejercicio

- Determinar los extremos absolutos de y = f (x)=x2-6x en [0,5]
- Solución:
  - Evaluamos *y = f (x)* en *x =0* y en *x =5*. Obtenemos *f(0)=0*; *f(5)=25-30=-5*.
  - La derivada es *y'=2x-6*. Si igualamos a cero obtenemos *x=3*.
  - Evaluamos *y = f (x)* en *x =3*. Obtenemos *f(3)=9-18=-9*.
  - Formamos el conjunto *{0,-5,-9}*
  - Concluimos que el máximo absoluto de *f* es 0 y se alcanza en *x =0* y que el mínimo absoluto de *f* es –9 y se alcanza en *x=3.*

10

Teorema: criterio de la primera derivada para extremos relativos

- Sea f(x) continua en [a,b] y diferenciable en (a,b), excepto posiblemente en el valor crítico c.
- Si f '(x)>0 para a<x<c y f '(x) < 0 para c<x<b entonces f(c) es un máximo relativo.
- Si f '(x)<0 para a<x<c y f '(x)>0 para c<x<b entonces f(c) es un mínimo relativo.

11

Ejercicio

- Determinar los extremos relativos de y =5-36x-3x2 + 2x3 usando el criterio de la primera derivada.
- Solución:
  - Primero calcularemos los puntos críticos. Es decir, hacemos la derivada igual a cero y resolvemos la ecuación resultante.
  - Como y' = -36 - 6x + 6x2 = 0 se tiene que x = -2,3.
  - Nuestro segundo paso es elaborar un tabla que permita concluir cuando crece la función (f'>0) y cuando decrece (f'<0)

12

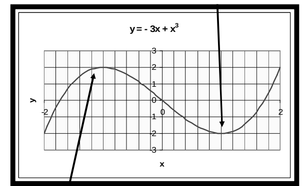
Punto crítico	Intervalos	Punto prueba	Signo de la derivada $y' = -36 - 6x + 6x^2$	Conclusión
	(-inf. , -2)	-3	+	f crece
X =-2				f tiene máximo en x=-2
	(-2 , 3)	0	-	f decrece
X =3				f tiene mínimo en x=-2
	(3 , inf.)	4	+	f crece

13

Definición de concavidad

- Sea f diferenciable en un intervalo abierto. Diremos que la gráfica de f es cóncava hacia arriba si f´ es creciente en ese intervalo y cóncava hacia abajo si f´ es decreciente en ese intervalo.

Cóncava hacia arriba



Cóncava hacia abajo

14

Teorema: criterio sobre concavidad

- Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto (a,b).
  - Si f''(x)>0 para toda x en (a,b), entonces la gráfica de f es cóncava hacia arriba en (a,b).
  - Si f''(x)<0 para toda x en (a,b) , entonces la gráfica de f es cóncava hacia abajo en (a,b).

15

- Para determinar la concavidad de la gráfica de una función, debemos determinar los intervalos en los que f''(x)<0 (concavidad hacia abajo) y en los que f''(x)>0 (concavidad hacia arriba)
- Se sigue el siguiente procedimiento
  - Determinar los valores en los que f''(x)=0 ó f''(x) no está definida. Determinar con esos valores unos intervalos de prueba.
  - Determinar el signo de f''(x) en cada uno de esos intervalo de prueba.

16

Definición de punto de inflexión

- Sea f continua en c. Un punto (c,f(c)) es un punto de inflexión si existe un intervalo abierto (a,b) que contiene a c, de tal manera que la gráfica de f es,
  - cóncava hacia arriba en (a,c) y cóncava hacia abajo en (c,b) , o
  - cóncava hacia abajo en (a,c) y cóncava hacia arriba en (c,b).
- En otras palabras: un punto de inflexión es un punto donde hay un cambio en la concavidad de la gráfica de una función y=f(x).

17

Observación sobre puntos de inflexión

- Un punto de inflexión (c,f(c)) ocurre en un número c para el cual f''(c)=0 o bien f''(c) no existe (puntos críticos de segundo orden).

18

Ejercicio

- Determinar los puntos de inflexión y las regiones de concavidad hacia abajo y hacia arriba de la curva
  F (x)=5-36x-3x2 + 2x3
- Solución:
  - Primero calcularemos los puntos críticos de segundo orden. Es decir, hacemos la segunda derivada igual a cero y resolvemos la ecuación resultante.
  - Como y''= -6 + 12x = 0 se tiene que x = 1/2.
  - Nuestro segundo paso es elaborar un tabla que permita concluir cuando la función es cóncava hacia arriba (f''>0) y cuando es cóncava hacia abajo (f''<0)

19

Punto crítico de segundo orden	Intervalos	Punto prueba	Signo de la segunda derivada y' = - 6 + 12x	Conclusión
	(-inf. , 1/2)	0	-	Concavidad hacia abajo
X =1/2				f tiene punto de inflexión en x=1/2
	(1/2 , inf.)	1	+	Concavidad hacia arriba

20

Teorema: criterio de la segunda derivada para extremos relativos

- Sea f(x) una función tal que f'(c) =0 y cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto que contiene a c.
  - Si f''(c)>0, entonces f(c) es un mínimo relativo.
  - Si f''(c)<0, entonces f(c) es un máximo relativo.
  - Si f''(c)=0, entonces el criterio no decide.

21

Ejercicio

- Determinar los extremos relativos de la función
- y=5-36x-3x2+2x3
- usando el criterio de la segunda derivada.
- Solución:
- Primero calcularemos los puntos críticos y después los evaluaremos en la segunda derivada.
- Como f '(x) = -36 - 6x + 6x2 = 0 se tiene que x = -2,3 son los puntos críticos.
- La segunda derivada es f ''(x)= -6 + 12x.
- Evaluamos la segunda derivada en los puntos críticos:
  - f ''(-2) = -30 < 0, en consecuencia f tiene un máximo en x=-2. El valor máximo es f(2) = 49
  - f ''(3) = 30 > 0, en consecuencia f tiene un mínimo en x=3. El valor mínimo es f(3) = -76

22