TECNOLÓGICO DE MONTERREY

Rubén Darío Santiago
José Luis Gómez
Blanca Parra

Matemáticas para ingeniería I

Razones de cambio y límites

2

Razón de cambio promedio

- La razón de cambio promedio de una función f (x) con respecto a x se define como:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

- Como su nombre lo dice, la razón de cambio promedio da una medición de cuanto cambia la función f cuando x cambia una cantidad “delta x”

3

Ejemplo de razón de cambio promedio

- Cuando el precio de venta de un libro es $100 se venden al mes 50 libros. Al aumentar el precio a $110 se venden al mes 20 libros. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de las ventas mensuales con respecto al precio?
- Respuesta: Sea “x” el precio de venta, y “f(x)” los libros vendidos al mes:

$$x = 100 \quad x + \Delta x = 110 \quad \Delta x = 10$$
$$f(x) = 50 \quad f(x+\Delta x) = 20$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \frac{20-50}{110-100} = -3\\ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} &= -3\,\frac{libros}{peso} = -3 \text{ libros por peso}\end{aligned}}$$

- Por cada peso que se incrementó el precio, se vendieron en promedio unos 3 libros menos.

4

Ejemplo de razón de cambio promedio

- A las 15 horas hay 3200 bacterias en un frasco. A las 18 horas hay 6400 bacterias. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de la población con respecto al tiempo?
- Respuesta: Sea “t” el tiempo en horas, y “p(t)” la población:

$$t = 15 \quad t + \Delta t = 18 \quad \Delta t = 3$$
$$p(t) = 3200 \quad p(t+\Delta t) = 6400$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\Delta p(t)}{\Delta t} &= \frac{p(t+\Delta t) - p(t)}{\Delta t} = \frac{6400-3200}{18-15} = 1066.67\\ \frac{\Delta p(t)}{\Delta t} &= 1066.67\,\frac{bacterias}{hora} = 1066.67 \text{ bacterias por hora}\end{aligned}}$$

- Por cada hora que pasó, la población creció en promedio unas 1067 bacterias. ¿Significa esto qué a las 16 horas había 3200+1067 bacterias?

5

Ejemplo de razón de cambio promedio

- Un coche se encuentra a 10 Km. de la casa cuando son las 6:00 AM. A las 8:30AM se encuentra a 210 Km. de la casa. ¿Cuál es la razón de cambio promedio de su distancia a la casa con respecto al tiempo?
- Respuesta: Sea “t” el tiempo en horas, y “s(t)” la distancia a la casa:

$$t = 6 \quad t + \Delta t = 8.5 \quad \Delta t = 2.5$$
$$s(t) = 10 \quad s(t+\Delta t) = 210$$

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\Delta s(t)}{\Delta t} &= \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{210-10}{8.5-6} = 80\\ \frac{\Delta s(t)}{\Delta t} &= 80\,\frac{km}{h} = 80 \text{ kilometros por hora}\end{aligned}}$$

- Por cada hora que pasó, se avanzaron en promedio 80 kilómetros. ¿Significa eso que el velocímetro siempre estuvo marcando 80 Km./h?

6

Rubén Darío Santiago – José Luis Gómez – Blanca Parra

Ejemplo de razón de cambio promedio

- **Cuando la longitud de un resorte es 1 cm. produce una fuerza de 4 Newton . Si su longitud es 3 cm. produce una fuerza de 9 Newton. ¿Cuál es la razón de cambio de la fuerza con respecto a la longitud del resorte?**
- **Respuesta: Sea "x" la longitud en centímetros, y "f(x)" la fuerza en Newtons:**

$$x=1 \quad x+\Delta x=3 \quad \Delta x=2$$
$$f(x)=4 \quad f(x+\Delta x)=9$$

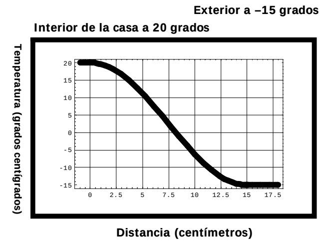
$$\boxed{\begin{array}{l}\frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{9-4}{3-1}=2.5\\ \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}=2.5\frac{N}{cm}=2.5\text{ Newtons por centímetro}\end{array}}$$

- **Por cada centímetro que se alargó, la fuerza se incrementó en promedio 2.5 Newton. ¿Forzosamente a los 2 cm. hay una fuerza de 6.5 Newton?**

7

Temperatura a través de una pared aislante

- **En la gráfica se muestra la temperatura en grados centígrados como función de la distancia en centímetros a través de una pared aislante que separa el interior de una casa, que está a 20 grados centígrados, del exterior, que está a una temperatura de –15 grados centígrados**

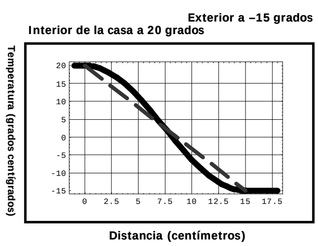


- **En promedio ¿Cuantos grados por centímetro cambió la temperatura?**

8

Razón de cambio promedio

- **La temperatura cambió de +20 a -15, es decir, cambio -35 grados (negativo porque disminuyó). Este cambio se llevó a cabo desde los cero hasta los 15 centímetros, así que el cambio promedio por centímetro es: -35/15=-2.33 grados/cm.**

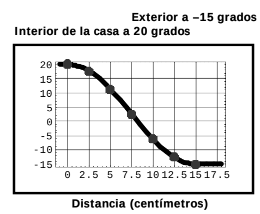


- **Observa que el -2.33 grados por centímetro es la pendiente de la recta roja: m =(-15-20)/(15-0)=-2.33**

9

Razones de cambio promedio en intervalos menores

x	Temp.
0	20
2.5	17.6554
5.	11.25
7.5	2.5
10	-6.25
[illegible].5	-12.6554
15	-15.

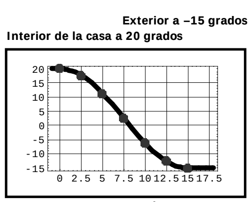


- **La tabla corresponde a los puntos rojos de la gráfica. Calcula las razones de cambio entre punto y punto.**

10

Razones de cambio promedio en intervalos menores

De:	A:	Cambió:
0.0	2.5	-0.95 grados/cm.
2.5	5.0	-2.5 grados/cm.
5.0	7.5	-3.5 grados/cm.
7.5	10.0	-3.5 grados/cm.
12.5	15.0	-0.95 grados/cm.

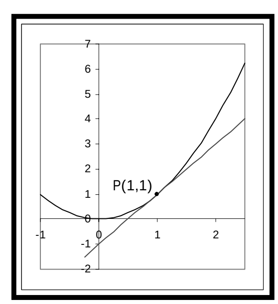


- **Observa que cada cambio en grados por centímetro es la pendiente de la recta que une los puntos correspondientes.**

11

Recta Tangente

- **Una recta que toca a la curva en un punto y tiene la misma "inclinación" que la curva en ese punto se le conoce como recta tangente.**
- **Encuentre la ecuación de la recta tangente a la parábola $y=x^2$ en el punto P(1,1)**



12

Rubén Darío Santiago – José Luis Gómez – Blanca Parra

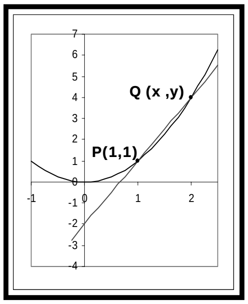
Recta Secante

- La pendiente de la recta secante cruzando a y = x2 en los puntos P(1,1) y Q (x, y) es la razón de cambio promedio de “y” con respecto a “x”:

$$m_{PQ} = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$m_{PQ} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$m_{PQ} = \frac{y-1}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1}$$



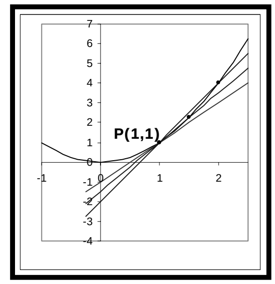
13

Acercando Q a P

- Acercando Q a P (acercando x a 1) la recta secante se aproxima a la recta tangente

$$m_{PQ} = \frac{x^2-1}{x-1}$$

x	mpq
2.000	3.000
1.500	2.500
1.100	2.100
1.010	2.010
1.001	2.001



14

Recta Tangente

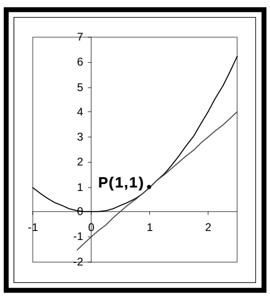
- De la tabla anterior estimamos que la pendiente de la recta tangente es 2

$$\lim_{Q \to P} m_{PQ} = m_P$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = 2$$

- La ecuación de la recta tangente queda

$$y - 1 = 2(x-1)$$



15

Problema de la velocidad

- Se deja caer una pelota en caída libre. La distancia que recorre la pelota como función del tiempo es s (t)=4.9t². Encuentre la velocidad de la pelota después de 5 segundos.

$$\text{velocidad promedio} = \frac{\text{distancia recorrida}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

$$\text{velocidad promedio} = \frac{s(t) - s(5.0)}{t - 5.0}$$

$$\text{velocidad promedio} = \frac{4.9t^2 - 4.9(5.0)^2}{t - 5.0}$$

16

De velocidad promedio a instantánea

- En la tabla se muestra la velocidad promedio desde los 5.0 segundos hasta un tiempo t.

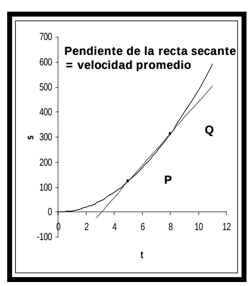
- De la tabla estimamos que la velocidad instantánea en t =5.0 es de 49 metros por segundo.

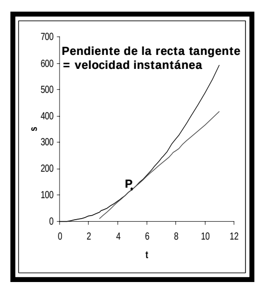
$$\text{velocidad promedio} = \frac{4.9t^2 - 4.9(5.0)^2}{t - 5.0}$$

t	Vel. Prom.
6	53.9
5.1	49.49
5.05	49.245
5.01	49.049
5.001	49.0049

17

Velocidades y pendientes





18