CAPITULO 2
Derivada de una función

Licda. Elsie Hernández Saborío

Instituto Tecnológico de Costa Rica
Escuela de Matemática
...
Revista digital Matemática, educación e internet (www.cidse.itcr.ac.cr)

Créditos

Primera edición impresa:	Rosario Álvarez, 1984.
Edición LaTeX:	Marieth Villalobos, Alejandra Araya, Jessica Chacón, Marianela Abarca, Lisseth Angulo y Walter Mora.
Edición y composición final:	Evelyn Agüero.
Gráficos:	Walter Mora, Marieth Villalobos, Evelyn Agüero.
Comentarios y correcciones:	escribir a wmora2@yahoo.com.mx

Contenido

2.1 **Derivada de una función** 4
2.1.1 Introducción 4
2.1.2 La derivada de una función 12
2.1.3 Notaciones para la derivada de una función 15

2.1 Derivada de una función

2.1.1 Introducción

El problema de la tangente
"Muchos de los problemas importantes del análisis matemático pueden transferirse o hacerse depender de un problema básico que ha sido de interés para los matemáticos desde los griegos (alrededor de $300 - 200 a.de J.C$). Es éste el problema de trazar una recta tangente a una curva dada en un punto específico a ella.

Este problema fue resuelto por métodos especiales en un gran número de ejemplos aislados aún en la temprana historia de las matemáticas. Por ejemplo, es bastante fácil resolver el problema si la curva es un círculo, y todo estudiante ha visto esta solución en su geometría de secundaria. Sin embargo, no fue si no hasta el tiempo de Isacc Newton $(1642 - 1727)$ y de Gottfried Wilhelm Leibniz $(1646 - 1716)$ que se dio un método general sistemático para obtener la solución. En este sentido se acredita a estos dos hombres la invención del cálculo.

Aunque el problema de la tangente pueda parecer de poco interés a los no matemáticos, el hecho es que las ténicas desarrolladas para resolver el problema son la mera columna vertebral de gran parte de la ciencia y la tecnología actuales. Por ejemplo, la dirección del movimiento de un objeto a lo largo de una curva en cada instante se define en términos de la dirección de la recta tangente a la trayectoria de movimiento. Las órbitas de los planetas al rededor del sol y las de los satélites artificiales alrededor de la Tierra, se estudian esencialmente comenzando con la información sobre la recta tangente a la trayectoria del movimiento. Un tipo diferente de problemas es el de estudiar la descomposición de una sustancia radioactiva tal como el radio cuando se conoce que la razón de descomposición en cada instante es proporcional a la cantidad de radio presente. La clave de este problema así como la del problema del movimiento, está en un análisis de lo que queremos designar con la palabra razón.

Como pronto veremos, este concepto está tan íntimamente relacionado con la pendiente de la recta tangente a una curva, que la formulación matemática abstracta de un problema sobre razones es indistinguible de la formulación del problema de la tangente.

Empezamos con el problema de la tangente no solo por su importancia histórica y práctica, sino también porque la intuición geométrica del lector contribuirá a hacer concreta la que, de otro modo, sería una noción abstracta" (Britton, 1968, 323).

Definición 1

Recibe el nombre de recta secante cualquier recta que pase por dos puntos diferentes de una curva.

En la siguiente figura se ha representado gráficamente una recta L secante a una curva:

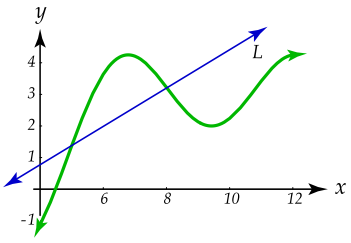

Figura 2.1: Recta secante a una curva

Como al conocer la pendiente de una recta y un punto de ella, la recta queda completamente determinada, se tiene que el problema de trazar una recta tangente a una curva dada, por un punto de ésta, se reduce a encontrar la pendiente de la recta.

Consideremos la representación gráfica de una curva con ecuación $y = f(x)$, donde f es una función continua.

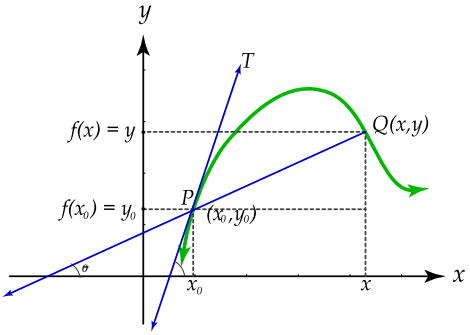

Figura 2.2: Gráfica de $f(x)$

Se desea trazar la recta tangente en un punto $P(x_o, y_o)$ dado de la curva.

Sea PQ la recta secante que pasa por los puntos $P(x_o, y_o)$ y $Q(x, y)$ de la curva.

La pendiente de esta secante, denotada m_S está dada por: $m_s = \dfrac{y - y_o}{x - x_o} = \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$

Como la pendiente de una recta es igual a la tangente del ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje X, y como θ es ese ángulo para la recta secante, entonces:

$$m_S = \tan\theta = \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_0}$$

Supongamos que existe una recta tangente a la curva en $P(x_o, y_o)$. Sea PT dicha recta.

Mantenemos ahora el punto P fijo y hacemos que el punto Q se aproxime a P, a lo largo de la curva. Cuando esto sucede, la inclinación θ de la recta secante se aproxima a la inclinación de α de la recta tangente, lo que puede escribirse como $\lim\limits_{Q\to P} \theta = \alpha$.

En igual forma, la pendiente de la secante tiende a la pendiente de la tangente, es decir, $\lim\limits_{Q\to P} \tan\theta = \tan\alpha$.

Además, cuando Q tiende hacia P, la abscisa x tiende hacia x_o por lo que $\lim\limits_{Q\to P} \tan\theta = \tan\alpha$ puede escribirse como $\lim\limits_{x\to x_o} \tan\theta = \tan\alpha$.

Luego $\lim\limits_{x\to x_o} \tan\theta = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_o} = \tan\alpha$.

Si denotamos por $m_t(x_o)$ la pendiente de la recta tangente a la curva en $P(x_o, y_o)$, entonces $m_t(x_o) = \lim\limits_{x\to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_o}$.

Definición 2

La pendiente de la recta tangente a la curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto (x_o, y_o), denotada $m_t(x_o)$ es igual al $\lim\limits_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$, siempre que este límite exista.

Ejemplo 1

Determinar la ecuación de la recta tangente a la curva con ecuación $f(x) = x^2 - 3x$, en el punto $(1, -2)$.

La ecuación de la recta tangente es: $y = mx + b$. Utilizando la definición anterior vamos a averiguar la pendiente en $(1, -2)$.

Solución

Así:

$$
\begin{aligned}
m_T(1) &= \lim_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x - (-2)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} \frac{(x-1)(x-2)}{x - 1} \\
&= \lim_{x \to 1} (x - 2) = -1
\end{aligned}
$$

Luego $m_T(1) = -1$, por lo que $y = -x + b$. Para averiguar b, sustituimos el punto $(1, -2)$ como sigue: $-2 = -(1) + b$ de donde $b = -1$.

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = -x - 1$.

———

La representación gráfica de la curva y de la recta tangente es el siguiente:

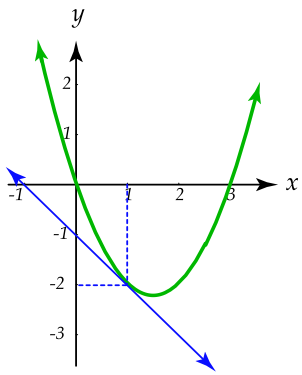

Figura 2.3: Recta tangente a $f(x) = x^2 - 3x$, en el punto $(1, -2)$

Definición 3

Se dice que la recta normal a una curva en el punto $P(x_o, y_o)$, es la línea que pasa por P y es perpendicular a la recta tangente en ese punto. Además, recuerde que dos líneas no verticales son perpendiculares entre sí, si y

solo si sus pendientes tienen valores recíprocos negativos.

Si m_T es la pendiente de la recta tangente y m_N la de la recta normal, entonces:

$$m_N = \frac{-1}{m_T} \qquad (m_T.m_N = -1)$$

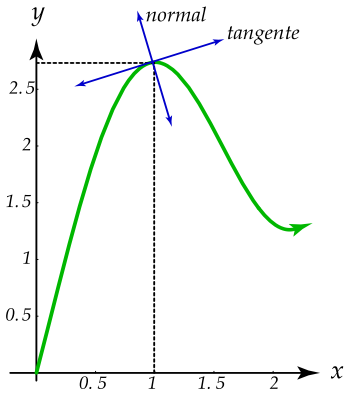

Figura 2.4: Recta normal y tangente

Ejemplo 2

Determinar la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $f(x) = \frac{4}{x}$, $x > 0$, en el punto $(2, 2)$.

Solución

Como $m_N = \frac{-1}{m_T}$, averiguamos primero la pendiente de la recta tangente. Así:

$$\begin{aligned}
m_T(2) &= \lim_{x\to 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{4}{x} - \frac{4}{2}}{x - 2} \\
&= \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{\frac{8-4x}{2x}}{x - 2} \\
&= \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{4 - 2x}{x(x - 2)} \\
&= \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{4 - 2x}{x(x - 2)} \\
&= \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-2(x - 2)}{x(x - 2)} \\
&= \\
&= \lim_{x\to 2} \frac{-2}{x} = -1
\end{aligned}$$

Como $m_T(2) = -1$, entonces $m_N(2) = 1$.

La ecuación de la recta normal es: $y = 1x + b$. Sustituyendo en la ecuación anterior $x = 2$, $y = 2$ se obtiene $b = 0$.
Por tanto, la ecuación de la recta normal es $y = x$.

La representación gráfica de la curva y la recta normal es la siguiente:

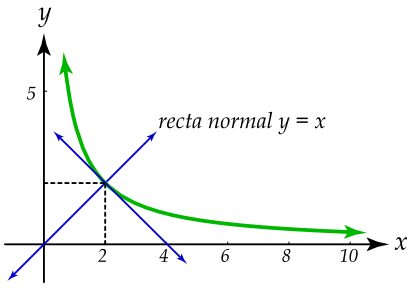

Figura 2.5: Recta normal a $f(x) = \dfrac{4}{x}$ en (2,2)

La ecuación de la recta tangente es $y = -x + 4$.

Ejercicios

1. Determinar la ecuación de la recta tangente y la ecuación de la recta normal a la curva con ecuación $f(x) = 2x^2 - 5$, en el punto $(1, -3)$.

Ejemplo 3

1. Determinar la ecuaciónde la recta tangente a la parábola con ecuación $y = x^2$, y que es paralela a la recta con ecuación $y = 4x$.

   Solución

   Recuerde que si dos rectas son paralelas entonces sus pendientes son iguales.

   Note que en este caso no nos indican el punto de tangencia en la curva.

   Como la recta tangente es paralela a la recta de ecuación $y = 4x$, entonces $m_T(x_o) = 4$.

   Calculemos $m_T(x_o)$:

   $$m_T(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$$

   $$= \lim_{x \to x_o} \frac{x^2 - x_o^2}{x - x_o}$$

   $$= \lim_{x \to x_o} \frac{(x - x_o)(x + x_o)}{x - x_o}$$

$= \lim_{x \to x_o} (x + x_o)$

$= x_o + x_o = 2x_o$

Como $m_T(x_o) = 2x_o$ se tiene que $2x_o = 4$ y por tanto $x_o = 2$.

Si $x_o = 2$ entonces $y_o = 2^2 = 4$. El punto de tangencia es $P(2, 4)$.

La ecuación de la recta tangente es: $y = 4x + b$.

Sustituimos $(2, 4)$ y se obtiene que $b = -4$.

Entonces la ecuación de la recta tangente es $y = 4x - 4$.

La representación gráfica es la siguiente:

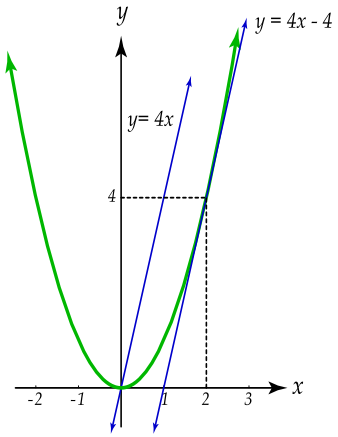

Figura 2.6: Recta tangente a $y = x^2$ paralela a $y = 4x$

Estudiaremos ahora un segundo problema que involucra un límite similar al utilizado al determinar pendiente de una recta tangente a una curva.

Dicho problema es el de determinar la velocidad de una partícula en un instante de tiempo t_o.

Recibe el nombre de movimiento rectilíneo el efectuado por una partícula a lo largo de una línea recta.

Sea s la función con ecuación $s(t) = t^2 + 1$, que describe la distancia dirigida de la partícula a un punto fijo O, en cualquier tiempo t, (s se mide en metros y t en segundos).

Cuando $t = 0$, la partícula se encuentra a 1 metro de O y cuando $t = 3$ segundos la partícula está a 10 metros de O, como se representa a continuación:
La velocidad promedio de la partícula es la razón del cambio en la distancia dirigida desde un punto fijo, al cambio en el tiempo.

En este caso, en el lapso de tres segundos, la velocidad media, denotada v_{med}, está dada por $v_{med} = \frac{10-1}{3-0} = 3$ metros por segundo.

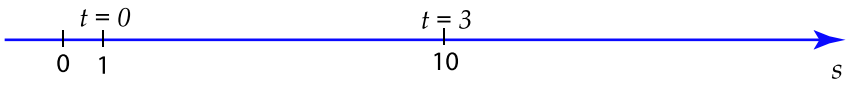

Figura 2.7: Movimiento rectilíneo de una partícula

Note que la velocidad promedio de la partícula no es constante, y que además ésta no proporciona información específica referente al movimiento de la partícula en cualquier instante determinado.

Para el movimiento anterior, la velocidad media desde $t = 3$ segundos hasta otro tiempo t cualquiera, está dada por:

$$v_{med} = \frac{s(t) - s(3)}{t - 3} = \frac{s(t) - 10}{t - 3}$$

Si quisiéramos determinar la velocidad al final de 3 segundos, es decir la velocidad instantánea cuando $t = 3$ no podríamos averiguarla con la fórmula anterior, pues si se sustituye $t = 3$ el denominador se hace cero.

Sin embargo, cuanto más corto sea el intervalo de t a $t = 3$ seg, la velocidad promedio estará más cerca de lo que intuitivamente se consideraría como la velocidad instantánea en $t = 3$seg.

Surge así la siguiente definición sobre la velocidad instantánea:

Definición 4

Si una partícula se mueve sobre una línea recta de tal forma que su distancia dirigida s, a un punto fijo de la recta está dada en función del tiempo por la ecuación $s = s(t)$, entonces la velocidad en cualquier instante t_1 es:

$$v(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{s(t) - s(t_1)}{t - t_1}, \quad \text{siempre que este límite exista}$$

Utilizando la definición anterior, se puede averiguar la velocidad en el instante $t = 3$ seg, de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} v(3) &= \lim_{t \to 3} \frac{s(t) - s(3)}{t - 3} \\ &= \lim_{t \to 3} \frac{t^2 + 1 - 10}{t - 3} \\ &= \lim_{t \to 3} \frac{t^2 - 9}{t - 3} \\ &= \lim_{t \to 3} \frac{(t - 3)(t + 3)}{t - 3} \\ &= \lim_{t \to 3} (t + 3) = 6 \end{aligned}$$

Luego, la velocidad cuando $t = 3$ seg es de 6 metros por segundo.

La velocidad instantánea puede ser positiva o negativa, según la partícula se mueva a lo largo de la recta en dirección positiva o negativa; es cero cuando la partícula está en reposo.

La rapidez de la partícula en un instante de tiempo t, se define como $|v(t_1)|$, siendo simplemente la magnitud de la velocidad, es decir, su valor absoluto, por lo que será siempre positiva o nula.

La aceleración es una medida de la variación de la velocidad. La aceleración es cero si una partícula se mueve sobre una recta con velocidad constante.

Si la velocidad v de la partícula está dada por la ecuación $v = v(t)$, donde t es el tiempo, entonces la aceleración en el instante $t = t_1$, se define como el límite de la aceleración media de la siguiente forma:

$$a(t_1) = \lim_{t \to t_1} \frac{v(t) - v(t_1)}{t - t_1}$$

Observe la semejanza con la definición de velocidad instantánea como límite de la velocidad media.

Ejemplo 4

1. La ecuación $s(t) = t^2 + 2t$ describe el movimiento de una partícula sobre una recta. La distancia al origen está en metros y t está en segundos. Calcular la velocidad cuando $t = 3$ seg.

   Solución

   Se debe determinar la velocidad instantánea cuando $t = 3$ seg

   $$v(3) = \lim_{t \to 3} \frac{s(t) - s(3)}{t - 3}$$

   $$= \lim_{t \to 3} \frac{t^2 + 2t - 15}{t - 3}$$

   $$= \lim_{t \to 3} \frac{(t-3)(t+5)}{t - 3}$$

   $$= \lim_{t \to 3} (t + 5) = 8 \quad \text{metros por segundo.}$$

   Así, cuando $t = 3$ seg, la velocidad de la partícula es de 8 metros por segundo.

2. Una partícula P se mueve en línea recta de acuerdo con la ecuación $s(t) = 15t - 3t^2$, donde s, en metros, es la distancia al punto de partida en el tiempo t, (en segundos). Determinar la distancia de P al punto de partida cuando la velocidad es nula.

   Solución

   Debemos averiguar primero la velocidad de la partícula en cualquier instante t_o.

   $$v(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{s(t) - s(t_o)}{t - t_o}$$

   $$= \lim_{t \to t_o} \frac{15t - 3t^2 - (15t_o - 3t_o^2)}{t - t_o}$$

   $$= \lim_{t \to t_o} \frac{15t - 15t_o - 3t^2 + 3t_o^2}{t - t_o}$$

$$= \lim_{t \to t_o} \frac{15(t - t_o) - 3(t^2 - t_o^2)}{t - t_o}$$

$$= \lim_{t \to t_o} \frac{15(t - t_o) - 3(t - t_o)(t + t_o)}{t - t_o}$$

$$= \lim_{t \to t_o} \frac{(t - t_o)(15 - 3t - 3t_o)}{t - t_o}$$

$$= \lim_{t \to t_o} (15 - 3t - 3t_o) = 15 - 6t_o$$

$= 15 - 6t_o$ metros por segundo.

Ahora averiguaremos el valor de t_o para el que la velocidad se hace cero:

$v(t_o) = 0 \iff 15 - t_o = 0 \iff t_o = \frac{5}{2}$ segundos

Por último, calculemos la distancia que ha recorrido la partícula al cabo de $t_o = \dfrac{5}{2}$ segundos.

$$s\left(\frac{5}{2}\right) = 15\left(\frac{5}{2}\right) - 3\left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{75}{4} = 18,75 \text{ metros.}$$

Ejercicio

Dos partículas p_1 y p_2 parten de un mismo punto en una recta y se mueven a lo largo de ella según las ecuaciones $s_1(t) = t^2 - 4t$, y, $s_2(t) = 3t - t^2$, donde s_1 y s_2 están en metros, y t en segundos.

a. ¿En qué tiempos tendrán las dos partículas la misma velocidad?

b. Determine las velocidades de las partículas en los tiempos en que están en la misma posición sobre la recta.

2.1.2 La derivada de una función

En la resolución de los dos problemas anteriores: el de trazar una recta tangente a una curva dada y el de determinar la velocidad instantánea de una cierta partícula, se obtuvo como resultado dos límites:

$$m_T(x_o) = \lim_{x \to x_o} \frac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}, \; v(t_o) = \lim_{t \to t_o} \frac{f(t) - f(t_o)}{t - t_o}$$

Ambos límites tienen básicamente la misma forma y son casos específicos de un tipo especial de límite que se define a continuación.

Definición 1

Sea f una función real definida en un intervalo $I \subset \mathbb{R}$. Sea $x_o \in I$

La derivada de f en el punto x_o, denotada $f'(x_o)$, es el $\lim_{x \to x_o} \dfrac{f(x) - f(x_o)}{x - x_o}$ si este límite existe.

Note que, la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva con ecuación $y = f(x)$ en el punto $(x_o, f(x_o))$, es precisamente la derivada de f evaluada en x_o.

También, si una partícula se mueve a lo largo de una línea recta de acuerdo con la ecuación de movimiento $s = f(t)$, puede observarse que $v(t_1)$ en la definición de velocidad instantánea de la partícula en t_1, es la derivada de f respecto a t, evaluada en t_1.

Si en la definición de derivada se sustituye $x - x_o$ por h, entonces $h \to 0$ cuando $x \to x_o$ y $x = x_o + h$.

Luego $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_o + h) - f(x_o)}{h}$, si este límite existe. La función f es derivable en x_o si $f'(x_o)$ existe. Si $f'(x)$ existe para cada x en un intervalo I, $(I \subset \mathbb{R})$, se dice que la función f es derivable en I; se escribe $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$.

Ejemplo 1

Utilizando la definición de derivada de una función, determinar la derivada de cada una de las funciones cuyas ecuaciones son:

1. $f(x) = 5x - 3$

   Se debe calcular el $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

   La expresión $f(x + h)$ indica que la función f debe evaluarse en $(x + h)$. Así, $f(x + h) = 5(x + h) - 3$.

   Luego:

   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

   $= \lim_{h\to 0} \dfrac{5(x + h) - 3 - (5x - 3)}{h}$

   $= \lim_{h\to 0} \dfrac{5x + 5h - 3 - 5x + 3}{h}$

   $= \lim_{h\to 0} \dfrac{5h}{h}$

   $f'(x) = \lim_{h\to 0} 5 = 5$

   Por tanto, si $f(x) = 5x - 3$ entonces $f'(x) = 5$.

2. $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$, $x \neq 0$

   En este caso $f(x + h) = \dfrac{3}{(x + h)^2}$

   Luego:

   $f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f(x + h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\frac{3}{(x+h)^2} - \frac{3}{x^2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 - 3(x+h)^2}{hx^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3x^2 - 3x^2 - 6xh - 3h^2}{hx^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h(2x+h)}{hx^2(x+h)^2}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-3(2x+h)}{x^2(x+h)^2}$$

$$= \frac{-6x}{x^2 \cdot x^2} = \frac{-6}{x^3}$$

Si $f(x) = \dfrac{3}{x^2}$ entonces $f'(x) = -\dfrac{6}{x^3}$.

3. $g(u) = (2u+1)^2$

   En este caso $g(u+h) = [2(u+h)+1]^2$

   Luego:

$$g'(u) = \lim_{h\to 0} \frac{g(u+h) - g(u)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2(u+h)+1]^2 - (2u+1)^2}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{[2(u+h)+1+(2u+1)][2(u+h)+1-(2u+1)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(2u+2h+1+2u+1)(2u+2h+1-2u-1)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(4u+2h+2)(2h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} 2(4u+2h+2)$$

$$g'(u) = 2(4u+0+2) = 8u+4$$

Si $g(u) = (2u+1)^2$ entonces $g'(u) = 8u+4$.

Ejercicios

Determine, utilizando la definición de derivada, la derivada de cada una de las funciones cuyas ecuaciones son:

1. $f(t) = \sqrt{t+1},\ t > -1$

2. $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4$

3. $g(y) = \dfrac{3y}{y+2},\ y \neq -2$

2.1.3 Notaciones para la derivada de una función

Si f es una función derivable en un intervalo I, $(I \subset \mathbb{R})$, el proceso por medio del cual se obtiene $f'(x)$, da origen a una nueva función que recibe el nombre de función derivada.

El dominio de $f'(x)$ está formado por todos los números del dominio de f para los que exista $f'(x)$.

Por ejemplo, si $f(x) = \sqrt{x}$ con $x \geq 0$ entonces $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ está definida únicamente para $x > 0$.

Si $y = f(x)$, con f una función derivable, entonces la derivada de f puede denotarse por:

a.) $D_x f(x)$ que se lee: derivada de $f(x)$ respecto a x.

b.) $D_x y$ que se lee: derivada de "y" respecto a x.

c.) y' que se lee: "y prima".

2.1.4 Continuidad y derivabilidad

En el capítulo anterior se estudiaron las condiciones para que una función fuera continua en un punto. También se determinó la continuidad en un intervalo, que puede asociarse con la representación gráfica de una curva que no tiene "brincos" o "saltos bruscos".

Vamos ahora a relacionar la continuidad con la derivabilidad de una función f en un punto x_o, por medio del siguiente teorema.

Teorema 1

Si una función f es derivable en un punto x_o, entonces f es continua en x_o.

Prueba: Al final del capítulo.

El recíproco de este teorema no es cierto. Es decir, el hecho de que una función sea continua en un punto no implica que sea derivable en él.

Antes de estudiar algunos ejemplos, necesitamos conocer las siguientes definiciones sobre derivadas laterales.

Definición 1

Si f es una función continua definida en $x = x_o$, entonces: