CAPÍTULO 1

LA FUNCIÓN DERIVADA

1.1 LA DERIVADA

En el fascículo anterior utilizaste el concepto de la razón de cambio a través de problemas o situaciones de la vida real e ilustraste gráficamente $h \to 0$ o, dando una interpretación de la razón de cambio.

Todo lo anterior es la base para el estudio de la derivada a través de la discusión de un problema de la vida real. Y a partir del concepto de la DERIVADA, aprenderás las técnicas para derivar funciones y aplicar estos conocimientos en la construcción de gráficas y solución de problemas.

Analiza el siguiente problema:

Un móvil se desplaza de acuerdo a la función $f(t)=3t^2 - 2t + 1$, Ricardo observa este desplazamiento y le pregunta a Oscar, ¿Cómo se puede determinar la velocidad instantánea o tangencial de dicho móvil, después de que transcurren 3 seg. desde el inicio el movimiento? Oscar respondió; ¡no lo se!, tal vez aplicando conceptos de física. Ricardo le contestó, para saber con exactitud la velocidad instantánea aplicaré mis conocimientos de razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, limites y continuidad; Oscar replicó ¡eso es imposible!.

¿Qué harías para resolver el problema?

Reflexiona y después analiza la solución que te presentamos

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Con base al problema del móvil, contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Sabes que tipo de función es?

____

b) ¿Es una función continua o discontinua?

____

c) ¿Por qué es continua o discontinua?

____

d) ¿Qué entiendes por velocidad instantánea?

____

e) ¿Cuál sería su razón de cambio de la velocidad en el móvil?

____

f) ¿Cuál es la velocidad de en los tres segundos que transcurren?

____

g) ¿Puedes resolverlo empleando la función derivada a través de la razón de cambio como límite?

____

¿Aún no puedes resolver el problema anterior?

Sigue analizando la información que te presentamos, ésta te dará más elementos.

Una bola sube verticalmente alcanzando una altura S $=14t - 4.9t^2$ m, en t segundos después de lanzada. Halla la razón de incremento (Cambio) de altura de la bola en m/s al tiempo t_1

Analiza la solución: digamos que la bola esta a una altura S_1 al tiempo t_1 y S_2 a t_2.

El incremento promedio de la elevación de la bola durante el intervalo $t_1 < t < t_2$ es,

$$\boxed{\frac{\text{Incremento de altura}}{\text{Tiempo transcurrido}} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}}$$

Geométricamente esta magnitud esta representada por la pendiente de la Secante a través de los puntos (t_1, S_1) y (t_2, S_2) del diagrama altura tiempo.

Si $t_2 - t_1$ es pequeño, $S_2 - S_1 / t_2 - t_1$ representa aproximadamente la velocidad de ascenso de la bola en cualquier instante del intervalo.

Para calcular la relación precisa del incremento de altura al tiempo t_1 hacemos que $t_1 - t_2 \to 0$. Así,

$$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \text{Pendiente de la Secante}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \text{Velocidad promedio de ascenso}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{14t_2 - 4.9t_2^2 - 14t_1 + 4.9t_1^2}{t_2 - t_1} = 14\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} - 4.9\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = 14 - 4.9(t_2 + t_1)$$

Al aproximarse t_2 a t_1, en el intervalo $t_2 - t_1$, entonces $t_2 + t_1$ tiende a $2t_1$. Por lo tanto la pendiente $S_2 - S_1 / t_2 - t_1$ de la secante se convierte en la pendiente de la tangente y de la curva. Es decir:

$$\lim_{h \to 0} = \lim_{t_2 \to t_1} [14 - 4.9(t_2 + t_1)] = 14 - 9.8t$$

La velocidad de ascenso v a los t_1 segundos es

$V = 14 - 9.8\,t_1$ m/seg.

Nota: Que la razón de cambio consta de dos términos separados. El término 14 es la razón de cambio de 14t y -9.8t es la razón de cambio de $-4.9t^2$ al tiempo t_1.

La velocidad o razón de cambio instantánea de elevación con relación al tiempo en el instante se representa gráficamente por la pendiente de la curva en $t = t_1$.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Con base al problema de la bola, contesta las siguientes preguntas.

¿Cuándo es cero la velocidad?

____

¿Cuándo esta, la bola a mayor altura?

____

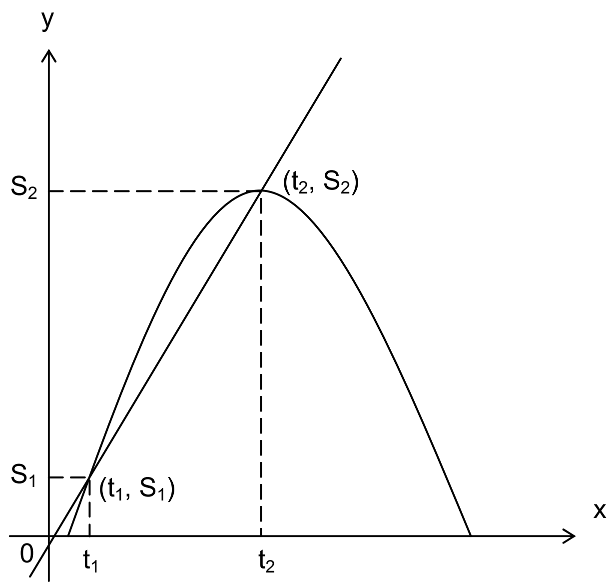
¿A qué velocidad vuelve la pelota al piso?

____

1.1.1 CONCEPTO DE DERIVADA

Precisamente como dy / dx es la razón de cambio de “y” con respecto a “x”, entonces podemos concluir que:

Velocidad v =ds / dt = $\lim_{t_2 - t_1 \to 0} S_s - S_1 / t_2 - t_{11}$



Gráfica No.1

¿Has aclarado algunas dudas?

Continúa el estudio y analiza el siguiente problema.

La posición de una partícula suspendida en el espacio tiene como ecuación $f(x) = x^3 - 4x - 5$. Determina la pendiente (m) y la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto cuya abscisa es igual a 2

Solución:

a) De la derivada como límite, que es la razón de cambio de la función, en la pendiente que une los puntos (x , f (x)).

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = x^3 - 4x - 5$$

$$f(x+h) = (x+h)^3 - 4(x+h) - 5$$

$$f(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4x - 4h - 5$$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} = \frac{f(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4x - 4h - 5 - (x^3 - 4x - 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4h}{h} \quad = \lim_{h \to 0} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 4 \; = \; 3x^2 + 3x(0) - 4$$

La razón de cambio para la función es la expresión f'(x)= $3x^2 - 4$, donde:

La razón de cambio para $x^3 = 3x^2$
La razón de cambio para –4x = –4

Siendo la derivada f'(x) = $3x^2 - 4$ y el valor de la pendiente (m); si f ' (x) = m, entonces:

m = $3x^2 - 4$ para x = 2

m = $3\,(2)^2 - 4$ = 3 (4) –4 = 12 – 4 = 8 $\therefore$ m = 8u.

La ecuación de la recta tangente a la curva f (x) = $x^3 - 4x - 5$ en x = 2.

Si x = 2, f (x) = $(2)^3 - 4\,(2) - 5$ = 8 – 8 – 5 = –5.

El punto de tangencia es $P_1(2,-5)$ y m = 8u es la pendiente de la recta tangente. Por lo tanto la ecuación tiene la forma:

$y - y_1 = m\,(x - x_1)$

y – (–5) = 8 (x – 2)

y + 5 = 8x – 16

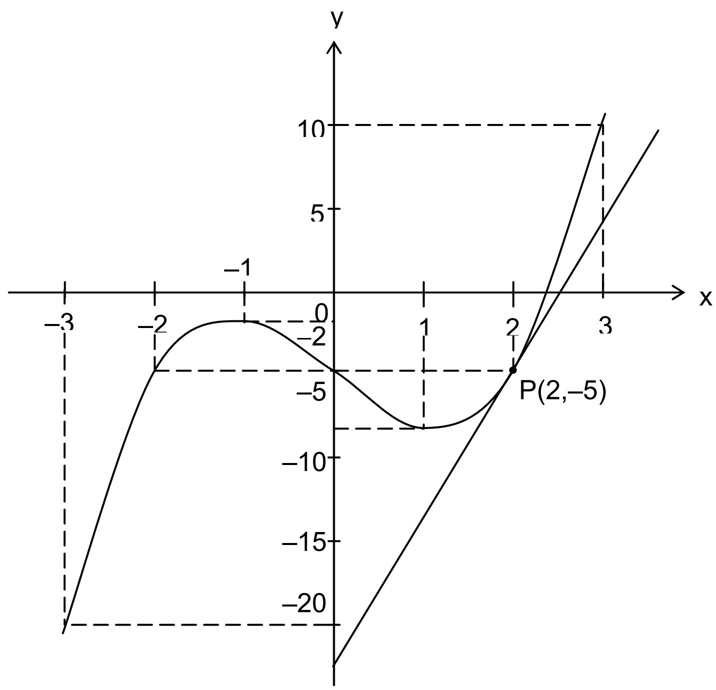
y = 8x – 16 – 5

y = 8x – 21 $\rightarrow$ ecuación de la recta tangente en donde 8 es la pendiente y la ordenada al origen es –2.

Graficando $f(x) = x^3 - 4x - 5$ con base a la tabla siguiente:

x	–3	–2	–1	0	1	2	3
f (x)	–20	–5	–2	–5	–8	–5	–10

Podemos trazar la tangente a la gráfica en P(2,–5), tomando en cuenta que corta al eje "y" en (0,–2) y su pendiente es $m = \frac{8}{1}$



Gráfica No.2

Muchos fenómenos físicos implican cantidades variables, la velocidad de un cohete, la devaluación de la moneda por la inflación, el número de bacterias de un cultivo, la intensidad de un movimiento telúrico, el voltaje de una señal eléctrica, etc.

En este fascículo desarrollaremos las herramientas matemáticas para expresar con precisión las razones o tazas de cambio.

Primero se revisarán algunas ideas anteriores, supón que $P(x,y)$ y $Q(x_1,y_1)$ son los puntos de la gráfica de una función f. Entonces la recta secante P y Q tienen la pendiente:

$$m.\sec = \frac{Y_1 - Y}{X_1 - X}$$

o bien, puesto que $y = f(x)$ y $y_1 = f(x_1)$,

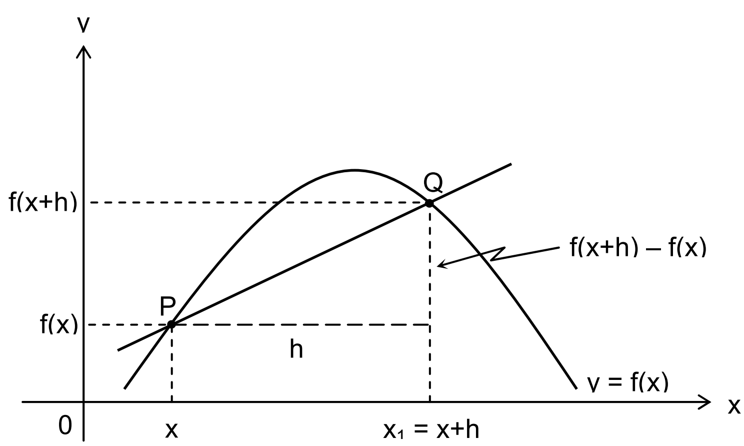
$$m.\sec = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \qquad (1)$$

haciendo, $h = x_1 - x$, entonces $x_1 = x + h$

de tal manera que la ecuación (1) puede escribirse así

$m \sec =$ $m.\sec = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Observemos la gráfica No 3.



Gráfica No. 3

De la gráfica se observa que $P(x,f(x))$ y $Q(x_1,f(x+h)–f(x))$ ó $Q(x+h,f(x+h)–f(x))$.

Cuando Q tiende P sobre la gráfica de f, X_1 tiende a Xo y por consiguiente $h = X_1 – X$ tiende a cero.

Además, cuando Q tiende a P, la recta secante que une P y Q tiende a la recta tangente en P. El cual nos conduce a la siguiente definición:

Si P (x, y) es un punto de la gráfica de una función f, entonces la recta tangente a la gráfica de f en P se define como la recta que pasa por P y tiene la pendiente siempre que exista el limite.

$$m \tan = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2)$$

Siempre que exista el límite, se hará referencia a la recta tangente en $x_1 = x$.

DEFINICIÓN:

La derivada de una función f es una f definida por:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (3)$$

El dominio de f, consta de todas las “x” en la que existe este límite;

NOTACIÓN: El símbolo f (x) se lee “f prima de x”.
Sí x esta en el dominio de f, entonces se dice que f es diferenciable en x. De (2) y (3) se sigue que si f es diferenciable en Xo, el valor de la derivada en x es:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m \tan$$

En otros términos, la derivada de f es una función cuyo valor en $X_1 = X$ es la pendiente (m = tang θ) de la recta tangente a y = f(x) en $x_1 = x$.

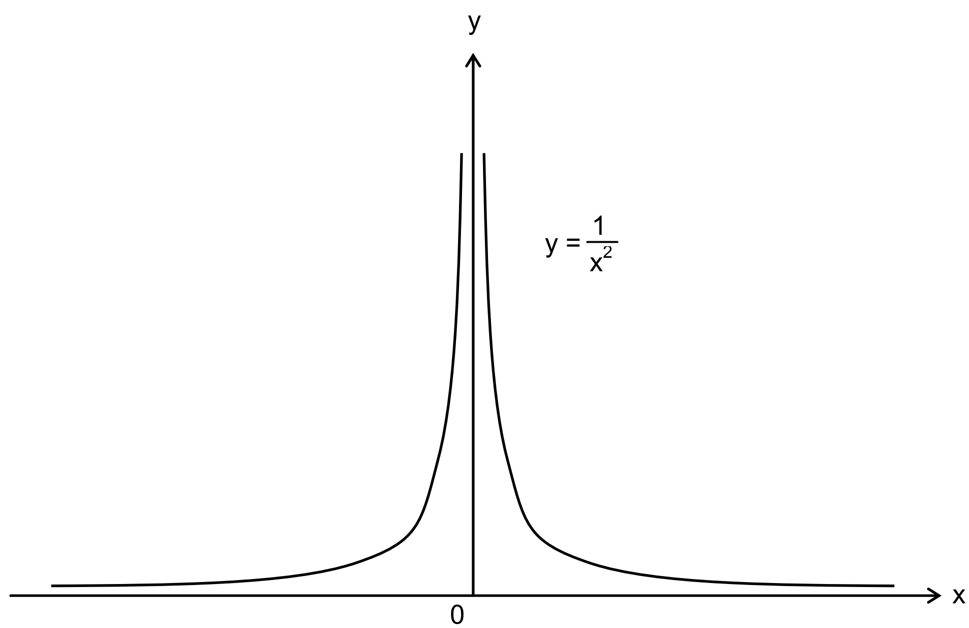
El dominio de la derivada es el conjunto de los valores de X para lo que existe una recta tangente a Y = f(x).

Existen tres maneras comunes en las que la función f puede no ser diferenciable en un punto, formuladas de una manera informal, estas pueden clasificarse como:

a) Rupturas.
b) Vértices.
c) Tangentes verticales.

Ruptura.

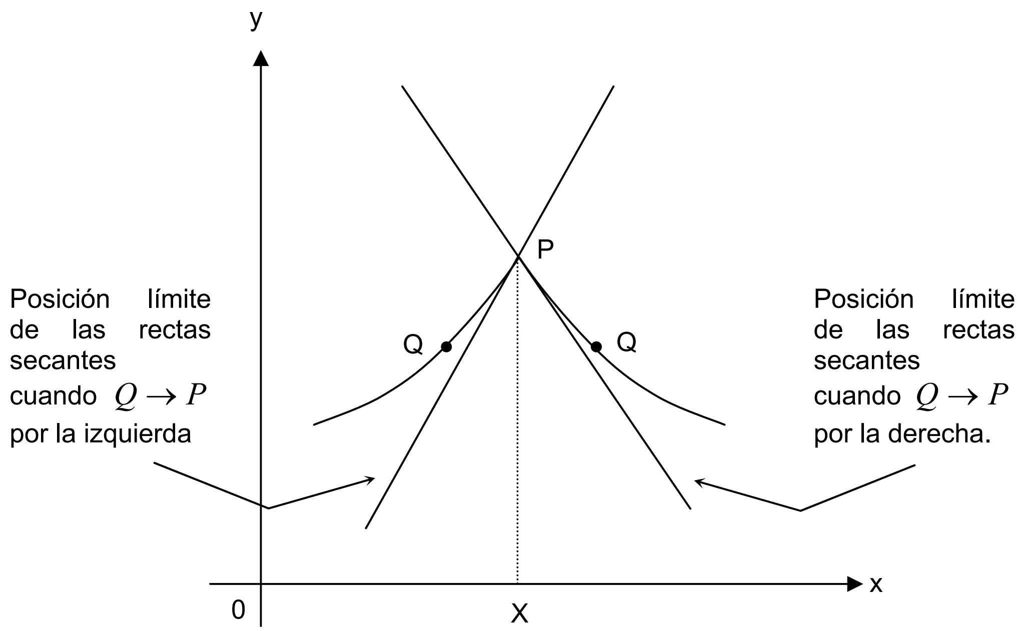
a) *Es evidente que si la gráfica de una función f tiene una “ruptura” en X_1=X (ver gráfica 4) entonces la función no puede tener una tangente en X. Esto se demuestra cuando más preciso sea el término de una “ruptura”.



Gráfica No. 4

Vértices.

b) La gráfica de una función f tiene un “vértice” en un punto P (X, f (X)) si la gráfica de f no se interrumpe en P y la posición límite de la recta secante que une a P y Q depende de si Q tiene a P por la izquierda o por la derecha (ver gráfica 5). En los vértices no existe una recta tangente, ya que las pendientes de las rectas no tienen un límite (por ambos lados).



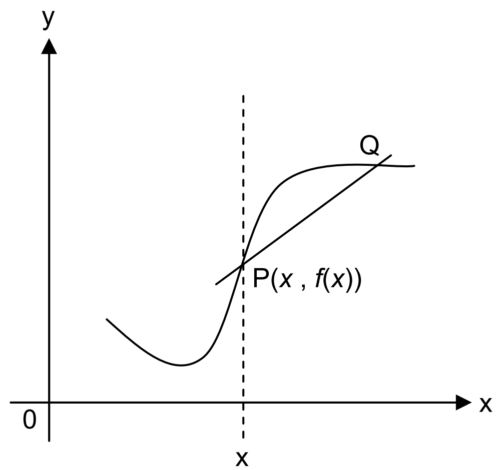
Gráfica No. 5

Tangentes verticales.

c) No existe, puesto que los límites por un lado no son iguales. Por consiguiente, f (x) no es diferenciable en x = 0.

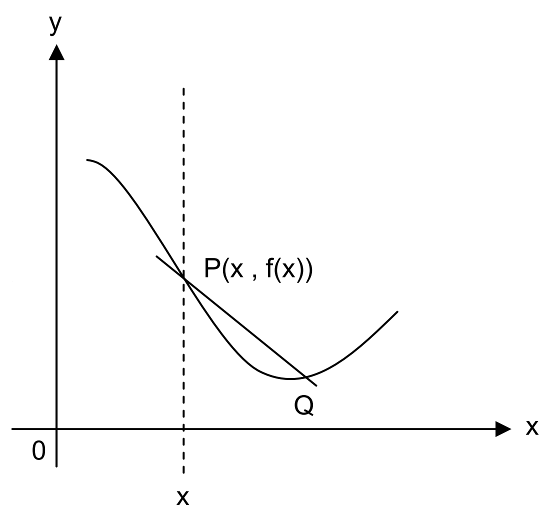
Si la pendiente de la recta secante que une P y Q tiende a a $+\infty$ ó $-\infty$ cuando Q tiende a P sobre la gráfica de f, entonces f no es diferenciable en x.

Desde el punto geométrico, tales puntos ocurren cuando las rectas secantes tienden a una posición límite vertical (ver gráfica 6 y 7)



Gráfica No. 6

a) la pendiente de la recta tiende a $+\infty$ cuando $Q \to P$



Gráfica No. 7

b) la pendiente de la recta secante tiende a $-\infty$ cuando $Q \to P$

El cálculo diferencial es el estudio del cambio que ocurre en una cantidad, cuando ocurren variaciones en otras cantidades de las cuales depende la cantidad original.

Los ejemplos siguientes muestran tales situaciones.

1) El cambio en el corte total de operación de una planta que resultan de cada unidad adicional producida.

2) El cambio en la demanda de cierto producto que resulta de un incremento en el precio.

3) El cambio en el producto nacional bruto de una país con cada año que pasa.

Sea x una variable con un primer valor x_1 y un segundo valor x_2. Entonces es el cambio, de valor x; es $x_2 - x_1$ y se denomina el incremento de cualquier variable.

Δx = $x_2 - x_1$ denota el cambio de la variable *x*

Δp = $p_2 - p_1$ índica el cambio de variable *p*

Δq = $q_2 - q_1$ denota el cambio de la variable *q*.

Sea y = f(x) una variable que depende de x. Cuando x tiende al valor x_1 , y tiende el valor $y_1 = f(x)$ De manera inicial, cuando $x = x_2$ y tiende el valor $y_2 = f(x_2)$
Así el incremento de y es

$$y_2 - y_1 = y_2 - y_1$$

$$= f(x_2) - f(x_1)$$

Ejemplo. El volumen de ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio del litro. Si p en el precio por el litro en centavos, se encuentra que el volumen de venta (en litros por día) esta dado por:

q = 500 (150 – p)

Calcula el incremento en el volumen de ventas que corresponde a un incremento en el precio de 120 c a 130 c por litro.

Solución. Aquí p, es la variable independiente y q la función de p. El primer valor de *p* es: p_1 = 120 y el segundo valor es p_2 = 130. El incremento de p es:

$$p_2 - p_1 = p_2 - p_1 = 130 - 120 = 10$$

Los valores correspondientes de q son los siguientes:

$$q_1 = 500\ (\ 150 - p_1\ ) = 500\ (150 - 120\ ) = 15,\ 000$$

$$q_2 = 500\ (150 - p_2\ ) = 500\ \ (150 - 130\ ) = \ 10,\ 000$$

En consecuencia, el incremento de q esta dado por:

$$p_2 - p_1 = q_2 - q_1 = 10{,}000 - 15{,}000 = -5000$$

El incremento de q mide el incremento en q y el hecho de que sea negativo significa que q en realidad decrece. El volumen de ventas decrece en 5, 000 litros por día si el precio se incrementa de 120c a 130c.

Resolviendo la ecuación $\Delta x = x_2 - x_1$ para x_2 si $\Delta x = h$, entonces tenemos $x_2 = x_1 + h$. Usando este valor de x_2 en la definición de Δy, obtenemos,

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x+h) - f(x)$$

En forma alternativa, dado que f (x) = y_1 podemos escribir:

$$y + y_2 - y_1 = f(x+h)$$

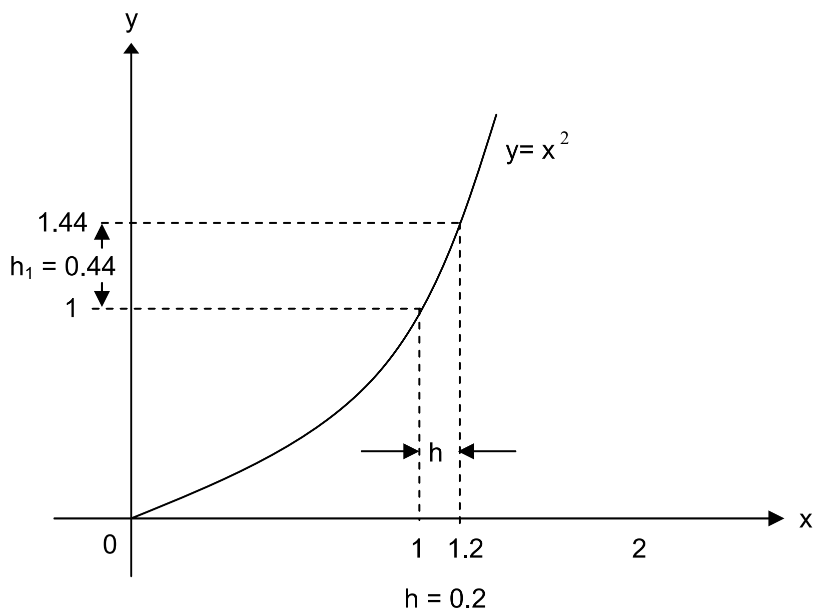
Ejemplo. Dado f (x) = x^2 calcula el incremento $y_2 - y_1$, si x = 1 y h = 0. 2

Solución. sustituyendo los valores de x y Δx en la fórmula de $\Delta y1$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\Delta y = y_2 - y_1 &= f(x+h)^2 - f(x)^2 \\
&= f(1+0.2)^2 - f(1)^2 \\
&= f\,(1.2)^2 - f\,(1)^2 \\
&= (1.2)^2 - (1)^2 = 1.44 - 1 \\
\Delta y = y_2 - y_1 &= 0.44
\end{aligned}$$

Observemos que un cambio de 0.2 en el valor de x da como resultado un cambio en “y” de 0.44.

Observemos la gráfica.



Gráfica No.8

Ejemplo.
En el caso de la función y = x^2, determina cuando x = 1 para cualquier incremento $x_1 - x$. de x.

$$
\begin{aligned}
y_2 - y_1 &= f(x+h) - f(x) \\
&= f(1+h) - f(1) \\
&= (1+h)^2 - (1)^2 \\
&= 1 + 2h + (h)^2 - 1 \\
&= 1 - 1 + 2h + (h)^2 \\
&= 2h + (h)^2
\end{aligned}
$$

Como en la expresión de $y_2 - y_1$ el ejemplo es valido para todos los incrementos h, entonces podemos resolverlo sustituyendo h = 0.2 quedando el siguiente resultado:

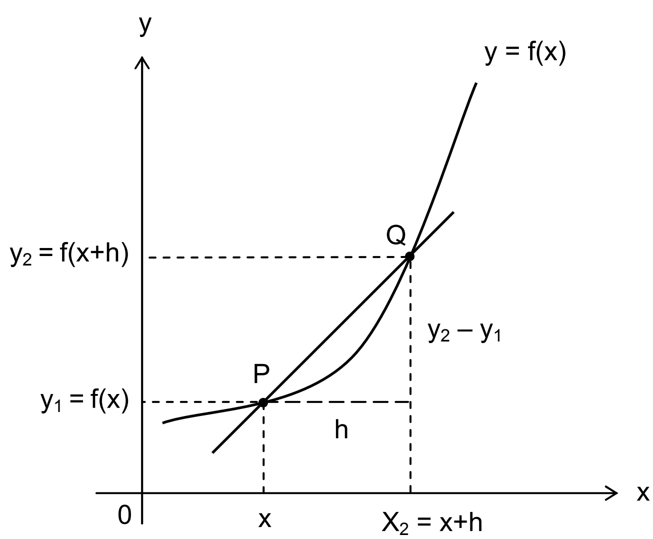
$$y_2 - y_1 = 2(0.2) + (0.2)^2 = 0.4 + 0.04 = 0.44 \quad \text{Como el anterior.}$$

DEFINICIÓN:
La tasa de cambio de una función f sobre un intervalo de x a x + h se define por la razón $y_2 - y_1 / h$, por lo tanto, la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es:

$$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

OBSERVACIÓN: Es necesario que el intervalo de x a x+h pertenezca al dominio de f. gráficamente. Si P en un punto (x , f(x)) y Q en el punto (x+ h), f (x+h) sobre la gráfica de y = f (x), entonces el intervalo $y_2 - y_1$ = f (x + h) – f(x) en la elevación de la h en el recorrido de P a Q. Por definición de pendiente, decimos que $y_2 - y_1 / h$ es la pendiente del segmento rectilíneo PQ. Así que, la tasa de cambio promedio de "y" con respecto a "x" es igual a la pendiente de la recta PQ que pasa por los puntos P y Q sobre la gráfica de y = f(x)

Ver la figura para mayor comprensión; estos puntos corresponden a los valores "x" y "x+h" de la variable independiente.



Gráfica No.9

1.1.2 NOTACIÓN DE LA DERIVADA.

Es conveniente recordar que para denotar la derivada de una función y con una variable independiente x se utilizan las siguientes notaciones y simbolizaciones. Si se tiene y = f(x), la función derivada se simboliza por **D_xy**, que se lee: la derivada de y respecto de **x**. **NOTACIÓN DE CAUCHY**. Si la función es y = f (x) la función derivada se representa por **y**' o por **f' (x) NOTACIÓN DE LAGRANGE**. La notación americana de la derivada de la función y = f (x) es:

$$\frac{dy}{dx} \text{ ó } \frac{df(x)}{dx}$$

Resumiendo las tres notaciones anteriores la derivada de una función y = f(x) puede escribirse:

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}}$$

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta el momento hemos aprendido que la recta que mejor se aproxima a una curva cerca del punto P es la tangente, a través de ese punto, más precisamente, la recta tangente a una curva en P es la posición de la recta tangente que pasa por dos puntos, conforme uno de los puntos se aproxima al otro a lo largo de la curva.

La pendiente *m* de la recta tangente a la curva y = f (x) está dada por:

$$\lim_{h\to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$

1.2 TÉCNICAS DE LA DERIVACIÓN.

1.2.1 DERIVACIÓN DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

Generalmente la derivación se lleva acabo aplicando fórmulas obtenidas mediante la regla general de la derivación y que calcularemos a continuación, de estas podemos derivar las funciones algebraicas, trascendentales, sucesivas y combinadas.

1) *DERIVADA DE UNA CONSTANTE*.

Emplearemos el método de los cuatro pasos.

Si y = f (x) = c siendo c una constante

a) Evaluamos f en x+h, al incrementar x, la constante no cambia y, por lo tanto tampoco cambia y, entonces f (x+h) = c.
b) Restamos f(x).
   f (x+h) – f(x) = c – c = 0
c) Dividimos por h.
   $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{0}{h}=0$$
d) Obtenemos el límite cuando $h \to 0$
   $$\lim_{h\to 0} 0 = 0$$

Resumiendo.

Si y = c entonces y' = 0	La derivada de una constante es igual a cero

Ejemplo.

La derivada de y = 4, es y' = 0

La derivada de y = 5/7, es y' = 0

La derivada de y = 2, es y' = 0

Si y = 8, entonces y' = 0

Si y = –2/3, entonces y' = 0

2) *DERIVADA DE LA VARIABLE INDEPENDIENTE.(FUNCIÓN IDENTICA O IDENTIDAD)*

Sea y = f(x) = x siguiendo la regla general o de los cuatro pasos:

a) $y + y_2 - y_1 = x + h$

b) $y_2 - y_1 = h$

c) $y_2 - y_1 / h = h / h = 1$

La derivada de la variable independiente o con respecto a ella misma, es igual la unidad

Entonces:

d) $\lim_{h \to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = \lim_{h \to 0} 1 = 1$

Si y = x entonces y´ = 1

La derivada de la variable independiente o con respecto a ella misma, es igual la unidad

3) *DERIVADA DEL PRODUCTO DE UNA CONSTANTE POR LA VARIABLE INDEPENDIENTE.*

Sea la función y = cx, por ejemplo y = 5x

Entonces la derivada de y = 5x, es y' = 5

Si y = 5x /3, entonces y' = 5/3

Si y = cx entonces y´ = c

La derivada del producto de una constante por la variable independiente es igual a la constante

Por regla general:

a) $y + y_2 - y_1 = c(x + h)$

b) $y_2 - y_1 = cx + ch - cx = ch$

c) $\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{ch}{h} = c$

d) $\lim_{h \to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = \lim_{h \to 0} c = c$

4) LA DERIVADA DE SUMA DE FUNCIONES

Si y = u + v + w en donde y = f(x) , u = f(x) , v = f(x), w = f(x)

Entonces y' = u' + v' + w' , Siempre que u, v, w sean diferenciables

Ejemplo.

Si y = $(3x^2 + 5x)$, entonces $y' \quad (3x^2 + 5x) = y'(3x^2) + y'(5x) = 6x + 5$

y' = u' + v' + w'	La derivada de la suma algebraica de un número finito de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Empleando la forma general comprueba la fórmula para la derivada de la suma de las funciones,

5) *DERIVADA DE PRODUCTOS Y COCIENTES*.

En esta sección, enfocaremos los dos más importantes teoremas que representan técnicas útiles cuando se requiere derivar funciones complicadas.

TEOREMA 1 REGLA DEL PRODUCTO

Si u(x) y v(x) son dos funciones de x diferenciables, entonces la derivada de su producto es:

(uv)' = u v' + u' v	La derivada del producto de dos funciones es igual a la primera función por la derivada de la segunda más la segunda función por la derivada de la primera.

Ejemplo. Calcula y' si y = $(5x^2 - 3x)(2x^3 + 8x + 7)$
Solución.
La función dada puede escribirse como un producto y = u v
Si hacemos $u = 5x^2 - 3x \quad y \quad v = 2x^3 + 8x + 7$
Aplicando la regla del producto y sustituyendo en la definición del teorema 1 obtenemos,

$$y' = uv' + vu'$$
$$y' = (5x^2 - 3x)(6x^2 + 8) + (2x^3 + 8x + 7)(10x - 3)$$

Desarrollando y simplificando operaciones obtenemos,

$$y' = 30x^4 - 18x^3 - 24x^3 + 40x^2 - 24x + 20x^4 - 6x^3 + 80x^2 - 24x + 70x - 21$$
$$y' = 50x^4 - 24x^3 + 120x^2 + 22x - 21$$

Si observamos el ejemplo anterior, en realidad no necesitamos la regla del producto a fin de calcular la derivada de la función dada. Se puede calcular la primera derivada, eliminando los productos del lado derecho y expresando a *y* como una suma de potencias de x.

y = $(5x^2 – 3x)(2x^3 + 8x + 7)$

y = $10x^5 – 6x^4 + 40x^3 – 24x^2 + 35x^2 – 21x$

y' = $10(5x^4) – 6(4x^3) + 40(3x^2) – 24(2x) + 35(2x) – 21(1)$

y' = $50x^4 – 24x^3 + 120x^2 + 22x – 21$

Ejemplo.
Dada f(t) = $(2\sqrt{t} + 1)(t^2 + 3)$, determine f'´ (t) aplicando la regla del producto.

u = $2\,t^{1/2} + 1 \quad y \quad v = t^2 + 3$

f' (t) = $(2\,t^{1/2} + 1)\dfrac{d}{dt}(t^2 + 3) + (t^2 + 3)\dfrac{d}{dt}(2t^{1/2} + 1)$

= $(2t^{1/2})\,(2t) + (t^2 + 3)\,[(2t)\,(t^{-1/2}/2)]$

= $4t^{3/2} + 2t + t^{3/2} + 3t^{-1/2} = 5t^{3/2} + 2t + \dfrac{3}{\sqrt{t}}$

La ecuación de demanda del precio p expresa que una cantidad x de cierto artículo puede venderse durante cierto periodo. En general podemos escribir p= f (x). El ingreso originado en la venta de este número de artículos es R= x p.

Donde R esta expresado como el producto de dos cantidades, el ingreso marginal, que es la derivada de R con respecto a x, puede obtenerse mediante la regla del producto.

$$\frac{dR}{dx} = p\frac{d}{dx}(x) + x\frac{d}{dx}(p)$$

$$= p(1) + x\frac{dp}{dx} = p + x\frac{dp}{dx}$$

Ejemplo. Ingreso marginal

Si la ecuación de demanda es lineal, tenemos p = a – bx en donde a y b son dos constantes positivas.
Así, dp/dx = - b y el ingreso marginal es

dR/dx = p + x dp/dx; dR/dx = a – bx + x (-b) = a – 2bx.

Observemos que el ingreso marginal en este ejemplo puede de hecho calcularse directamente R = xp = x (a – bx) = ax – bx ^{2}
R' (x) = a – 2bx.

Algunas veces es útil hallar el ingreso marginal con respecto al precio. Considerando el ingreso R como una función del precio p; el ingreso marginal con respecto al precio se define con la derivada de dR/dp

Representa el incremento en el ingreso por cada unidad de incremento en el precio por artículo cuando el precio sufre un pequeño incremento.

Dado que R = xp, u cumple con la regla del producto.

$$\frac{dR}{dp} = x\frac{d}{dx}(p) + p\frac{d}{dx}(x) = \frac{dR}{dp}x + p\frac{dx}{dp}$$

La derivada de dx /dp que ocurre en esta ecuación a menudo se denomina la *derivada marginal con respecto al precio.* Significa el incremento en la demanda por unidad de incremento en el precio por artículo cuando el precio sufre de un pequeño incremento.

Ejemplo. Considerando otra vez la ecuación de la demanda lineal p = a – bx, se tiene que x = (a/b) – (p/b) y así dx/dp = –1/b, por lo tanto, el ingreso marginal con respecto al precio es:

$$\frac{dR}{dp} = x + p\frac{dx}{dp}$$

$$= \frac{a}{b} - \frac{p}{b} + p(\frac{1}{b})$$

$$= \frac{a}{b} - \frac{p}{b} - \frac{p}{b} = \frac{a}{b} - \frac{2p}{b}$$

Una vez más, podríamos haber calculado dR/dp directamente derivando la función: $R = xp = (ap - p^2) / b$

TEOREMA 2. REGLA DEL COCIENTE.

Si u (x) y v(x) son dos funciones diferenciables de x, se tiene que:

$$\boxed{(\frac{u}{v}) = \frac{vu' - uv'}{v^2}}$$

La derivada del cociente de dos funciones es igual al denominador por la derivada del numerador menos el numerador por la derivada del denominador todo dividido entre el cuadrado del denominador.

Ejemplo. Calcula y' $= \dfrac{x^2+1}{x^3+4}$

Aplicando la regla del cociente tenemos

$u = x^2 + 1$ y $v = x^3 + 4$

$$y' = \frac{(x^3+4)\ u'(x^2+1) - (x^2+1)\ v'(x^3+4)}{(x^3+4)^2}$$

$$y' = \frac{(x^3+4)(2x) - (x^2+1)(3x^2)}{x^6+8x^3+16} = \frac{2x^4+8x-(3x^4+3x^2)}{x^6+8x^3+16}$$

$$y' = \frac{-x^4-3x^2+8x}{x^6+8x^3+16} = \frac{-x^4-3x^2+8x}{(x^3+4)^2}$$

Ejemplo. Calcula y’ si $y = \dfrac{x+1}{x+3}$

u = (x + 1) y v = (x + 3)

$$y' = \frac{(x+3)\ u'(x+1)\ -\ (x+1)\ v'(x+3)}{(x+3)^2}$$

$$y' = \frac{(x+3)(1)-(x+1)(1)}{(x+3)^2} = \frac{x+3-x-1}{(x+3)^2}$$

$$y' = \frac{2}{(x+3)^2}$$

Ejemplo. Calcula y´ si $y = \dfrac{3}{2x+7}$

u = 3 y v = (2x + 7)

$$y' = \frac{(2x+7)\ u'(3)\ -\ (3)\ v'(2x+7)}{(2x+7)^2} = \frac{-6}{(2x+7)^2}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Usando la regla del producto calcula las derivadas de las funciones siguientes con respecto a la variable independiente respectiva.

a) $y = (x + 1)(x^3 + 3)$

b) $u = (7x + 1)(2 - 3x)$

c) $f(x) = (x^2 - 5x + 1)(2x + 3)$

d) $y = (x^3 + 6x^2)(x^2 - 1)$

e) $u = (x^2 + 7x)(x^2 + 3x + 1)$

f) $g(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2$

g) $f(x) = (3x + 7)(x - 1)^2$

h) $u = \left(\dfrac{y+3}{y}\right)(y^2 - 5)$

i) $g(t) = \left(\dfrac{t+1}{t}\right)\left(\dfrac{5t^2 - 1}{t^2}\right)$

j) $f(x) = (2x + 1)(3x^2 + 1)(x^3 + 3)$

2. Usando la regla del cociente calcular las derivadas de las funciones con respecto a la variable independiente respectiva.

a) $f(x)= \dfrac{t^2 - 7t}{t - 5}$

b) $t= \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

c) $f(t) = \dfrac{5t}{2 - 3t}$

d) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x - 1}$

e) $y = \dfrac{u^2 - u + 1}{u^2 + u + 1}$

f) $y = \dfrac{1}{x^2 + 1}$

g) $y = \dfrac{u}{u + 1}$

h) $g(x)= \dfrac{3 - x}{x^2 - 3}$

i) $x = \dfrac{u + 1}{u - 1}$

j) $y = \dfrac{1}{(t + 1)^2}$

6) *DERIVADA DE UNA CONSTANTE POR UNA FUNCIÓN*.

Si y = c u

Entonces $y = 7x^2$ tiene como derivada la expresión:

$$y'(7x^2) = 7(y'x^2) = 7(2x) = 14x$$

Si y = c u Entonces y' = c u'

La derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función

Ejemplos:

$$y = \frac{3}{5}x$$

$$y' = \frac{3}{5}\ y'(x)$$

$$y' = \frac{3}{5}\ (1) = \frac{3}{5}$$

$$y = \frac{5}{2}x$$

$$y' = \frac{5}{2}\ y'(x)$$

$$y' = \frac{5}{2}\ (1) = \frac{5}{2}$$

7) *DERIVADA DE LA POTENCIA DE UNA FUNCIÓN DE LA FORMA $y = x^n$*

Sea $y = x^n$ donde y = f (x)
u = x
n = No. entero positivo o negativo.

Si $y = x^3$ su derivada es $y' = 3x^2$

Si $y = x^n$ Entonces $y' = n\,x^{n-1}$

Cuando el exponente es negativo:

Si $y = x^{-n}$ Entonces $y' = -nx^{-n-1}$

La derivada de la función potencial de x siendo su exponente un número entero positivo o negativo, es igual al producto del exponente n por la potencia disminuida en la unidad

Ejemplos.

Derivar:

$y = x^{-6}$

$y' = -6\, x^{-6-1}$

$y' = -6\, x^{-7} = \dfrac{-6}{x^7}$

$y = \dfrac{3}{x^2}$

$y' = 3x^{-2} = -2\,(3x^{-2-1})$

$y' = -6x^{-3}) = \dfrac{-6}{x^3}$

8) DERIVADA DE LA POTENCIA DE FUNCIONES

Si $y = u^n$ Entonces $y = (3x+2)^5$ tiene como derivada:

$y' = 5\,(3x + 2)^{5-1}\; y'\,(3x + 2)$

$y' = 5(3x+2)^4(3) = 15(3x+2)^4$

$y'(u)^n = nu^{n-1}u'$	La derivada de la potencia de una función es igual al producto del exponente por la función elevada a un grado menos y por la derivada de la función

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Derivar las siguientes funciones.

a) $y = x^3$

b) $y = x^4 - 2x^2 + 5x + 7$

c) $y = (3 - x)(2 + x)$

d) $y = (x^2 + 1)^2$

9) DERIVADA DE UNA FUNCIÓN ENTRE UNA CONSTANTE

Sea y = $\frac{u}{c}$ en donde c es una constante

Ejemplo. Derivar y·= $\frac{3x+2}{8}$ donde u = 3x + 2 y u' = 3

Entonces y' = $\frac{3}{8}$

$y'\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{u'}{c}$	La derivada de la función entre una constante es igual a la derivada de u entre la constante

Esta fórmula también podemos citarla como un caso particular de la derivada de una constante por una función.

10) DERIVADA DE LA RAIZ CUADRADA DE UNA FUNCIÓN.

Derivar. y = $\sqrt{3x-2}$ donde u = 3x – 2 y u' = 3

Entonces $$y' = \frac{3}{2\sqrt{3x-2}}$$

Porque si y = $\sqrt{x}$ entonces y = $x^{1/2}$ y su derivada es y' = $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Si el radicando (lo que está dentro del radical) es una variable u, entonces la función es de la forma y = $\sqrt{u}$ y su derivada es:

$y'\sqrt{u} = \left[\frac{u'}{2\sqrt{u}}\right]$	La derivada de la raíz cuadrada de una variable, es la derivada de la variable entre dos veces la raíz de la variable

Ejemplo.

Derivar la función $y = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$, utilizando el exponente fraccionario y el exponente negativo.

$$y = x^{1/2} + \frac{1}{x^{1/2}} = x^{1/2} + x^{-1/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(x^{1/2-1}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(x^{-\frac{1}{2}-1}\right) = \frac{1}{2}x^{-1/2} - \frac{1}{2}x^{-3/2}$$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{1/2}}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^{3/2}}\right)$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{2\sqrt{x^3}}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Obtén la derivada de las siguientes funciones, aplicando la fórmula correspondiente

a) $f(x) = 7x$

b) $f(x) = bx + c$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 8}{3}$

d) $f(x) = 3\,(x^3 - x^2)$

e) $f(x) = (x^2 + 1)^2$

f) $f(x) = (ax)^4$

g) $f(x) = (3x + 2)^5$

h) $f(x) = \dfrac{3}{x^{-4}}$

i) $f(x) = 3x^2 - 1$

j) $f(x) = \dfrac{3x^2}{x - 1}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 + 8)^3}$

l) $f(x) = x$

m) $f(x) = 7x^4$

n) $f(x) = 9x^3 - x^5$

o) $f(x) = x^3$

p) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 + 2}$

q) $f(x) = \dfrac{x}{2x + 7}$

r) $f(x) = \sqrt{2x - 1}$

1.2.2 REGLA DE LA CADENA

Las reglas de la derivación presentadas en las secciones anteriores se pueden usar solamente para sumar, restar productos y cocientes de expresiones de la forma x donde n es un número entero .

$$(x^2+1)^3$$

Es claro que Dx $(x^2+1)^3$

Si cambiamos la forma de la expresión, entonces;

$y=(x^2+1)^3=x^6+3x^4+3x^2+1$ y $D_x y = 6x^5 + 12x^3 + 6x$,

factorizando $D_x y = 6x (x^2 + 1)^2$ Por lo tanto Dxy $(x^2 + 1)^3 = 6x (x^2 + 1)^2$

Este desarrollo es muy complicado para potencias mayores como por ejemplo $(x^2+1)^{10}$ entonces es conveniente tener métodos más sencillos para calcular la derivada.

El que se usa en este caso parte de expresar una función de x , recordando que si f y g son funciones tales que:

y = f (u) (1) u = g(x) (2)

Ahora bien si g (x) esta en el dominio de f entonces la podemos escribir y = f(u) = f [g(x)] es decir, y es una función de x, esto último es la función compuesta f ó g, podemos notar que la expresión

$y=(x^2+1)^3$ puede expresarse de la manera siguiente.

$y = u^3$ y $u = x^2 + 1$

Si se pudiera encontrar una regla general para derivar f [g(x)], entonces se podría aplicar a y = $(x^2+1)^3$ como caso especial y también a cualquier expresión de la forma y = $[f(x)^n]$ donde n debe ser un número entero.

Para dar una idea de tipo de regla esperada regresemos a las ecuaciones 1 y 2 y = f(u), u = g(x) queremos encontrar una fórmula para la derivada dy/dx de la función compuesta dada por y = f [g(x)] . Si f y g son derivables, entonces utilizando la notación de las diferenciables tenemos

$$\frac{dy}{dx} = f'(u) \qquad y \qquad \frac{du}{dx} = g'(x)$$

Considerando como producto $\frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

y tratando las derivadas como cocientes diferenciables llegamos a la siguiente regla.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x)$$

notamos que esta proporciona la derivada correcta de y = $(x^2 + 1)^3$ escribiendo $y = u^3$ y $u = x^2 + 1$ y utilizando la regla tenemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} . \frac{du}{dx} = (3u^2)(2x) = 6x(x^2 + 1)^2$$

No se ha demostrado la citada regla, se ha planteado el siguiente teorema en la que se supone que las variables se eligen de manera que la función compuesta f ó g, esta definida y que si g tiene la derivada en x entonces f tiene derivada en g(x).

REGLA DE LA CADENA.

Si y = f(u), u = g(x), y las derivadas dy/du y du/dx existen ambas, entonces la función compuesta definida por y = f [g(x)] tiene una derivada dada por:

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = f'(u) \cdot g'(x) = f'[g(x)]\ g'(x)}$$

Ejemplos.

Sea $y = (3x^2 - 7x + 1)^5$ encontrar dy/dx utilizando la regla de la cadena.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = (5u^4)(6x - 7) = 5(3x^2 - 7x + 1)^4(6x - 7)$$

Si $y = \sqrt{4 - x^2}$ entonces $y = (4 - x^2)^{1/2}$, $y = u^{1/2}$ $u = 4 - x^2$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{2} u^{-1/2} (-2x) = -x(4 - x^2)^{-1/2} = \frac{-x}{(4 - x^2)^{1/2}} = \frac{-x}{\sqrt{4 - x^2}}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Usando la regla de la cadena, calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $g(x) = (x^2 + 1)(x + 1)^2$

b) $f(x) = (3x + 7)(x - 1)2$

c) $y = \dfrac{1}{(t+1)^2}$

d) $y = \sqrt{x^3 + 1}$

e) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^3 + 4}}$

1.2.3 DERIVADAS SUCESIVAS O DE ORDEN SUPERIOR

Si el movimiento de un objeto lo describimos por la ecuación $S = \frac{1}{3}t^3 - t^2$ para el tiempo en un intervalo de (0,10), si t esta dada en segundos y S en metros.

Calcula la distancia recorrida, la velocidad y la aceleración para, a) t = 6 seg, b) t = 3seg, c) t = 2 seg, d) t = 1 seg.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Contesta las siguientes preguntas con base al problema del movimiento de un objeto.

¿Puedes resolverlo aplicando las derivadas sucesivas?

____

¿Qué calcularías primero, la velocidad, distancia, o aceleración?

____

¿La primera derivada de f (x) que representa?

____

¿Si S = f(t) que representa esta función?

____

La solución del problema anterior, es la siguiente.

Si lo podemos resolver utilizando derivada de orden superior o sucesivas.
Se calcula primero la distancia, después la velocidad y por último la aceleración.
La derivada f '(x) nos representa, razón de cambio f(x) con respecto a x.
S = f(t) nos representa el desplazamiento de algún móvil en línea recta.

a) Tenemos que calcular f (t), f \`(t), f´´(t) siendo S = f(t)

$$S = f(t) = \frac{1}{3}t^3 - t^2$$

Para t = 6 seg.

Desplazamiento: $f(6) = \frac{1}{3}(6)^3 - (6)^2 = \frac{216}{3} - 36 = 72 - 36 = 36\,\text{mts}$

Velocidad (primera derivada): $f'(t) = t^2 - 2t$
$f'(6) = (6)^2 - 2(6) = 36 - 12 = 24$ m/seg

Aceleración (segunda derivada): $f''(t) = 2t - 2$

$f''(6) = 2(6) - 2 = 12 - 2 = 10$ m/seg^2

Es decir en t = 6 segundos el móvil recorrió 36m con una velocidad de 24 m/seg y una aceleración de 10 m/seg.

b) Debemos calcular f(3), f ‘ (3), f ’’(3)

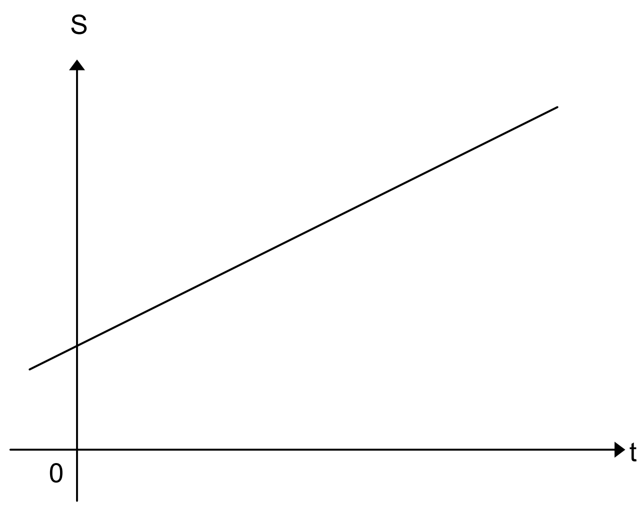
$$f(3) = \frac{1}{3}(3)^3 - (2)^2 = \frac{27}{3} - 9 = 9 - 9 = 0 \text{ mts}$$

$f'(3) = (3)^2 - 2(3) = 9 - 6 = 3$ m/seg

$f''(3) = 2(3) - 2 = 6 - 2 = 4$ m/seg^2

En t = 3 seg el móvil recorrió cero m, (empezó retrocediendo y en t = 3 había avanzado los que había retrocedido. En t = 3 seg, su velocidad era de 3 m/seg y su aceleración de 4 m/seg.

Resuelve los incisos “c” y “d” ¿Qué observas? Por último observamos que si la gráfica de la función desplazamiento con respecto al tiempo tiene la forma:



(1) La velocidad es positiva y constante, lo que implica que la velocidad instantánea es la misma por cada instante y la aceleración es nula

¿Cuál es la gráfica para las otras funciones?

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Ejercicios de aplicación.

a) Sea $f(x) = x^4 - 2x^2 - \sqrt{x}$ calcula f ''' (x)

b) Si $f(x) = \dfrac{1}{x}$ calcular $f^4(x)$ en x = 2

c) Sea $h(x) = \sqrt{24 - x^2}$ calcular f ''(4)

Para los ejercicios del inciso d) al i) toma en cuenta que una partícula se mueve según la ecuación.

$s = t^3 - 6t^2$, para t > 0 donde t esta en hrs. y *s* en km.

d) Calcula la aceleración media en [3,5]

e) Calcula la aceleración instantánea en t = 5

f) Calcula la aceleración instantánea en t = 1

g) ¿A que el valor "t" es igual a 0?

h) ¿En que intervalo la velocidad es positiva?

i) ¿En que intervalo la aceleración es positiva?

La velocidad de un móvil se define como la derivada de una función.

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Si el límite existe entonces la segunda derivada de f, será:

$$f''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h}$$

Así como la primera derivada f’ (x) representa la razón de cambio de f(x) con respecto a x, la segunda derivada nos da la razón de cambio f’’(x) con respecto a (x).

Recordando que si S = f(t) es una función que representa el desplazamiento de algún móvil en la línea recta, entonces la velocidad instantánea v en t_1 es,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(t_1 + h) - f(t)}{h} \quad \text{si el límite existe}$$

lo cual no es otra cosa que la derivada f’(t), es decir v =f’(t) o bien V (ds/dt) por lo tanto vez la razón de cambio de S = f(t) con respecto a t (o sea que la velocidad instantánea V es la razón de cambio del desplazamiento del móvil con respecto al tiempo. Así la segunda derivada f de t con respecto a t será la razón de cambio de la velocidad y se llama aceleración, entonces se tiene que:

Aceleración V’ = $[f'(t)]' = \lim_{h \to 0} \frac{f''(t+h) - f''(t)}{h}$

Resumiendo tenemos que si el movimiento de un objeto esta descrito por *S* como función del tiempo, entonces *S* es una función real de variable dada *S* = f(t), la velocidad V del objeto estará dada por la función f ’(t) o bien ds/dt (si f es la variable) y la aceleración “a” será la función V’ = f ’’(t);

En general la derivada de orden n se denota $f^{(n)}$ $\quad o \quad bien \quad \frac{d^n y}{dx^n}$

Ejemplo.

Si f(x) = x^4 , entonces:

$$f'(x) = 4x^3$$
$$f''(x) = 12x^2$$
$$f^3(x) = 24x$$
$$f^4(x) = 24$$
$$f^5(x) = 0$$
$$f^n(x) = 0 \quad \text{si n es entero y n > 5}$$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Calcula f ' , f '' y f ''' de cada una de las siguientes funciones.

   a) $f(x) = 6x^3 – 4x^2 + x$

   b) $f(x) = x^3 – 2x^2 + 3x – 6$

   c) $f(x) = ax^3 + bx^2 – cx + d$

2. Encuentra la velocidad y la aceleración de un objeto cuya posición *S* en el tiempo t está dada por:

   a) $S = 16t^2 + 16t$

   b) $S = 4.9t^2 + 4t + 4$

1.2.4 DERIVADA DE FUNCIONES IMPLÍCITAS.

GENERALIDADES.- Las funciones se pueden expresar tanto en forma implícita como en forma explícita.

Ejemplo: La función $y = \sqrt{5 - x^2}$ esta expresada en forma explicita, la misma expresión en forma implícita queda $y^2 + x^2 = 5$.

Hemos estudiado las fórmulas para derivar las funciones explícitas, pero sucede a veces que debemos derivar una función implícita por que *no es posible o resulta complicado despejar la "y"* esto lo resolvemos con el método de derivación implícita que constituye una aplicación de la derivación de una función de funciones.

PROCEDIMIENTO PARA DERIVAR UNA FUNCIÓN IMPLICITA.

Derivamos término a término, tomando "y" como una función de "x", en la expresión resultante, despejamos dy/dx como lo hacemos en la ecuación.

En algunos casos retomamos las fórmulas.

a) y' (uv) = uv' +vu'	La derivada de un producto
b) $y' (u)^n = n(u)^{n-1} u'$	La derivada de una función elevada a un exponente entero positivo
c) $\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\,u' - u\,v'}{v^2}$	La derivada de un cociente

y otras según lo estime el problema.

Ejemplo. Derivar la función implícita $x^2 + y^2 = 5$

Solución: derivamos término a término con respecto a x

$$y'(x^2) = 2x$$
$$y'(y^2) = 2y$$
$$y'(5) = 0$$

Sustituyendo

$y' (x^2 + y^2 - 5) = 2x + 2y\, y' - 0$
$= 2x + 2y(y')$. ecuación (1)

Despejamos $y' de. 1$

$2y\,y' = -2x \quad \therefore \quad y' = -\frac{x}{y}$

El ejercicio anterior lo podemos expresar en forma explícita y obtener su derivada.

Continuando con el ejemplo. Derivar

$x^2 + y^2 = 5 \qquad y = \sqrt{5 - x^2} = (5 - x^2)^{1/2}$

$u = 5 - x^2 \qquad y' = \frac{1}{2}(5 - x^2)^{-1/2}(-2x)$

$u' = -2x \qquad y' = -\frac{2x}{2\sqrt{5 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{5 - x^2}}$

Como $y = \sqrt{5 - x^2}$, entonces se sustituye en la derivada y se obtiene la expresión $y' = -\frac{x}{y}$

Ejemplo. Derivar $5x^2 - xy + y^2 = 0$

En este caso aunque quisiéramos no es posible dar la expresión en forma explícita por lo cual es necesario aplicar el procedimiento de la derivación implícita. Solución derivando término a término con respecto de x.

$y'(5x^2) = 10x$
$y'(xy) = xy' + y$
$y'(y^2) = 2y(y')$

Sustituyendo, tenemos: $y'(5x^2 - xy + y^2) = 10x - (xy' + y) + 2yy'$
$= 10x - xy' - y + 2y\,y'$

Despejamos a y': $-xy' + 2y\,y' = y - 10x$
$y'(-x + 2y) = y - 10x$ $\quad y = \dfrac{y - 10x}{2y - x}$

NOTA En general los resultados de los términos de las funciones implícitas incluyen a "x" y a "y" como en el ejemplo anterior.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Obtener la derivada de y con respecto a x en las siguientes funciones por el método de derivación implícita.

a) $.5x^2 + 2y^2 = 1$ sol. $y' = -\dfrac{5x}{2y}$ ó $y' = \dfrac{5x}{2\sqrt{\dfrac{1-5x^2}{2}}}$

b) $x^2y^2 - y^2 = x^2$ sol. $\dfrac{x - xy^2}{x^2y - y}$

c) $x^2 - 5y^2 = 3$ sol. $y' = \dfrac{x}{5y}$ ó $y' = \dfrac{x}{5\sqrt{\dfrac{x^2-3}{5}}}$

d) $5 - y^3 = x$ sol. $y' = -\frac{1}{3y^2}$ ó $y' = -\frac{1}{3\sqrt[3]{(5-x)^2}}$

e) $y^2 = 2px$ sol. $y' = \frac{p}{y}$ ó $y' = \frac{p}{\sqrt{2px}}$

f) $5xy - 1 = 0$ sol. $y' = -\frac{y}{x}$ ó $y' = -\frac{1}{5x^2}$

g) $x - 5y^2 = 3y$ sol. $\frac{1}{10y+3}$

h) $x^2 - xy + y^2 = 0$ sol. $y' = \frac{y-2x}{2y-x}$

i) $b^2x^2 - a^2y^2 = 3a^2b^2$ sol. $y' = \frac{b^2x}{a^2y}$

j) $x - 5y^2 = 2y$ sol. $y' = \frac{1}{10y+2}$

1.2.5 DERIVADA DE FUNCIONES EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

Antes de entrar al campo de logaritmos es necesario hacer un recordatorio:

a) Reglas fundamentales de los logaritmos de cualquier base

1. $\log_a A\,B = \log_a A + \log_a B$
2. $\log_a A/B = \log_a A - \log_a B$
3. $\log_a A^n = n \log_a A$
4. $\log_a \sqrt[a]{n} = \frac{\log_a A}{n}$

b) En las propiedades generales de los logaritmos, se indica , en todo sistema de logaritmos el logaritmo de base uno.

c) En ecuaciones exponenciales; toda ecuación que contiene a la incógnita como exponente se llama ecuación logarítmica.

Ejemplo. $\log 5^{(x-3)} + \log^{5x} = 2$

d) El numero “e”; se utiliza en las matemáticas para el estudio de diferentes fenómenos físicos, biológicos, económicos y sociales, es un numero irracional que se expresa e = 2.718..... es decir,

$$\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m} = e = 2.718.....$$

NOTACIÓN

$\log_e u$ = ln u = Lu para los naturales

log u = $\log_a u$ para los vulgares

e) DERIVADA DE $\log_a u$

Sea y = $\log_a u$ en donde u = f(x)
como y > u, están en función de x, cuando se incrementa,
entonces $y + y_2 - y_1, .u + u_2 - u_1$ donde:

I. $y + y_2 - y_1 = \log_a (u + u_2 - u_1)$

II. $y_2 - y_1 = \log_a (u + u_2 - u_1) - \log_a u$

Si observamos es de acuerdo a la regla fundamental de logaritmos según el de a/2

$$\log_a A/B = \log_a A - \log_a B$$

Hacemos $A = (u + u_2 - u_1)$ B = u

de donde $y_2 - y_1 = \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right]$

al segundo miembro lo multiplicaremos por $\frac{u_2 - u_1}{u}$ y lo dividiremos entre, $\frac{u_2 - u_1}{u}$

recordando que para dividir podemos multiplicar por el recíproco del divisor,

$$y_2 - y_1 = \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right] \cdot \frac{u_2 - u_1}{u} \div \frac{u_2 - u_1}{u}$$

III. $$\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{u}{u_2 - u_1} \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right] \cdot \frac{u_2 - u_1}{u\,h}$$

de acuerdo a la regla de los logaritmos

$\log_a A^n = n \log_a A$

sabemos que $n \log_a A = \log_a A^n$

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{u}{u_2 - u_1} \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right] \cdot \frac{u_2 - u_1}{u\,h} = \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right]^{\frac{u}{u_2 - u_1}} \cdot \frac{u_2 - u_1}{u\,h}$$

descomponemos: $\dfrac{u_2 - u_1}{u\,h}$

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = \log_a \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right]^{\frac{u}{u_2 - u_1}} \cdot \frac{1}{u} \cdot \frac{u_2 - u_1}{h}$$

como límite

$$\lim_{u_2 - u_1 \to 0} \left[\frac{(u + u_2 - u_1)}{u}\right]^{\frac{u}{u_2 - u_1}} = e$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = \log_a e \cdot \frac{1}{u} \cdot \lim_{h \to 0} \frac{u_2 - u_1}{h}$$

de donde $y' = \dfrac{\log_a e}{u} u'$

$$\boxed{y' \log_a u = \frac{\log_a e}{u} u'} \qquad \text{ecuación (1)}$$

Ejemplo. Derivar $y = \log \dfrac{3}{x}$

$$y = \log 3x^{-1}$$
$$u = 3x^{-1}$$
$$u' = -1(3)(x)^{-2} = -\frac{3}{x^2}$$

$$y' = \frac{\log e}{3x^{-1}}\left(-\frac{3}{x^2}\right)$$

$$y' = -\frac{3x \log e}{3x^2} \quad \therefore \quad y' = -\frac{\log e}{x}$$

f) *DERIVADA DE* ln u

$\log_e u$ se puede expresar como: $\log_e u$ = ln u = Lu

Sea = $\log_e u$

En donde u = f(x) de la fórmula (1)

$y' \log_a u = \dfrac{\log_a e}{u} u'$ si hacemos a = e, queda:

$y' \log_e u = \dfrac{\log_a e}{u} u'$

como en todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es un 1

$\log_a .e = 1$ de donde:

$$\boxed{y' \log_e u = y' \ln = \frac{1}{u} \cdot u'}$$ ecuación (2)

Ejemplo. Derivar y = ln (ax + 3)

Donde u = ax + 3 y aplicando la formula u´= a

$y'(\ln u) = \dfrac{1}{u} u'$ Sustituyendo valores

$$= \frac{1}{ax+3} . \frac{a}{1}$$

$$y' = \frac{a}{ax+3}$$

Derivar $y = \ln(\ln x)$

Aplicando la formula u = ln x y u' = $\dfrac{1}{x}$

$$y'(\ln(\ln x)) = \frac{1}{\ln x} . \frac{1}{x} = \frac{1}{x \ln x}$$

g) *DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EXPONENCIAL* a^u

sea $y = a^u$ en donde $u = f(x)$

A la exponencial se le aplica logaritmos a los dos miembros de la ecuación, $\ln y = u \ln a$ y se deriva en forma implícita, desarrollamos el primer miembro con la fórmula (2) y el segundo miembro con la derivada de un producto.

$$\frac{y'}{y} = u\left(\frac{1}{a}\right) + \ln a \; u'$$

$$\frac{y'}{y} = \ln a \; u'$$ despejamos $y' = y \ln a \, u'$

Como $y = a^u$. Entonces:

$\boxed{y'(a^u) = a^u \ln a \, u'}$ ecuación (3)

Ejemplo. Derivar $y = 10^{(x^2+5x-6)}$

$u = x^2 + 5x - 6$ $\qquad$ $u' = 2x + 5$

$$y' = 10^{(x^2+5x-6)}(\ln 10)(2x+5)$$

$$y' = (2x + 5)\; 10^{(x^2-5x-6)} \ln 10$$

h) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL* e^u

Sea $y = e^u$ en donde $u = f(x)$ de la ecuación (3)

$y'(a^u) = a^u \ln a \, u'$ hacemos $a = e$ queda

$y'(e^u) = e^u \ln e \, u'$

Como en todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es uno, $\ln e = 1$ Entonces:

$\boxed{y'(e^u) = e^u u'}$ ecuación (4)

Ejemplo. Derivar $y = e^{x^3}$ donde $u = x^3$

Por lo tanto aplicando la formula resulta $y' = e^{x^3}(3x^2) = 3x^2 e^{x^3}$

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Con base a los conceptos de funciones logarítmicas y exponenciales, deriva las siguientes funciones para reafirmar tu conocimiento:

a) $y = \ln(3x + b)$ sol. $y' = \dfrac{6}{3x + b}$

b) $y = \ln(3x^2 + b)$ sol. $y' = \dfrac{6x}{3x^2 + b}$

c) $y = \ln(ax + 2)$ sol. $y' = \dfrac{a}{ax + 2}$

d) $y = \ln(2x^n)$ sol. $y' = \dfrac{n}{x}$

e) $y = \ln(2x^3 - 3x^2 + 5)$ sol. $y' = \dfrac{6x(x-1)}{2x^3 - 3x^2 + 5}$

f) $y = \log\dfrac{3}{x}$ sol. $y' = \dfrac{\log e}{x}$

g) $y = \ln\dfrac{3}{x}$ sol. $y' = \dfrac{6}{x(3 + x^2)}$

h) $y = \ln\sqrt{3 - 2x^2}$ sol. $y' = \dfrac{-2x}{3 - 2x^2}$

i) $y = 2x \ln x$ sol. $y' = 2 + 2\ln x$

j) $y = e^{2x}$ sol. $y' = 2e^{2x}$

1.2.6 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS DIRECTAS Y RECÍPROCAS

a) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN SENO*

Derivar:

$y = \text{sen}\,(3x - 1)$

$y' = \cos\,(3x - 1)\;\; y'(3x - 1) = 3\cos\,(3x - 1)$

$y = \text{sen}\,(3x^2 - 1)$ Donde $u = 3x^2 - 1$ y $u' = 6x$

$y' = \cos u \cdot u' = \cos\,(3x^2 - 1)\,(6x) = 6x\cos\,(3x^2 - 1)$

$y = \text{sen}^2 x$ Donde $y = (\text{sen}\,x)^2$

$y' = 2\,\text{sen}\,x\;\; y'(\text{sen}\,x) = 2\,\text{sen}\,x\;\cos x = \text{sen}\,2x$

NOTA. Por la identidad trigonométrica se tiene que sen 2x = 2 sen x cos x

Entonces $\boxed{y'\,(\text{sen}\,u) = \cos u \cdot u'}$ Derivada de la función seno

Empleando la regla de los 3 pasos encontrar la derivada de sen x.

b) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN COSENO*

Derivar:

$y = \cos 2x$

$u = 2x$, $u' = 2$

$y' = -\text{sen}\,u \cdot u' = -\text{sen}\,2x\,(2)$

$y' = -2\,\text{sen}\,2x$

$y = \cos(3x^2 - x)$

$u = 3x^2 - x$, $u' = 6x - 1$

$y' = -\text{sen}\,u \cdot u' = -\text{sen}\,(3x^2 - x)\,(6x - 1)$

$y' = -(6x - 1)\,\text{sen}\,(3x^2 - x)$

Entonces $\boxed{y'\,(\cos u) = -\text{sen}\,u \cdot u'}$ Derivada de la función coseno

c) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN TANGENTE*

Derivar:

y = tan x – 2x

u = x   u' = 1

$y' = \sec^2 x(1) - 2$

y' = $\sec^2$ x – 2

y = $\tan \sqrt[3]{2x}$ Donde y = $\tan (2x)^{1/3}$

y' = $\frac{1}{3}(\tan 2x)^{-2/3} \frac{d(\tan 2x)}{dx}$ Con u = 2x ; u' = 2

y' = $\frac{1}{3}(\tan 2x)^{-2/3} \sec^2 2x\,(2)$

y' = $\frac{2 \sec^2 2x}{3(\tan 2x)^{2/3}}$

Entonces $\boxed{y' (\tan u) = \sec^2 u \cdot u'}$ Derivada de la función tangente

Empleando el método de los 3 pasos encontrar la derivada de tan x.

d) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN COTANGENTE*

Derivar:

y = $2 \cot \frac{x}{3}$ Donde $u = \frac{x}{3}$, $u = \frac{1}{3}$

$y' = 2(-\csc^2 u)\frac{1}{3} \quad \therefore \quad y' = -\frac{2}{3}\csc^2 \frac{x}{3}$

$f(x)=\dfrac{1}{4}\cot.7x$ Donde $u=7x$, $u'=7$

$y'=\dfrac{1}{4}(-\csc^2 7x)(7)\quad \therefore \quad y'=-\dfrac{7}{4}\csc^2 7x$

Entonces $\boxed{y'(\cot u)=-\csc^2 u\cdot u'}$ Derivada de la función cotangente

e) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN SECANTE*

Si tenemos presente que $\sec u=\dfrac{1}{\cos u}=(\cos u)^{-1}$ y $\tan u=\dfrac{\text{sen} u}{\cos u}$

y sea y = sec u en donde u = f(x)

como sec u = $(\cos u)^{-1}$

y = sec u = $(\cos u)^{-1}$

entonces y = $(\cos u)^{-1}$

Derivamos aplicando: $y'(u^n)=nu^{n-1}u'$

$y'=-1(\cos u)^{-2}\; y'(\cos u)=\dfrac{-1}{(\cos u)^2}\cdot\dfrac{-\text{sen}\, u\cdot u'}{1}$

$y'=\dfrac{(\text{sen}\, u)u'}{\cos^2 u}=\dfrac{\text{sen}\, u}{\cos u}\cdot\dfrac{1}{\cos u}\cdot u'$

Sustituyendo los cocientes por las identidades trigonométricas, se tiene:
y = tan u sec u u'

Entonces $\boxed{y'(\sec u)=\sec u\ \tan u\ u'}$ La derivada de la función secante

Derivar:

$f(x) = 7\sec\frac{x}{3}$ $\quad$ $u = \frac{x}{3}$, $u' = \frac{1}{3}$

$y' = 7(\sec u \tan u)\frac{1}{3}$

$y' = \frac{7}{3}\sec\frac{x}{3}\tan\frac{x}{3}$

f(x) = sec 3x $\quad$ u = 3x , u´= 3

$y' = \sec u \tan u(3)$

$y' = 3\sec 3x \tan 3x$

f) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN COSECANTE*

Derivar:

$y = \frac{1}{4}\csc 3x$ $\quad$ u = 3x , u' = 3

$y' = \frac{1}{4}(-\csc u \ \cot u)\ (3)$

$y' = -\frac{3}{4}\csc 3x \ \cot 3x$

$y = \csc\frac{1}{1-x}$ $\quad$ $u = \frac{1}{1-x}$, $u' = \frac{1}{(1-x)^2}$

$y' = -\csc\frac{1}{1-x}\ \cot\frac{1}{1-x}\left[\frac{1}{(1-x)^2}\right]$

$y' = -\frac{1}{(1-x)^2}\ \csc\frac{1}{1-x}\ \cot\frac{1}{1-x}$

Entonces

$$y'(\csc u) = -\csc u \ \cot u \ \ u'$$

La derivada de la función cosecante

NOTA La función cosecante se obtiene en forma análoga a la secante, realiza ese procedimiento para obtenerla.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1.- Obtener la fórmula de la derivada de la función coseno.

2.- Obtener la fórmula para la derivada de la función cotangente

3.- Derivar las siguientes funciones trigonométricas

$$f(x) = \tan 2x$$

$$f(x) = \sec x^2$$

$$f(x) = 4sen2x$$

$$f(x) = 3\cos x/2$$

$$f(x) = 3sen^2 x/2$$

$$f(x) = \sqrt{sen, x}$$

$$f(x) = sen(1-x)^2$$

$$f(x) = \tan(\frac{2-x)}{2+x})$$

$$\mathrm{f(x)} = \frac{2}{\sqrt{\sec x}}$$

1.2.7 DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

FUNCIÓN INVERSA.

1) Se llama función inversa de y = f(x) a la que se obtiene despejando x.

   Ejemplo: Función inversa de y = 2x + 7 es x = $\dfrac{y-7}{2}$

   La inversa de sen x es arc sen y, que se lee, ángulo cuyo seno es y.

   Si consideramos el arco en vez del ángulo se usa la notación, x = arc sen y; que se lee, x igual a un arco cuyo seno es y perpendicular, x con y, en la expresión anterior queda, y = arc sen x que es la función inversa del sen x

   Algunos autores escriben la expresión y = arc sen x en la forma siguiente:

   y = sen^{-1} x que se lee; el seno inverso de x, lo cual, es lo más usual en nuestro medio por que sen^{-1}x, así escrito podría leerse como $(\text{sen } x)^{-1}$ con exponente –1.

   En nuestro estudio usaremos las expresiones en que se consideran el arco y ángulo.

   Las funciones trigonométricas inversas son multiformes, es decir que a cada valor de la variable independiente le corresponde dos o más valores a la función.

2) Gráficas de las funciones trigonométricas inversas.

   Recordando de nuestro curso de trigonometría, el procedimiento utilizando para construir las gráficas de las funciones trigonométricas directas, es el mismo para las inversas, utilizando para ambas un sistema de coordenadas rectangulares.

   Para las inversas el valor de las razones se indican sobre el eje horizontal de la x, los ángulos correspondientes se dan sobre el eje vertical.

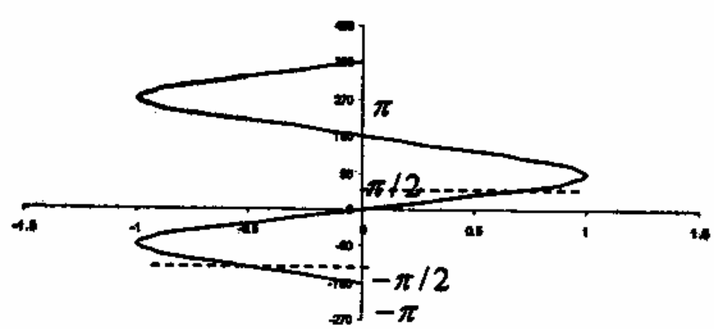
   Así la gráfica de la función trigonométrica inversa del seno y que ilustra observamos.

   a. La curva podemos extenderla independientemente hacia arriba y hacia abajo.

   b. Si trazamos una perpendicular sobre el eje de las x, por ejemplo en el punto 0.5 le corresponde los ángulos de 30 y 150 y todos los ángulos que se obtengan sumando o restando a estos 360, tales como 390, 510,... etc.

   c. El valor de seno esta definido para cualquier valor de x aunque con objeto de evitar confusiones al referirnos a una determinada parte de las funciones trigonométricas inversas, se definen para cada una de ellas un arco que se le llama arco que se le llama arco principal en el caso del seno esta representado en la figura como un trazo mas grueso, se expresa.

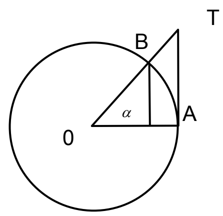
FUNCIÓN	RAMA PRINCIPAL
y = arc sen x	$-\pi/2 < y < \pi/2$ $-90° < y < -90°$
Para las demás funciones se tiene:	
y = arc cos x	$0 < y < \pi$ $0 < y < 180°$
y = arc tan x	$-\frac{\pi}{2} < y < -\frac{\pi}{2}$ $90° < y < 90°$
y = arc cot x	$-\frac{\pi}{2} < y < -\frac{\pi}{2}$
y = arc sec x	$-\frac{\pi}{2} < y < -\frac{\pi}{2}$ $-180° < y < -90°$ $0° < y < \frac{\pi}{2}$ $0° < y < 90°$
y = arc csc y	$-\frac{\pi}{2} < y < -\frac{\pi}{2}$ $-180° < y < -90°$ $0° < y < \frac{\pi}{2}$



Para las derivadas de las funciones trigonométricas inversas, inicialmente vamos a demostrar que:

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\alpha}{\alpha}=1$$

Este límite no se puede obtener con las reglas de los límites, para calcularlo utilizamos algunas propiedades de la geometría y de la trigonometría.



$A\hat{o}B;\overline{B}\overline{Q}..L.\overline{O}\overline{A};..\overline{T}\overline{A}..TAN$

comparando..las..longitudes

$\overline{B}\overline{Q} < \overline{A}\overline{B} < \overline{A}\overline{T}$ (1)

Dividiendo(1)entre..$\overline{O}\overline{A}$

$$\frac{\overline{B}\overline{Q}}{\overline{O}\overline{A}} < \frac{\overline{A}\overline{B}}{\overline{O}\overline{A}} < \frac{\overline{A}\overline{T}}{\overline{O}\overline{A}} \quad (2)$$

Por ser radios del mismo circulo.

$\overline{O}\overline{A} = \overline{O}\overline{B}$entonces $\dfrac{\overline{B}\overline{Q}}{\overline{O}\overline{A}} = \dfrac{\overline{B}\overline{Q}}{\overline{O}\overline{B}}$

Como $sen\alpha = \dfrac{\overline{B}\overline{Q}}{\overline{O}\overline{B}}$ sustituyendo $\dfrac{\overline{B}\overline{Q}}{\overline{O}\overline{A}} = \dfrac{\overline{B}\overline{Q}}{\overline{O}\overline{B}} = .sen\alpha$ (3)

ya se indica que $\dfrac{\overline{A}\overline{B}}{\overline{O}\overline{A}} = \alpha$ valor natural del ángulo (4)

$\dfrac{\overline{A}\overline{T}}{\overline{O}\overline{A}} = \tan\alpha$ (5) sustituyendo en la igualdad .(2) los valores obtenidos en (3), (4) y (5)

queda ,sen $sen\alpha < \alpha < \tan\alpha$ (6)

y dividiendo la igualdad (6) entre senα recordamos que

$\tan\alpha = \dfrac{sen\alpha}{\cos\alpha} entonces \dfrac{sen\alpha}{sen\alpha} < \dfrac{\alpha}{sen\alpha} < \dfrac{\frac{sen\alpha}{\cos\alpha}}{sen\alpha}$; entonces;

$$1 < \frac{\alpha}{sen\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha} \quad (7)$$

como una desigualdad cambia de sentido al tomar los recíprocos, los tomamos

$1 > \frac{sen\alpha}{\alpha} > \cos\alpha$ si tomamos el límite cuando $\alpha \rightarrow 0$ queda...

$$1 > \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\alpha}{\alpha} > \lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha \qquad \text{como} \lim_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1 \text{ tenemos}$$

$$1 > \lim_{\alpha\to 0}\frac{sen\alpha}{\alpha} > 1 \text{ es decir} \qquad \lim_{\alpha\to 0} = \frac{sen\alpha}{\alpha} = 1$$

a) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO SENO*

Derivar

$$y = arc\,sen\,5x^2$$
$$u = 5x^2$$
$$u' = 10x$$

$$y' = \frac{10x}{\sqrt{1-(5x)^2}} = \frac{10x}{\sqrt{1-25x^2}}$$

$$y = arc\ sen\sqrt{x}$$
$$u = \sqrt{x}$$

$$u' = \frac{1}{2\sqrt{x}} \qquad y' = \frac{u'}{\sqrt{1-(\sqrt{x})^2}}$$

$$y' = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{1-x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$$

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x-x^2}}$$

Entonces $\boxed{y'\,arc\ sen\,u = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$ La derivada de la función inversa de arc sen

Si tenemos presente que $sen^2 + cos^2\ y = 1$, entonces $\cos y = \sqrt{1-sen^2 y}$; sea y = arc sen u, de donde u = f(x) y escribiendo el inverso del arco sen u, se obtiene sen y = u, la cual al derivarla como una función implícita.

sen y’ = u’

cos y y' = u' despejamos $y' = \dfrac{u'}{\cos y}$ (1)

como sen^2 y + cos^2 y = 1 entonces

la derivada de la función arco seno.

$\cos y = \sqrt{1 - sen^2 y}$ sustituyendo en (1)

$$y' = \frac{u'}{\sqrt{1 - sen^2 y}} \qquad (2)$$

como sen y =u, elevando al cuadrado los dos miembros sen^2 y = u^2, sustituyendo en y'

arc sen u = $\dfrac{u'}{\sqrt{1 - u^2}}$

b) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO COSENO*

Derivar

$$y = arc.\cos\frac{x}{2} \qquad u = \frac{x}{2} = \frac{1}{2}x \quad , \quad u' = \frac{1}{2}$$

$$y' = -\frac{1/2}{\sqrt{1-(x/2)^2}} = -\frac{1/2}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}}} = -\frac{1/2}{\sqrt{\dfrac{4-x^2}{4}}} = -\frac{1/2}{1/2\sqrt{4-x^2}}$$

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{4-x^2}}$$

y = arc cos $\dfrac{2x}{3}$ $\qquad u = \dfrac{2x}{3} = \dfrac{2}{3}x \quad , \quad u' = \dfrac{2}{3}$

$$y' = -\frac{2/3}{\sqrt{1-(2x/3)^2}} = -\frac{2/3}{\sqrt{1-\dfrac{4x^2}{9}}} = -\frac{2/3}{\sqrt{\dfrac{9-4x^2}{9}}} = -\frac{2/3}{1/3\sqrt{9-4x^2}}$$

$$y' = -\frac{2}{\sqrt{9-4x^2}}$$

Entonces $\boxed{y'\,(\text{arc cos u}) = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$ La derivada de la función inversa arco coseno

De la forma análoga a la de arco sen encuentre la forma de arc coseno.

c) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO TANGENTE*

Derivar

y = arc tan $3x^2$ $\quad u = 3x^2 \quad , \quad u' = 6x$

$$y = \frac{6x}{1+(3x^2)^2} = \frac{6x}{1+9x^4}$$

Derivar

y'= arc tan $\frac{2-x}{3}$ $\quad u = \frac{2-x}{3} \quad u = -\frac{1}{3}$

$$y' = \frac{u'}{\left[1+\left(\frac{2-x}{3}\right)^2\right]} = \frac{-1/3}{\left[1+\frac{(2-x)^2}{3^2}\right]} = \frac{-1/3}{\left[1+\frac{(4-4x+x^2)}{9}\right]} = -\frac{3}{13-4x+x^2}$$

Entonces $\boxed{y' \text{ arc tan } u = \frac{u'}{1+u^2}}$ La derivada de la función inversa arco tangente

Teniendo presente que: $\sec^2 y - \tan^2 y = 1$ y $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$, sea y = arc tan u en donde u = f(x) , escribiendo el inverso del arc tan u, el cual es tan y = u, derivando como implícita:

y' tan y = u' ; $\sec^2 y\, y' = u'$

despejando

$$y' = \frac{u'}{\sec^2 y} \qquad (1)$$

entonces $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y$ sustituyendo en (1)

$$y' = \frac{u'}{1+\tan^2 y} \qquad (2)$$

como tan y = u , entonces elevando al cuadrado los miembros, resulta $\tan y^2 = u^2$ y sustituyendo en (2) obtenemos la función inversa tangente.

$$y' arc\ \tan u = \frac{u}{1+u^2}$$

d) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO COTANGENTE*

Derivar

$$y = arc\cot\frac{x}{2} \qquad \text{con} \qquad u = x/2 \quad ; \quad u' = 1/2$$

$$y' = -\frac{1/2}{1+\frac{x^2}{4}} = -\frac{1/2}{\frac{4+x^2}{4}} = -\frac{4}{2(4+x^2)}$$

$$y' = -\frac{2}{4+x^2}$$

Derivar

$$y = arc\cot\sqrt{1+x^2} \qquad \text{con } u = (1+x^2)^{1/2} \quad ; \quad u' = \frac{1}{2}\left(1+x^2\right)^{-1/2}(2x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$y' = -\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1+\left(1+x^2\right)^{1/2}} = -\frac{x}{\left(x^2+2\right)\left(\sqrt{1+x^2}\right)}$$

Entonces $\boxed{y' \text{ arc cot } u = -\dfrac{u'}{1+u^2}}$ La derivada de la función inversa arco cotangente

De la forma análoga a la tangente inversa, encuentra la formula para la derivada de arc cot.

e) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO SECANTE*

Derivar:

y = arc sec (3x + 2) con u = 3x + 2 ; u´ = 3

$$y' = \frac{3}{(3x+2)\sqrt{(3x+2)^2-1}} = \frac{3}{(3x+2)\sqrt{9x^2+12x+3}}$$

Derivar:

y = arc sec x^2

$$y' = \frac{1}{x^2\sqrt{x^4-1}}u'(x^2) = \frac{2x}{x^2\sqrt{x^4-1}} = \frac{2}{x\sqrt{x^4-1}}$$

Entonces $\boxed{y' \text{ arc sec } u = \dfrac{u'}{u\sqrt{u^2-1}}}$ La derivada de la función arco secante

Si sabemos que $\sec^2 y - \tan^2 y = 1$ entonces $\tan^2 y = \sec^2 y - 1$ y $\tan y = \sqrt{\sec^2 y - 1}$.

Sea y = arc sec u donde u = f(x), si escribimos el inverso de arc sec u, entonces :
sec y = u

derivando como implícita. y'sec y = u' ; sec y tan y y' = u'

despejando

$$y' = \frac{u'}{\sec y \tan y} \qquad (1)$$

como $\tan^2 y = \sec^2 y - 1$ y tan y = $\sqrt{\sec^2 y - 1}$

sustituyendo (1) y' = $\dfrac{u}{\sec y \sqrt{\sec^2 y - 1}}$ (2)

y si sec y = u entonces elevando al cuadrado los dos miembros $\sec^2 y = u^2$ sustituyendo en (2)

$$y'\text{arc sec } u = \frac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}$$

f) *DERIVADA DE LA FUNCIÓN ARCO COSECANTE*

Derivar:

y = arc csc 2x con u = 2x ; u´ = 2

$$y' = -\frac{1}{2x\sqrt{4x^2 - 1}}\, u'(2x)$$

$$y' = -\frac{2}{2x\sqrt{4x^2 - 1}}$$

$$y' = -\frac{1}{x\sqrt{4x^2 - 1}}$$

Entonces $\boxed{y'\text{ arc csc } u = -\dfrac{u'}{u\sqrt{u^2 - 1}}}$ La derivada de la función arco cosecante

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

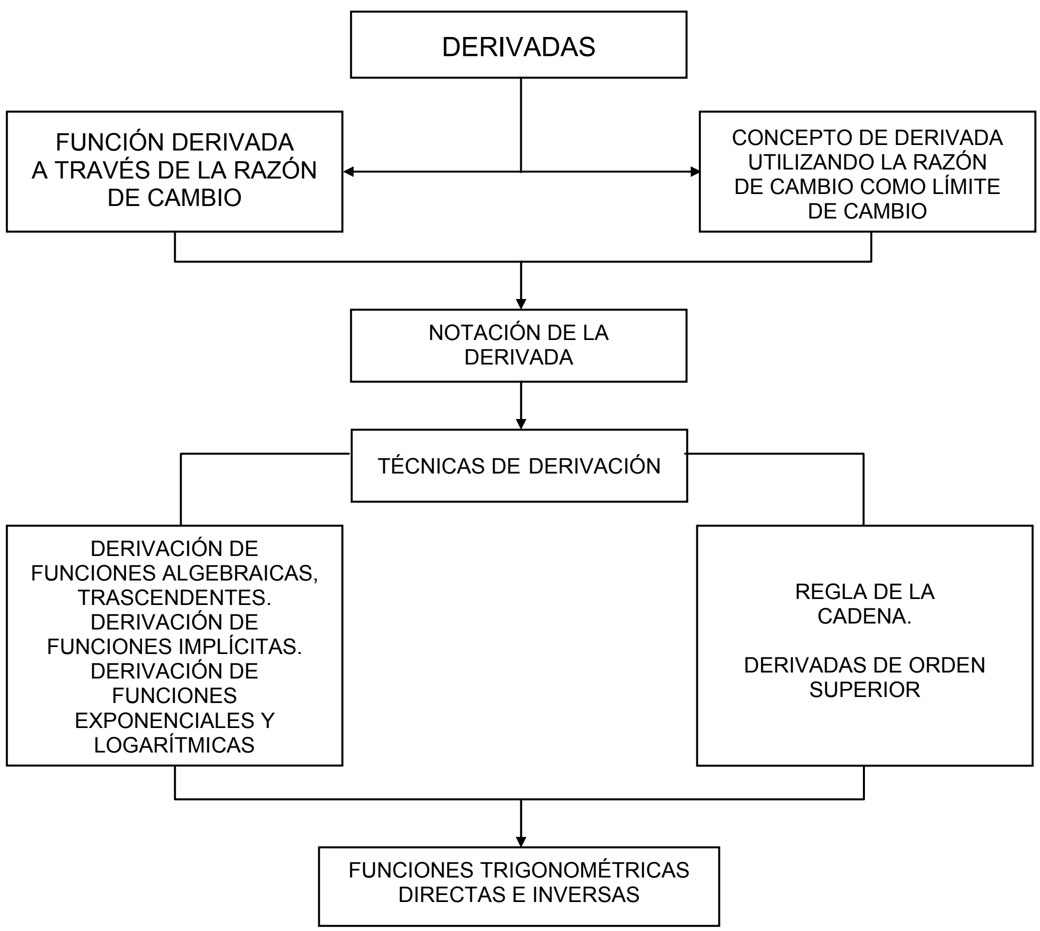
Derivar las siguientes funciones trigonométricas inversas.

1. arc sen (2x – 5)
2. arc sen (x /a)
3. arc cos (x /3)
4. x^2 arc cos (2x)
5. arc cot $\frac{1+x}{1-x}$
6. arc sec $\frac{3-x}{x}$
7. arc csc (1 – 2 x)

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta este momento hemos visto los temas para derivar diferentes tipos de funciones, desde las algebraicas, las exponenciales, las trigonométricas directas e inversas y las derivadas de orden superior, esto nos prepara para un mejor entendimiento en lo que respecta a las aplicaciones de la derivada.

RECAPITULACIÓN



Existen muchos elementos interesantes en el desarrollo del fascículo que te pueden servir para complementar el esquema anterior, utilízalos y elabora otro.

ACTIVIDADES INTEGRALES

Para reafirmar los conocimientos adquiridos hasta aquí, te sugerimos resolver los siguientes problemas.

1. Un móvil se desplaza de acuerdo a la ecuación $f(t) = 3t^2 – 2t + 1$. Determinar la velocidad instantánea o tangencial de dicho móvil después de haber transcurrido 3 segundos de iniciar su movimiento y ¿cuál es la razón de cambio?

2. Dada la siguiente función ¿cuál es la razón de cambio, al determinar su derivada considerando que es una partícula suspendida en el espacio?

$$(x) = 5x^3 – 3x + 2$$

AUTOEVALUACIÓN

Para la solución de los problemas utilizamos el siguiente procedimiento.

1. Encontramos la derivada como límite.

$$f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h} \qquad (1)$$

Si $f(t) = 3t^2 - 2t + 1$ (2)

y $f(t+h) = 3(t+h)^2 - 2(t+h) + 1$ (3)

Entonces desarrollando la 3, nos queda.

$f(t + h) = 3(t^2 + 2th + h^2) - 2t - 2h + 1 = 3t^2 + 6th + 3h^2 - 2t - 2h + 1$ (4)

Sustituyendo 2 y 4 en 1

$$f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{3t^2 + 6h + 3h^2 - 2t - 2h + 1 - 3t^2 + 2t - 1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{6th + 3h^2 - 2h}{h}$$

$$f(t) = \lim_{h\to 0}\frac{h(6t + 3h - 2)}{h} = \lim_{h\to 0} 6t + 3(0) - 2 = 6t - 2$$

$f'(x) = 6t - 2$ Es la derivada.

-La razón de cambio para $3t^2$ es $6t$
-La razón de cambio para $-2t$ es -2

Sustituyendo a $t = 3$seg en $f'(x) = 6t - 2$ encontramos la velocidad instantánea.

$V = f'(x) = 6t - 2$ de donde $V = 6(3) - 2 = 18 - 2 = 16$ $\therefore$ $V = 16$m/seg.

2. Si $f(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$ (1) entonces

$f(x)=5x^3-3x+2$ (2)

f (x + h) = 5 (x + h)^3 – 3 (x + h) + 2 (3)

Sustituyendo 2 y 3 en 1 tenemos.

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{5(x+h)^3-3(x+h)+2-(5x^3-3x+2)}{h}$$

Efectuando las operaciones indicadas nos queda.

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{5x^3+15x^2h+15xh^2+5h^3-3x-3h+2-5x^3+3x-2}{h}$$

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{15x^2h+15xh^2-3h}{h}$$

$$f(x) = \lim_{h\to 0}\frac{h\,(15x^2+15xh-3)}{h}$$

$$f(x) = \lim_{h\to 0} 15x^2+15x(0)+5(0)^2-3$$

$f(x) = \lim_{h\to 0} 15x^2-3$ de donde $f'(x)=15x^2-3$

-La razón de cambio de $5x^3$ es $15x^2$
-La razón de cambio de -3x es -3