LA DERIVADA

INTRODUCCIÓN

El deseo de medir y de cuantificar el cambio, la variación, condujo en el siglo XVII hasta la noción de derivada.

El estudio de las operaciones con derivadas, junto con las integrales, constituyen el cálculo infinitesimal. Los introductores fueron Newton y Leibnitz, de forma independiente. Los conceptos son difíciles y hasta bien entrado el siglo XIX no se simplificaron. A ello contribuyó la aparición de una buena notación, que es la que usaremos. Las aplicaciones prácticas de esta teoría no dejan de aparecer.

1. *Tasa de variación media*

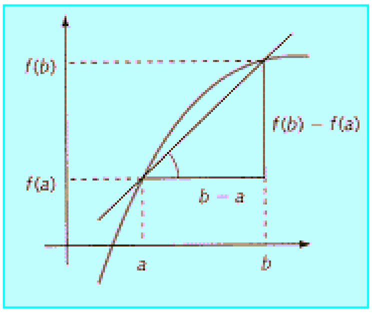
Incremento de una función

Sea y = f(x) y **a** un punto del dominio de f. Suponemos que **a** aumenta en **h**, pasando al valor a +h, entonces f pasa a valer f(a +h), al valor **h** se le lama *incremento de la variable*, y a la diferencia entre f(a +h) y f(a) el incremento de la función.

Tasa de variación media

Llamamos tasa de variación media (o tasa media de cambio) T.V.M., de la función y =f(x) en el intervalo [a, b] al cociente entre los incrementos de la función y de la variable, es decir:

$$\text{T.V.M. } [a, b] = \boxed{\frac{f(b)-f(a)}{b-a}}$$



Ejemplo 1. Halla la tasa de variación media de la función $f(x) = 3-x^2$ en el intervalo [0,2]

Solución

$$\text{T.V.M. } [0, 2] = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{-1-3}{2} = -2$$

Ejercicio 1. Calcular b para que la tasa de variación media de la función f(x) = ln(x+b) en el intervalo [0,2] valga ln2.

2. *Tasa de variación instantánea. La derivada*

Consideremos un valor h (que puede ser positivo o negativo).

La tasa de variación media en el intervalo [a, a +h] sería $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

Nos interesa medir la tasa instantánea, es decir el cambio cuando la h tiende a cero, es decir :

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

A este valor se le llama la **derivada** de la función f en el punto **a** y se designa por $f'(a)$, por lo tanto, la derivada de una función en un punto es el límite de la tasa de variación media cuando el incremento de la variable tiende a 0.

$$\boxed{f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}}$$

Si f tiene derivada en el punto **a** se dice que f es *derivable* en **a.**

Observación 1. Si hacemos x =a +h , la derivada, en el punto **a** , también puede expresarse así:

$$\boxed{f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}$$

Ejercicio 2. Hallar la derivada de la función f(x) = $-x^2$ +4x   el punto de abscisa x =1.

Observación 2. También se puede hablar de **derivadas laterales**, f'_+ y f'_- (obligatorio que f sea continua) según se considere el límite para h>0 o h<0. Si existen los dos límites laterales y coinciden la función es derivable.

Ejemplo 2. Las derivadas laterales de la función $f(x)=|x|$ en x =0 son 1 y –1.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\frac{x}{x}=1 \qquad \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}=\frac{-x}{x}=-1$$

Luego la función valor absoluto no es derivable en el 0.

Proposición. Toda. función derivable en un punto es continua en dicho punto.
El recíproco es falso.

Ejemplo 2. $f(x)=|x|$ es continua en 0, pero no es derivable en 0.

Aplicación física de la derivada

La derivada del espacio respecto del tiempo es la **velocidad** instantánea.

Ejercicio 3. La ecuación de un movimiento es , $E=t^2-6t+9, \quad t\geq 3$, calcula la velocidad en el instante t =5.

3. *Interpretación geométrica de la derivada*

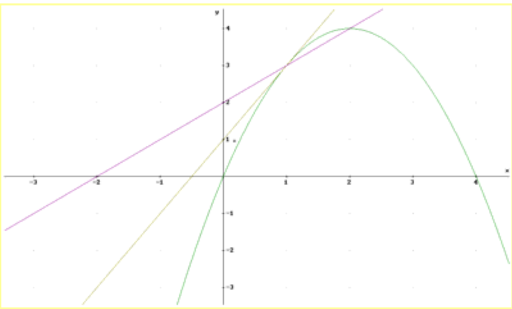
La tasa de variación media de una función f en [a, a +h] es la pendiente de la recta secante a la gráfica de f que pasa por los puntos de abscisa **a** y **a +h**.
Si h tiende a cero, el punto a +h tiende hacia el punto **a** y la recta secante pasa a ser la **recta tangente a la curva.** Por lo tanto:

La derivada de la función en el punto **a** es la pendiente de la recta tangente en el punto (a,.f(a))

La ecuación de la recta tangente en dicho punto se puede expresar

y - f(a) = f ´(a)(x-a)   .

Ecuación punto pendiente de la recta tangente a la gráfica de f, pasa por el punto (a, f(a)) y tiene como pendiente la derivada de f en a, f'(a)



Ejemplo 3. En la figura se muestra la gráfica de y $=-x^2$ +4x, una recta secante que pasa por el punto (1, 3) y la recta tangente en ese punto, que tiene por ecuación y –3 = 2(x-1)

Ejercicio 4. Hallar la ecuación de la recta a la gráfica de f(x) = x^2-x +5

Ejercicio 5. ¿Qué valor debe tener **a** para que la recta y =-x +6 y la curva y =-**a**x^2 +5x –1 sean paralelas en x = 1.

Indicación. Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma pendiente

4. *Función derivada. Reglas de derivación. Cálculo de derivadas*

La función derivada

La función que a cada que a cada x le hace corresponder f´(x) se llama la función derivada de f y se denota por **f´**.

Tabla de derivadas de algunas funciones elementales

1) f(x) =k $\Rightarrow$ f´(x) =0
2) f(x) = $x^n \Rightarrow$ f´(x) = nx^{n-1}
3) f(x) = $\sqrt{x} \Rightarrow$ f´(x) = $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
4) f(x) = ln x $\Rightarrow$ f´(x) = $\dfrac{1}{x}$
5) f(x) = $e^x \Rightarrow$ = e^x
6) f(x) = sen x $\Rightarrow$ f´(x) = cos x
7) f(x) = cos x $\Rightarrow$ f´(x) = -sen x

Reglas de derivación

Si f y g son funciones derivables en **a** entonces f +g y f.g son derivables en **a** y se verifica:

-(f +g)´= f´(a) + g´(a)
-(f.g)´(a) = f´(a).g(a) + g´(a).f(a)
Además si g(a)$\neq$0, entonces f/g es derivable en **a** y se verifica

-$\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a)g(a') - g'(a)f(a)}{(g(a))^2}$

Ejercicio 6. Calcula la derivada de:

a) f(x) = $e^x(x^2 - 3x + 2)$; b) $g(x) = \dfrac{x^2}{x^2 + \sqrt{x}}$

c) h(x) = tan x; d) $g(x) = \dfrac{senx}{senx + \dfrac{1}{senx}}$

Ejercicio 7. Estudia en qué puntos no son derivables las siguientes funciones, razonando la respuesta:

a) f(x)= $\begin{cases} -x & x \leq 0 \\ \ln x & x > 0 \end{cases}$

b) y =$|x^2 - 7|$

c) g(x)=$\begin{cases} x^2 + 1 & x \leq 0 \\ 3x - 2 & x > 0 \end{cases}$

Observación. Si f ´ se puede derivar en su dominio se puede llegar a la función (f ´)´= f ´´ , que se llama derivada segunda, y f ´´´, f ´ ^{V} que se dice son las derivadas sucesivas de f.

Ejercicio 8. Calcula las derivadas sucesivas de a) f(x)= e^x; b) g(x) =$\dfrac{1}{x}$; c) h(x)= sen x.

Regla de la cadena

Si g es derivable en **a** y f es derivable en g(a) entonces f∘g es derivable en **a** y se verifica:

$(f\circ g)'(a) = f'(g(a)).g'(a)$

Que se llama la regla de la cadena (derivada de la función compuesta o derivada de la función de función)

Derivación logarítmica

Como aplicación de la regla de la cadena se tiene, si $y = \ln f(x) \Rightarrow$ $y = \frac{f'(x)}{f(x)}$, y de aquí se llega al método de la derivación logarítmica.

Ejemplo 4. Consideremos la función $y = x^x$, si tomamos logaritmos en ambos lados se sigue:

$\ln y = \ln x^x = x\ln x$, y derivando los dos miembros de la igualdad

$\frac{y'}{y} = \ln x + \frac{1}{x}.x = \ln x + 1 \Rightarrow$ $y' = x^x(\ln x + 1)$

Derivada de la función inversa

Es otra aplicación de la regla de la cadena.

Como $f\circ f^{-1} = I$, se tiene $(f\circ f^{-1})'(x) = f'(f^{-1}(x))(f^{-1})'(x) = 1$, luego despejando $(f^{-1})'(x) = 1/f'(f^{-1})'(x)$,

Ejemplo 5. Consideremos la función y =arc tg x $\Rightarrow$ **x = tg y**, y derivando $x' = 1 + tg^2 y$, de donde:

$$y' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{1+x^2}$$

Ejercicio 9. Calcula la derivada de $y = arcsenx$

Tabla de derivadas (propuesta como ejercicio)

Ejercicio 10. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = \frac{(3x-1)}{3x^2+1}$; b) $g(x) = e^{senx}$;

c) $y = \frac{sen(x^2+1)}{\sqrt{1-x^2}}$; d) $h(x) = \cos^3(x^2-2)$;

e) $y = e^{\text{arc tg } x}$; f) $j(x) = \text{arc sen}(x + 3x^2)$

g) $y = arctg\frac{x^2-1}{x^2+1}$; h) $k(x) = (x^2+1)^{\cos x}$;

j) $y = \ln\sqrt[3]{\frac{(x^2+7)^4}{x^4+1}}$; k) $y = \frac{senx^2 sen^2 x}{1+senx}$;

5. *Crecimiento y decrecimiento de una función*

Proposición. Si una función f es derivable en un punto **a**, y f'(a)>0 entonces f es creciente en el punto **a**.

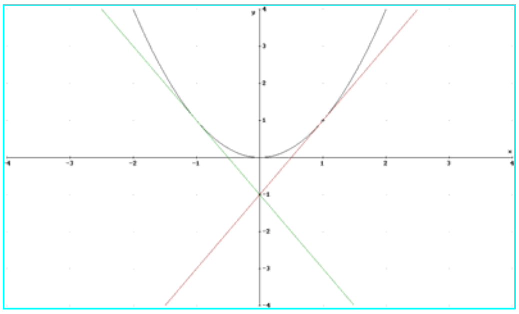


Figura 1

La demostración de este resultado puede hacerse usando la definición de derivada y e concepto de límite, pero resulta evidente si se tiene en cuenta el significado geométrico de la derivada (ver figura 1).
Si f es derivable en un intervalo I y f ' >0 en ese intervalo entonces f crece en I.
El recíproco no se cumple en general.

Ejemplo 5. La función $y = x^3$ cumple que es creciente en todo $\mathbb{R}$, y sin embargo f '(0) =0.
Análogamente si f es derivable en un punto a y f '(a)<0 entonces f es decreciente en a. Si f '<0 en todo un intervalo I, f es decreciente en I. (Ver figura 1)

6. *Máximos y mínimos relativos (o locales) de funciones <u>derivables</u>*

Si una función tiene un máximo o mínimo relativo (o local) se dirá que tiene un extremo relativo.

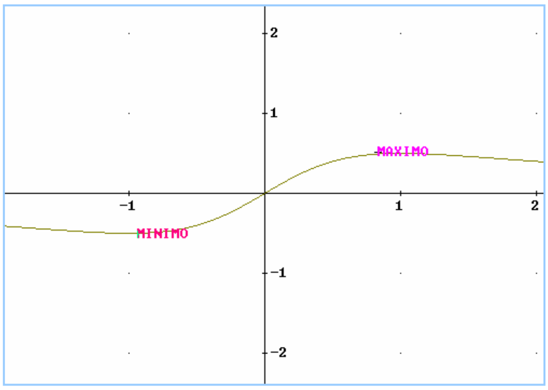


Figura 2

Condición necesaria de extremo

Proposición.
Si f es derivable en el punto **a** y f tiene en **a** un extremo relativo, entonces **f ' (a)=0.**
Demostración. Si no fuera cierto y por ejemplo f '(a)>0 entonces por la proposición anterior f sería creciente en un entorno del punto **a**, lo que contradice la existencia de extremo.
La condición no es suficiente.

Ejemplo 6. La función $y = x^3$ es creciente en 0, por lo que no puede tener extremos, y sin embargo f '(0)=0.

Criterio práctico. Hay extremo relativo en el punto si la derivada de la función en ese punto es cero (condición necesaria f '(0)=0) y en dicho punto cambia el crecimiento. Ver figura 2.

	f '	<0	=0	>0	
Si			**|a**		hay **mínimo relativo en (a, f(a))**
		f ↘		**mínimo** ↗	

f ’ > =0 <

Si ——————|a—————— hay **máximo relativo en (a, f(a))**

f ↗ **máximo** ↘

Ejercicio 9.Dada la función $y=\frac{x^2+1}{x}$ se pide estudiar el crecimiento y decrecimiento, máximos y mínimos relativos.

Condición suficiente de extremo

Proposición. Sea f una función derivable en **a** y tal que f ‘(a)=0:
a) Si f ’’>0 entonces f tiene un mínimo relativo en el punto **a**.
b) Si f ‘’<0 entonces f tiene un máximo relativo en el punto **a**.
Esta proposición nos da también un método para resolver los problemas de máximos y mínimos para funciones derivables.
Se presentarán en tablas estos resultados:

f(x)	**Crece** ↗	**Máximo**	**Decrece** ↘
f '(x)	+	**0**	**-**
f ''(x)	**-**	**-**	**-**

f(x)	**Decrece** ↘	**Mínimo**	**Crece** ↗
f '(x)	+	**0**	**-**
f ''(x)	**-**	**-**	**-**

Ejercicio 10. Descomponer un número N en dos sumandos x e y de tal manera que x^2 +6y sea mínimo.
Nota[1]**.** Cuando busquemos **los extremos absolutos** de la función f, si esta es continua en un cerrado y derivable en el abierto, buscaremos los valores en que la derivada es cero y los compararemos con los de los extremos, el valor mas grande será el máximo y el más pequeño el mínimo.
Ejercicio 11. Se considera la función f(x) $=x^3-3x$ definida sobre el intervalo [-2,2], se pide hallar los puntos donde f alcanza máximo absoluto.
Ejercicio 12. Entre todos los rectángulos de 20cm de perímetro halla el que tiene diagonal mínima.

7. *Algunas “precisiones” sobre los extremos de funciones*

OBSERVACIÓN 1. Decir que f posee un máximo local en un punto x_0, significa que existe un intervalo $(x_0 - r, x_0 + r)$ tal que $f(x) \le f(x_0)$ para todo x perteneciente al conjunto

$$\mathbf{(x_0 - r, x_0 + r) \cap D_f}.$$

Análogamente para mínimo local**.**
Esta **matización** en la definición de extremo, de intersecar el entorno con el dominio de f, $\mathbf{D_f}$**,** es esencial. En otro caso se puede llegar al absurdo de decir que una función continua, definida en un dominio compacto, no tiene extremos locales (cuando sabemos por el teorema de Weiertrars que los posee incluso absolutos), cuando éstos se alcanzasen en puntos no interiores del dominio.

OBSERVACIÓN 2. No se deben asociar tanto los extremos locales a las derivadas, ya que éstos pueden encontrarse en los puntos en que la función no es derivable.

Ejercicio 13. La función:

[1] Teorema de Weiertrars

$$f(x)=\begin{cases} x^3+x & si \quad -2\le x<1 \\ -x+3 & si \quad 1\le x \quad <3 \end{cases}$$ (su dominio es [-2,3])

Cuya gráfica se adjunta

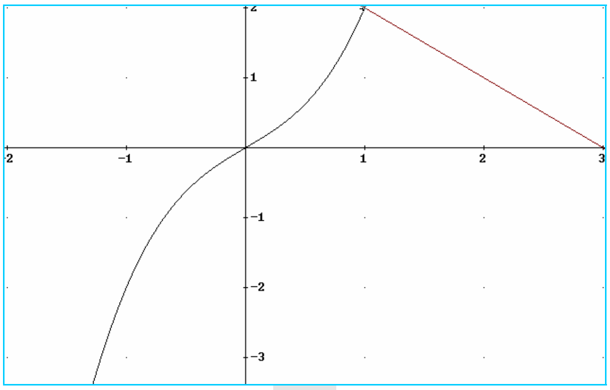


Figura 3

¿Tiene extremos locales? ¿tiene extremos absolutos?. En caso afirmativo ¿en qué puntos se alcanzan?. Razonas la respuestas.
Si no tuvieras las gráficas ¿cómo les localizarías?
Teniendo expuesto anteriormente **deduce** razonadamente como se pueden calcular los extremos (absolutos y relativos) de una función.

Ejercicio 14. Calcula los extremos (indica si son absolutos o no) de las siguientes funciones, en caso de que existan:

a) $f(x)=-x^3+3x$; b) $y=-|x|$; c) $y=\sqrt[3]{x}$

d) $f(x)=\begin{cases} x^2+1 & si \quad -3\le x<1 \\ -x+3 & si \quad 1\le x \quad <3 \end{cases}$

e) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$

8. *Concavidad y convexidad. Puntos de inflexión*

Una función es **convexa**[2] en **a**, si existe un intervalo que contiene al punto **a,** tal que la diferencia entre la ordenada de la función y la ordenada de la tangente a la gráfica de f en el punto (**a, f(a))** es positiva en dicho intervalo.

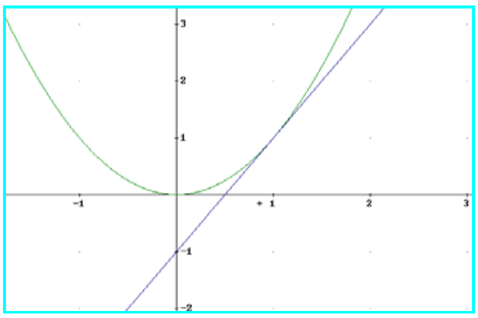


Figura4

Análogamente se dice que es **cóncava** cuando dicha diferencia es negativa.
Se dice que f tiene un punto de **inflexión** en **a** si existe un entorno de **a** en que la diferencia entre la ordenada de f y la de la tangente en **a** tiene distinto signo a la izquierda que a la derecha.

[2] En algunos libros a estas se les llama cóncavas. Esta falta de acuerdo es por lo relativo de la curvatura. Dependerá ésta de si miramos la curva desde arriba o desde abajo del eje de abscisas.
No habrá ambigüedad pues la derivada segunda nos dará la curvatura.

Por lo tanto f tiene un punto de inflexión en **a** si en dicho punto la tangente atraviesa a la gráfica.

Ejemplo 7. En la gráfica aparece la función y = x^3 y la tangente en el punto x =0. Se aprecia que en dicho punto la gráfica posee una inflexión.

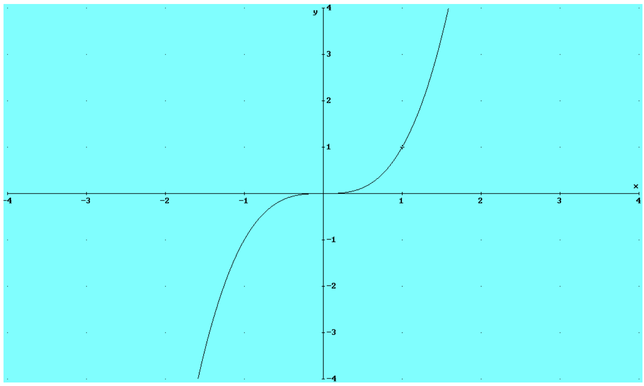


Figura 5

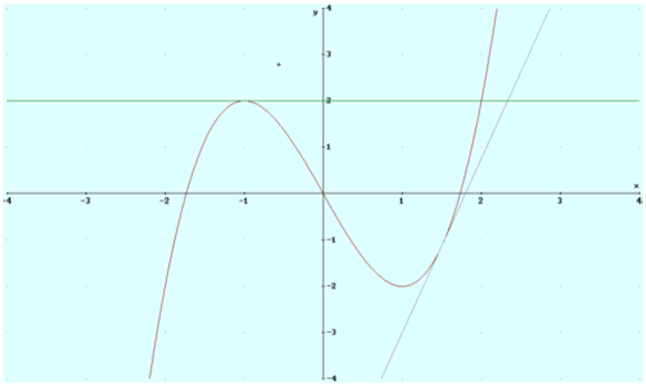
Proposición. Si la función es derivable en **a** y f''(a)>0 se verifica que f es convexa en **a**.

Análogamente si f es derivable en **a** y f''(a)<0 se verifica que f es cóncava en **a**.

Criterio práctico. Para calcular los puntos de inflexión se halla la derivada segunda de f, se igual a cero y se resuelve la ecuación. En las soluciones de la ecuación se estudia y si cambia la curvatura hay punto de **inflexión.**

f ''(x)	**+**	**0**	**-**
f (x)	**Convexa** ∪	**P.inf**	**Cóncava** ∩

Ejemplo 8. En la gráfica de la figura se aprecia que la función es cóncava en el punto –1 es convexa en el punto 3/2 y tiene un punto de inflexión en el 0:



Ejercicio 15. Dada la función $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ estudia la curvatura y los puntos de inflexión.

9. ***Aplicación de la derivada a la representación gráfica de funciones***

El conocimiento de una función se completa perfectamente dibujando su gráfica, los siguientes resultados dan una idea aproximada de ésta:

I) ***Estudio de f*** *(resumen)*

1º Dominio de f.
2º Puntos de corte con los ejes.
3º Signo de la función (regiones en las que varía el signo).
4º Simetrías.

- Si f(-x) = f(x), función par, simétricas respecto del eje de ordenadas.
- Si f(-x) =-f(x), función impar, simétrica respecto del origen.

5º Asíntotas

- Verticales

Si existe **a** tal que $\lim_{x\to a} f(x)=\infty$, **x =a** es la ecuación de una asíntota vertical.

- Horizontales

Si $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$, **y =b** es una asíntota horizontal.

- Oblicuas

Si $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m$ y $\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=n$, **y =m x +n** es una asuntota oblicua.

II) ***Estudio de f’*** *(resumen)*

1º Crecimiento y decrecimiento.
Si f ’(x)>0 , f es creciente. Si f ’(x)<0, f es decreciente.
2º Máximos y mínimos relativos
Condición necesaria de máximo y mínimo es que f ’(x)=0.

III) ***Estudio de f’’****(resumen)*

1º Concavidad y convexidad, f ’’>0 convexa $\cup$, f ’’<0 cóncava $\cap$
2º S i f ’’(x_0) =0 y en dicho punto cambia la curvatura es punto de inflexión.

Ejemplo 8. Representamos gráficamente la función $y=\frac{x}{x^2+1}$

I) Estudio de f

1º D =R
2º Puntos de corte, el (0, 0)
3º Signo de f, negativa en x<0 y positiva para x>0
4º Simetrías, f(-x) = -f(x), luego simétrica respecto del origen.
5º Asuntotas.
No hay verticales por que el dominio es todo R
Horizontales y =0
No hay oblicua.

II) Estudio de f ’

$f'(x)=\frac{(x^2+1)-2x.x}{(x^2+1)^2}$, f ’(x)=0 $\Rightarrow$ $-x^2+1=0$, de donde x =$\pm$ 1

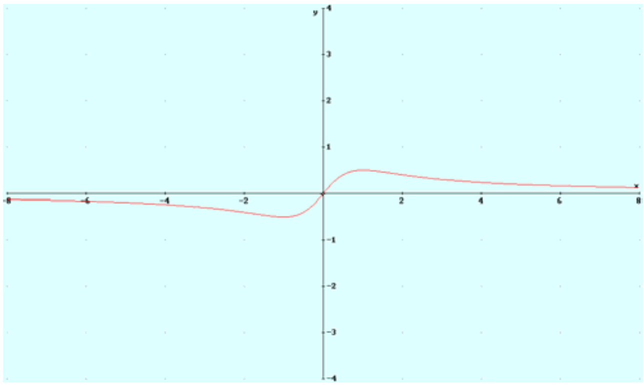
x	- ∞		-1		1		∞
f '(x)	↘	**-**	**0**	↗	**0**	**-**	↘
f(x)		**Decrece**	**Mínimo**	**Crece**	**Máximo**	**Decrece**	

1º f decrece en los intervalos]-∞ , -1[y]1, ∞ [y crece en]-1, 1[
2º Tiene un mínimo relativo en el punto (-1, -1/2) y un máximo relativo en el punto (1, 1/2).
III) Estudio de f ’’
f ’’(x)=$\frac{-2x(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(-x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\frac{-2x(x^2+1)-4x(-x^2+1)}{(x^2+1)^3}=\frac{2x^3-6x}{(x^2+1)^3}$

$$f''(x)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=\pm\sqrt{3} \end{cases}$$

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$+\sqrt{3}$		∞
f ''		-	0	+	0	-	0		
f		$\cap$	inflexión	$\cup$	inflexión	$\cap$	inflexión	$\cup$	

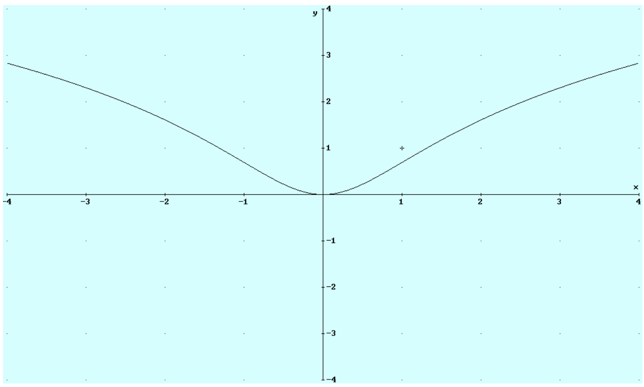
En la tabla se indica la curvatura y los puntos de inflexión
La gráfica es:



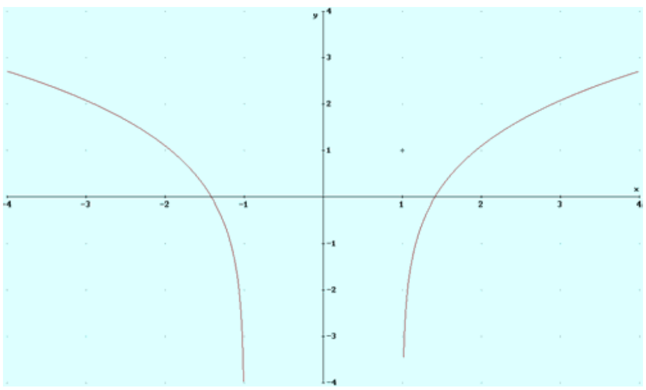
Ejercicio 16. Representar las gráficas de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$; b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$; c) $f((x)=\dfrac{x^2-5x+2}{x-2}$

Ejemplo 9. La gráfica de y = ln (x^2+1) es:



Ejemplo 10. La gráfica de y =ln (x^2-1)



Ejercicio 17. Representa gráficamente: a) $y = x\, e^{x}$; b) $y = \dfrac{x}{\ln x}$.

10. Aplicaciones de las derivadas a la resolución de problemas de máximos y mínimos

(Incluimos los propuestos en selectividad)

Problema 1. Nos dicen que la función f(t) = t -2 es la derivada de la inflación en función del tiempo en cierto país, cuando $0 \le t \le 5$. Determinar el valor de t para el que la inflación alcanza el valor mínimo.

Problema 2. Se calcula que el valor de una acción ***t*** meses después de salir al mercado durante el primer año viene dado por la función $v(t)=t^2-6t+10$. Explique razonadamente en qué mes conviene comprar las acciones para adquirirlas al precio mas ventajoso.

Problema 3. La velocidad (en m./sg.) que alcanza cierto atleta en una carrera de 200 metros viene dado en función del espacio recorrido, x, por la siguiente expresión:
f(x) =-0´00055 x (x-300)
Deducir de forma razonada:
¿Qué distancia ha recorrido el atleta cuando alcanza su velocidad máxima?¿cuál es ésta velocidad?

Problema 4. El coste total en euros de la producción de ***x*** litros de un determinado producto viene dado por C(x) = $\frac{1}{2}x^2 + 5x + 800$. Definir la función que determina el coste medio por litro producido y determinar de forma razonada con qué producción dicho coste medio será mínimo. ¿cuál es el valor de dicho coste?

Problema 5. Se calcula que entre las 2000 y 5000 revoluciones por minuto el consumo de gasolina de un motor viene dado por la función $f(x) = 2x^2-12x+23$, donde f indica los litros consumidos en una hora y x viene expresada en miles de revoluciones por minuto. Hallar de forma razonada:
a) Las revoluciones con las que el consumo del motor es mínimo.
b) Las revoluciones con las que el consumo del motor es máximo.
c) Dichos consumos.

Problema 6. El rendimiento, f(t), en un examen que dura una hora en función del tiempo *t* viene dado por
$f(t) = t - t^2, \quad 0 \le t \le 1$
Deducir razonadamente:
a) Cuándo el rendimiento es nulo.
b) Cuándo el rendimiento es máximo.
c) Cuándo el rendimiento es creciente y cuándo es decreciente.

Problema 7. En una pradera se tiene que vallar una zona de 400 m^2, que debe tener forma de rectángulo. Cada metro de valla cuesta 100 €. Si x es la medida en metros de uno de sus lados, se pide:
a) Obtener razonadamente la función f tal que f(x) sea el coste de la valla, indicando entre qué valores puede variar x.
b) Deducir razonadamente el valor de x para el que la función f(x) alcanza el valor mínimo.

Otros problemas del tema (derivadas) propuestos en selectividad

1. La función $f(t)= 2`1t^2+ 0`8\ t-1$, para $0 \le t \le 9$, donde el tiempo, t, viene expresado en años, proporciona los beneficios de una empresa en miles de euros entre los años 1991 (t =0) y 2000 (t =9).
a) Calcular de forma razonada la tasa de variación media del beneficio de esta empresa en este periodo de tiempo.
b) Obtener de forma razonada la tasa de variación media del beneficio de los últimos años.
c) ¿Qué podemos concluir acerca de la variación del beneficio en los dos últimos años?

2. Mediante la utilización razonada de la relación de la derivada de una función con su crecimiento o decrecimiento, obtener en qué puntos del intervalo [-2, 2] son crecientes o decrecientes las funciones:
a) $f(x) = x^2$
b) $f(x) =x^3-7$.

3. Obtener la derivada de la función $f(x) = \dfrac{2}{x-3}$ en el punto de abscisa x = 4. Explicar lo que significa el valor obtenido de la derivada. Calcular la tasa de variación instantánea en el punto de abscisa x = 5.
c) ¿Qué podemos concluir acerca de la variación del beneficio en los dos últimos años?

Problemas propuestos

1. A un vendedor de ordenadores le cuesta 140000 ptas. cada modelo de la marca PCHE-COMPR. Ha comprobado que al precio de 240000 ptas. unidad, vende 30 ordenadores mensualmente y que por cada 2000 ptas. de descuento en el precio puede vender 3 unidades más al mes. Hállese a que precio debe venderlos para obtener el máximo beneficio posible.

2. Se define una función del modo siguiente:

$$F(x)=\begin{cases} 1 & si\, x<0 \quad ó \quad x\geq\dfrac{\pi}{2} \\ \cos x & si \quad 0\leq x<\dfrac{\pi}{4} \\ senx & si \quad \dfrac{\pi}{4}\leq x<\dfrac{\pi}{2} \end{cases}$$

a) Hallar el dominio de definición.
b) Determinar la función derivada y dar su dominio.

3 Estudiar los máximos y mínimos de la función: y = $\dfrac{(3x-1)}{3x^2+1}$ ¿los posee absolutos?

4. Representación gráfica de $y=\dfrac{x^2}{x^2-4}$

5. Cierta entidad financiera lanza al mercado un plan de inversión cuya rentabilidad, R(x), en miles de € viene dada en función de la cantidad que se invierta x, en miles de € por medio de la siguiente expresión:

$$R(x)= -0{,}001x^2+0{,}5x+2{,}5$$

a) Deducir razonadamente la cantidad de dinero que le conviene invertir a un cliente en dicho plan .(en soluciones gráficas es el 11)
b) ¿Qué cantidad obtendría?

6. El coste de producción de x unidades diarias de un determinado producto es:

$$\frac{1}{4}x^2+35x+25$$

y el precio de venta de uno de ellos es (50-x/4) €
Halla el número de unidades que debe venderse diariamente para que el beneficio sea máximo. (en soluciones gráficas es el 12)

7. En 1980 se fundó una asociación ecologista. Se sabe que el número de sus miembros ha variado con los años de acuerdo con la función.

$$N(x) = 50(2x^3 - 15x^2 + 36x + 2)$$

a) Cuántos fueron los socios fundadores?
b) En qué períodos de tiempo aumenta el número de socios? (en soluciones gráficas es el 14)

8. Dada la función y = $\left|x^2-7\right|$, se pide:

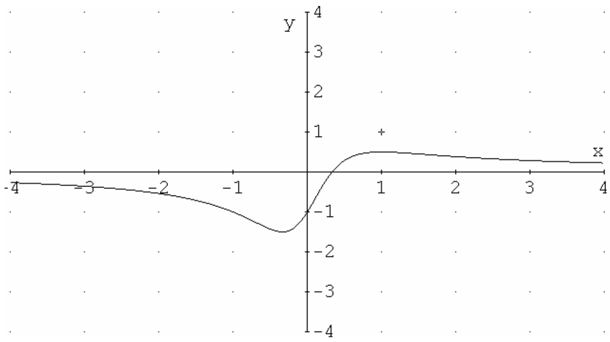
a) Representarla gráficamente.
b) Ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa x =1.
c) Hallar sus máximos y mínimos relativos.

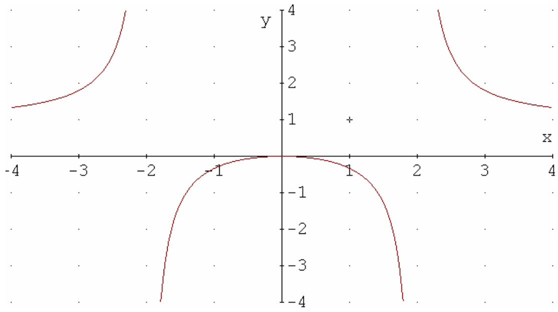
9. Hallar a y b para que la función $f(x)=x^3+ ax +b$ tenga un máximo en el punto (1,1)

10. Estudia y representa $y=\dfrac{\ln x}{x}$

Gráficas de ejercicios propuestos.

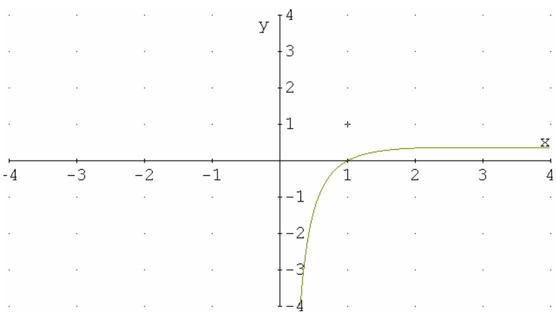
y= $\dfrac{3x-1}{3x^2+1}$



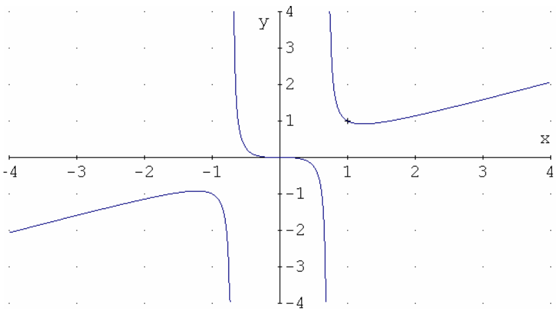


y= $\dfrac{x^2}{x^2-4}$

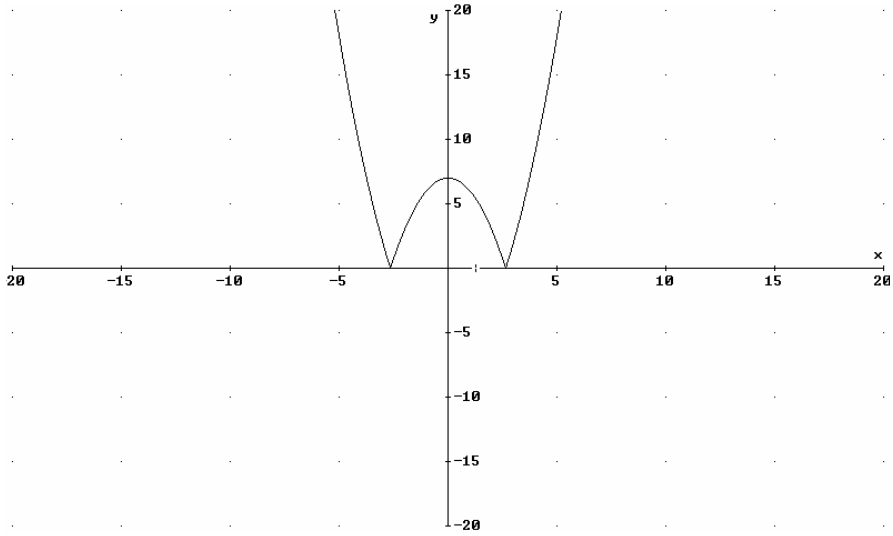
y= $\dfrac{\ln x}{x}$



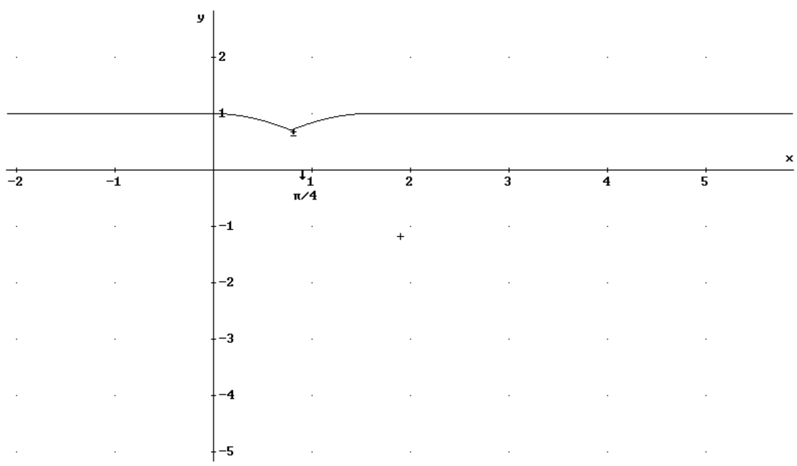
y= $\dfrac{x^3}{2x^2-1}$



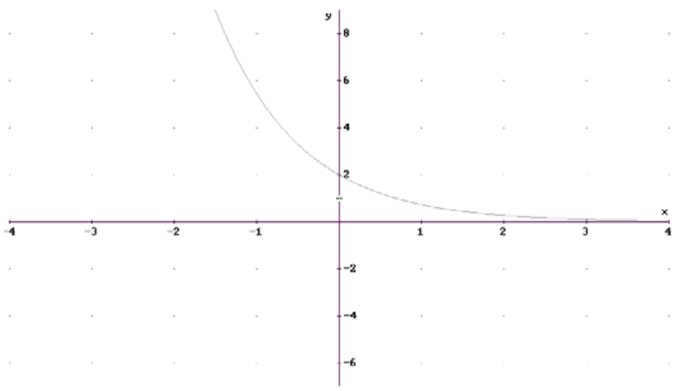
$y = \left|x^2 - 7\right|$



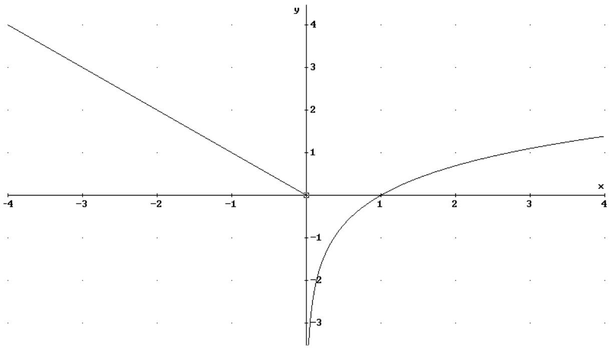
Gráfica de ejercicio 2



$y=2.e^{-x}$



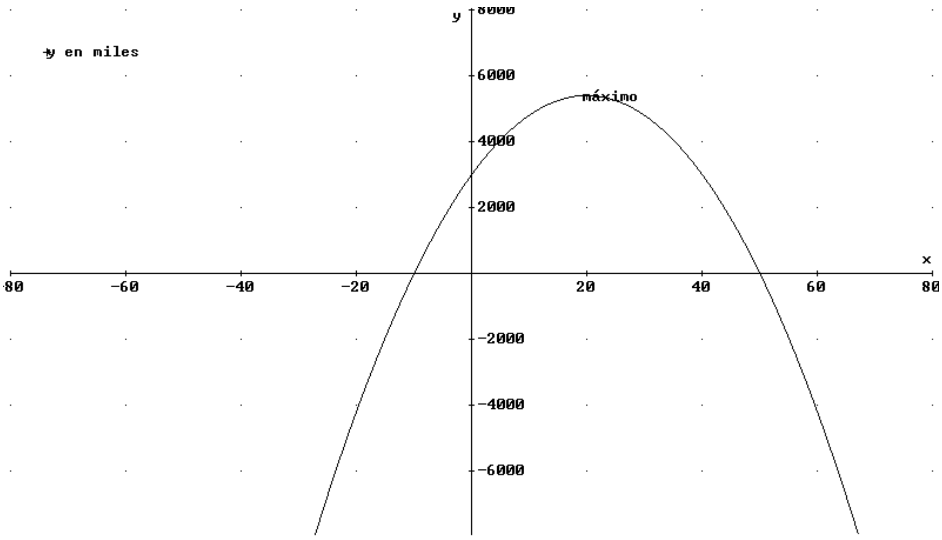
g(x)= $\begin{cases} -x & si\ x \leq o \\ \ln x & si \quad x > 0 \end{cases}$



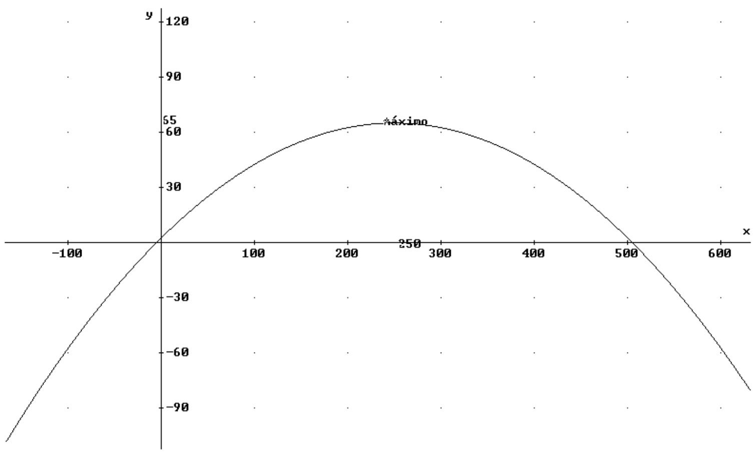
Soluciones gráficas de problemas

Solución gráfica del problema 1

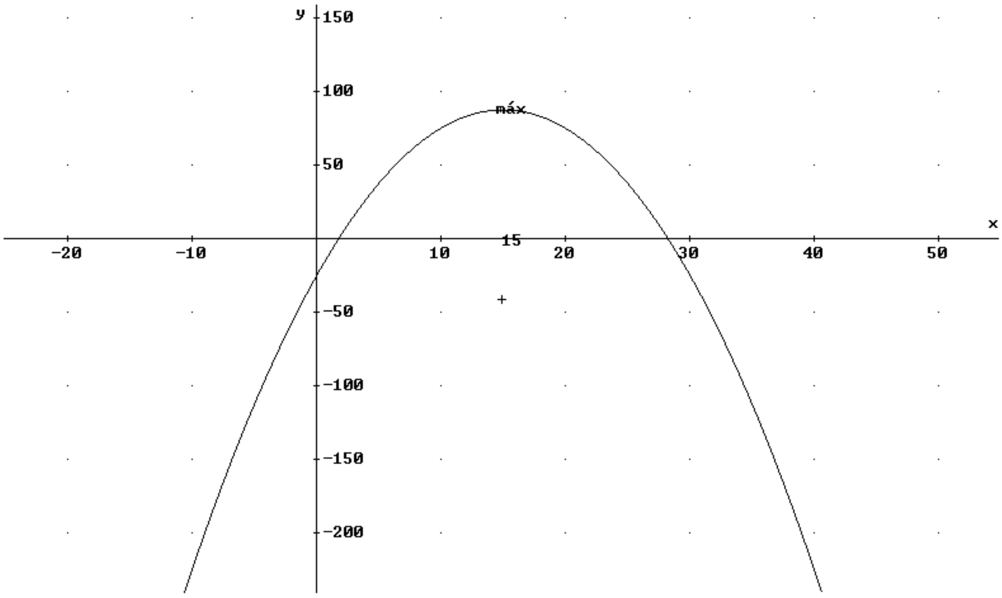
B(x)= (100000 – 2000x)(30 – 3x)



Solución gráfica problema 11.



Solución gráfica del problema 12.
$B(x)=(50-x/4)x-((1/4)x^2+35x+25)$



Solución gráfica problema 14