CAPÍTULO 2

APLICACIONES DE LA DERIVADA

2.1 ANÁLISIS Y TRAZO DE CURVAS

2.1.1 Estudio de la Variación de una Función
- a) Tabulación y Graficación de una Función
- b) Dominio y Rango de una Función

2.1.2 Intersecciones con los Ejes Coordenados
- a) Ceros de la Función
- b) Intervalos para los que la Función es Positiva
- c) Intervalos para los que la Función es Negativa

2.1.3 Máximos y Mínimos de una Función

a) Intervalos para los que la Función es Creciente
- b) Intervalos para los que la Función es Decreciente
- c) Criterio de la Primera Derivada para la Obtención de Máximos y Mínimos de una Función

2.1.2 Puntos de Inflexión
- a) Criterio de la Segunda Derivada para la Obtención de los Puntos de Inflexión
- b) Concavidad y Convexidad

2.2 ECUACIONES DE LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL

2.3 PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO

P R O P Ó S I T O

Considera Las siguientes preguntas antes de introducirte al estudio de este capítulo, esto te ayudará a tener un panorama general de sus contenidos, la forma de abordarlos y la utilidad que te reportará su aprendizaje.

¿Qué voy a aprender?	¿Cómo lo voy a lograr?	¿Para qué me va a servir?
Criterios para analizar cuantitativa y cualitativamente funciones que modelan situaciones que se presentan en diversas ramas del conocimiento y la actividad humana.	Estableciendo modelos matemáticos para diversas situaciones, incluyendo sus gráficas, ampliando el concepto de derivada y aplicando las técnicas de derivación.	Para hallar la solución de problemas que se refieren a optimización y razón de cambio y tener más elementos para la toma de decisiones tanto en la vida cotidiana como en tu actividad profesional.

CAPÍTULO 2

APLICACIONES DE LA DERIVADA

A menudo la vida nos enfrenta al problema de encontrar un mejor modo de hacer una determinada labor. Por ejemplo, un agricultor quiere escoger la mezcla de cultivos que sea la más apropiada para obtener el mayor aprovechamiento. Algunas veces un problema de esta naturaleza puede asociarse de tal manera que involucre maximizar o minimizar una función sobre un conjunto específico.

2.1 ANÁLISIS Y TRAZO DE CURVAS

En este tema se examinarán las funciones mediante la tabulación y el posterior análisis de su comportamiento gráfico.

2.1.1 ESTUDIO DE LA VARIACIÓN DE UNA FUNCIÓN

a) Tabulación y Graficación de una Función

Ejemplo.

Un grupo de investigadores ecologistas observó que el crecimiento de un pino de una especie determinada esta dado por la siguiente función.

y = $\sqrt{x}$

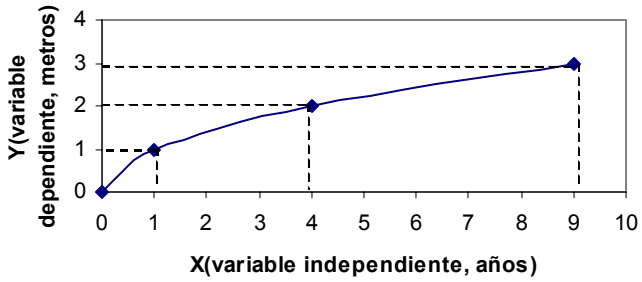
En donde 'x' representa el número de años transcurridos de la vida del pino y la 'y' representa su altura en metros.

Completa la siguiente tabla

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	1			2					3

Los valores que se le dan a 'x' son arbitrarios, y pueden ser más grandes que 9, pero no más pequeños que cero, ¿por qué?

La gráfica queda como se muestra a continuación.



Recuerda que la variable 'y' es una función de 'x', (y = f (x)).

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Contesta las siguientes preguntas con base a la función que rige el crecimiento del pino.

¿Cuál es el más pequeño valor que puede tomar el tiempo (x)?

¿Cuál es el mas alto valor que puede tomar el tiempo (x)?

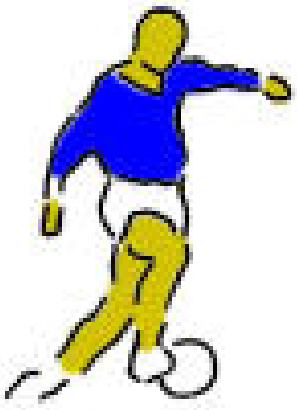
¿Cuál es el más pequeño valor que puede tomar la altura del pino (Y)?

¿Cuál es el más alto valor que puede tomar la altura del pino (Y)?

Ejemplo

La altura a la que se encuentra una pelota pateada desde un punto situado a 10 pies sobre el nivel del suelo esta dada por la siguiente función

$h(t) = 80t - 16t^2 + 10$

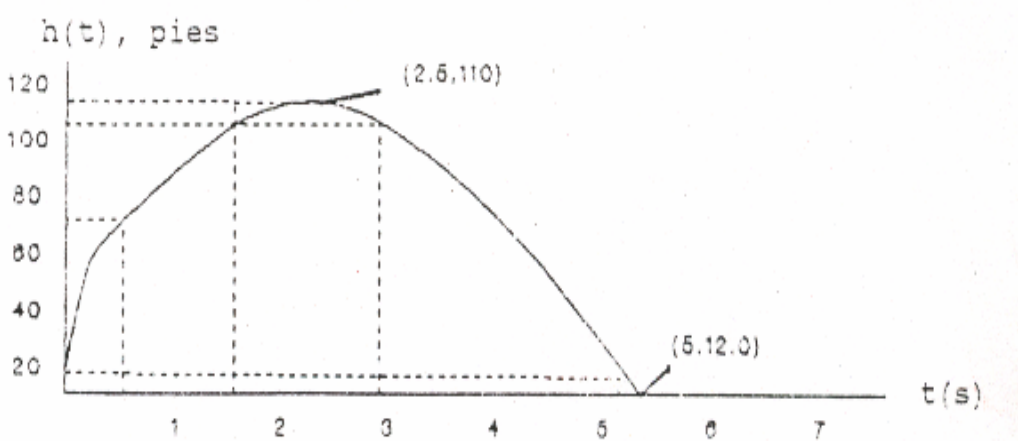


En donde “t” es el tiempo (en segundos) y h (t) es la altura (en pies) sobre el suelo a la que se encuentra situada la pelota en el instante t.

Completa la siguiente tabla

T	0	1	2	2.5	3	4	5	6
h (t)			106		106			

La gráfica se muestra a continuación



Observa la gráfica y analiza las siguientes preguntas.

¿Para que valores del tiempo (t), la altura (h) que alcanza la pelota tiene significado lógico? A ese conjunto se llama dominio, y se presenta así:

$$0 \leq t \leq 5.12$$

Lo que significa que 't' es mayor o igual que cero, pero menor o igual que 5.12
¿Cuáles son los posibles valores de la altura que puede alcanzar la pelota? A ese conjunto se le llama rango, y se presenta así:

$$0 \leq h \leq 110$$

y significa que 'h' es mayor o igual que cero, pero menor o igual que 110.

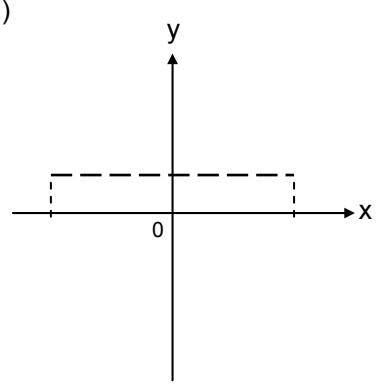
b) Dominio y Rango de una Función

A partir de las gráficas siguientes obtén la información necesaria para contestar lo que se te pide a continuación:

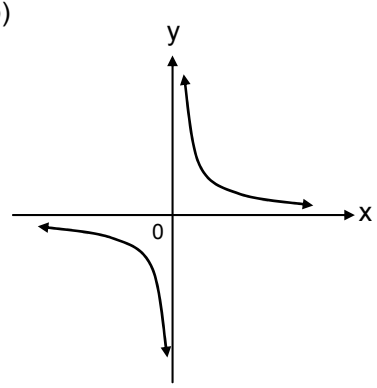
¿Cuál es el intervalo de valores que puede tomar 'x' para que la función exista?

¿Cuál es el intervalo de valores que puede tomar 'y', que corresponden a las imágenes de los valores que pueden tomar 'x'?

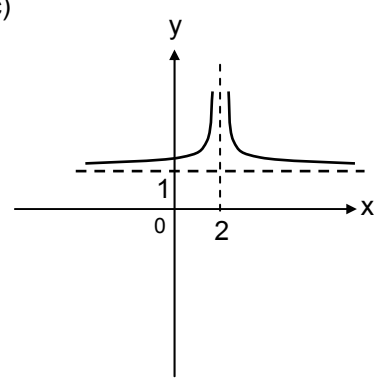
a)



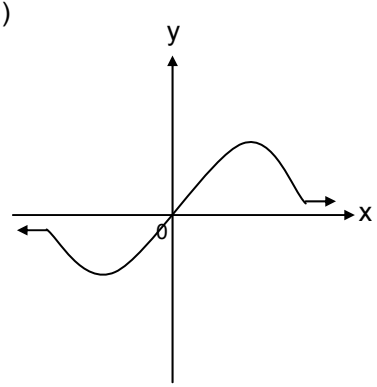
b)



c)



d)



Ahora ya se pueden definir el dominio y el rango definiciones

DOMINIO (D). El dominio de una función son todos los valores de la variable independiente ‘x’ que hacen que la función sea real, es decir, que exista.

RANGO (R). El rango o conjunto de imágenes de una función son todos los valores que puede tomar la función (y) para todos y cada uno de los elementos del dominio.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Para cada una de las funciones siguientes, encuentra su gráfica, su dominio, y su rango.

   a) f (x) = 5, $0 < x < 6$, (este intervalo debe considerarse como el dominio)

   b) f (x) = 3X + 2, $-3 \leq x \leq 3$.

   c) f (x) = $\frac{x-3}{x+2}$

   d) f (x) = $\sqrt{3x+2}$

2. Para cada una de las siguientes funciones encuentra su gráfica, su dominio y su rango.

   a) f (x) = x^2, (para toda x)

   b) f (x) = $3x^2 + 5$, $x > -1$.

   c) f (x) = $\sqrt{4x}$

   d) f(x) = $x^3 - 1$, $x \neq 0$.

   e) f (x) = $\frac{x+1}{x-2}$ (el denominador, x – 2 debe ser diferente de cero)

   f) f (x) = $\sqrt{2x-1}$ (el radicando, 2x – 1, debe ser mayor o igual a cero)

2.1.2 INTERSECCIONES CON LOS EJES COORDENADOS

Ejemplo.

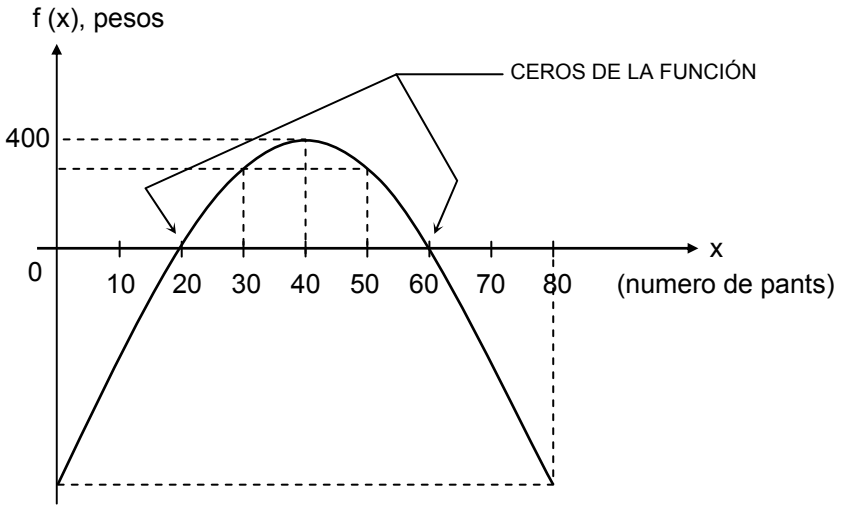
En una fábrica de pants deportivos se encontró que la función que describe las ganancias, f(x), de la empresa en términos del número 'x' de pants, producidos esta dada por la siguiente expresión.

$f(x) = -x^2 + 80x - 1200$

Al realizar la tabla

x	0	10	20	31	40	49	60	70	80
f (x)	-1200		0				0		

Puedes observar que existen dos diferentes valores de la producción, (x), para los que las ganancias, f (x), son nulas es decir, que corresponden a cero ganancias.



Al graficar la función se pueden apreciar los valores de 'x' para los que la función vale cero, es decir, x = 20 y x = 60.

¿En dónde se encuentran estos dos puntos?

¿Te das cuenta de que estos dos puntos representan las intersecciones con el eje 'x' (eje de las abscisas)?

Pues bien, existe un método algebraico para hallar las intersecciones con el eje 'x':

Si en la función original $f(x) = -x^2 + 80x - 1200$

se hace que f (x) sea igual a cero, ¿qué es lo que obtienes?

$$0 = -x^2 + 80x - 1200$$

que representa una ecuación de segundo grado.

¿Puedes resolverla?

¿Cuánto vale a, b y c?

Aplica la fórmula general para resolver la ecuación.

La formula general es: $X_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Como a = –1, b = 80 y c = –1200, entonces,

$$X_{1,2} = \frac{-(80) = \sqrt{(80)^2 - 4(-1)(-1200)}}{2(-1)}$$

o $$X_{1,2} = \frac{-80 \pm \sqrt{6400 - 4800}}{-2}$$

o bien $$X_{1,2} = \frac{-80 \pm \sqrt{1600}}{-2}$$

o también $$X_{1,2} = \frac{-80 \pm 40}{-2}$$

Así que $$X_1 = \frac{-80 + 40}{-2} = \frac{-40}{-2} = 20$$

y $$X_2 = \frac{-80 - 40}{-2} = \frac{-120}{-2} = 60$$

a) Ceros de la Función

¿Te das cuenta? Al utilizar el método algebraico también es posible hallar las intersecciones con el eje 'x' . A estos valores de 'x' se les llama ceros de la función.

¿Crees que se puedan encontrar las intersecciones con el eje 'y'? ¿De que modo?

Observa nuevamente la tabla.

¿Existe algún valor para las ganancias, f(x), tal que la producción, 'x', sea igual a cero?

¡Claro esta! Cuando f(x) vale –1200, 'x' vale cero.

¿Qué es lo que esto significa para la empresa?

También puedes verificarlo en la gráfica.

Pero, el método algebraico para hallar las intersecciones con el eje 'y' es como sigue:

Si en la función original $f(x) = -x^2 + 80x - 1200$

Se hace que 'x' sea igual a cero, ¿qué se obtiene?

$$f(x) = -(0)^2 + 80(0) - 1200$$

o sea $$f(x) = -1200$$

lo que se esperaba.

Así que

Para hallar las intersecciones con el eje 'x', se hace que f(x) sea igual a cero; y se resuelve la ecuación resultante.

Para hallar las intersecciones con el eje 'y', se hace que 'x' sea igual a cero; y se resuelve la ecuación resultante.

Definición.

Se llama 'ceros' de una función a todos los valores de 'x' para los cuales la función es nula, es decir, cero.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Para cada una de las funciones siguientes, encuentra su gráfica, las intersecciones con el eje 'x', las intersecciones con el eje 'y' y los ceros.

   a) $f(x) = 3x - 2$

   b) $f(x) = -2x - 3$

   c) $f(x) = x^2 + 6x$

   d) $f(x) = 2x^2 - 32$

   e) $f(x) = X^2 + x - 6$

   f) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$

2. Para cada una de las funciones siguientes, encuentra su gráfica, las intersecciones con el eje 'x', las intersecciones con el eje 'y' y los ceros.

   a) $f(x) = 6x + 1$

   b) $f(x) = -3x + 2$

   c) $f(x) = x^2 - 4x$

   d) $f(x) = x^2 - 49$

   e) $f(x) = x^2 - 8x + 15$

   f) $f(x) = 3x^2 - 8x - 3$

b) Intervalos para los que la Función es Positiva

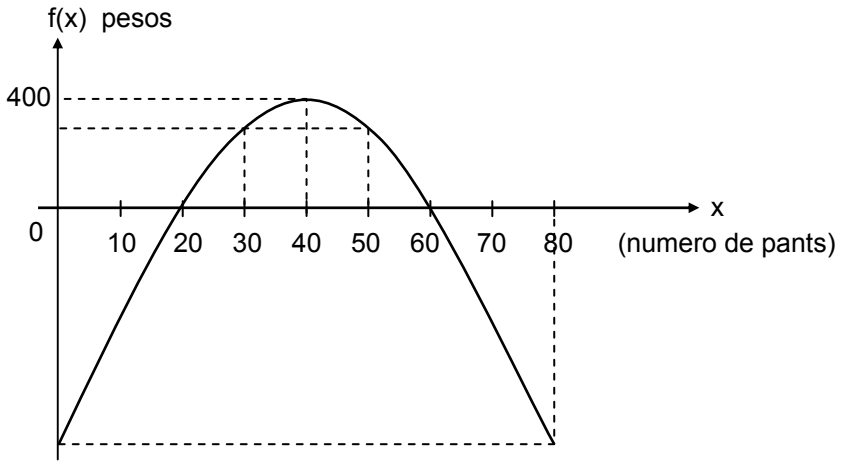
Observa la siguiente tabla

x	0	10	20	31	40	49	60	70	80
f (x)	–1200	–500	0	319	400	319	0	–500	–1200

¿Para qué valores de la producción, x, la empresa obtiene ganancias, f (x)?

¡Bien! Estos son 31, 40 y 49 pants.

Ahora, observa la siguiente gráfica



¿Existen otros valores de la producción para que la empresa obtenga ganancias?

¿Cuál es el mínimo valor de la producción para el que la empresa obtiene ganancias?

¿Cuál es el máximo valor de la producción para el que la empresa obtiene ganancias?

¿Cuál es el intervalo que obtienes?

Pues bien, el intervalo de la producción para el que la empresa obtiene ganancias es:

$$21 \leq x \leq 59$$

(en los intervalos cerrados, $\leq$, los extremos si se incluyen) y deben leerse así; 'x' es mayor o igual que 21 pero menor o igual que 59. Lo que es muy cierto puesto que cuando X = 20; o X = 60, la función no es positiva ni negativa, es nula. Además, los valores de 'x' deben ser numeros enteros puesto que representan la producción de pants (completos).

c) Intervalos para los que la función es negativa

¿Para que valores de la producción (x), la empresa registra ganancias negativas, es decir, perdidas?

x	0	10	20	31	40	49	60	70	80
f (x)	–1200	–500	0	319	400	319	0	–500	–1200

Ahora, observa nuevamente la gráfica anterior.

¿Existen mas valores de 'x' para los que las ganancias sean negativas?

¿En cuantos intervalos la función, f (x), es negativa?

¿Cuáles son?

¡Claro! Estos intervalos deben ser

$$0 < x < 20 \qquad y \qquad 60 < x < \infty$$

(en los intervalos abiertos, <, los extremos no se incluyen)

el signo '∞' indica que la producción puede ser muy alta, mucho más grande que 80, que son los valores para los que siempre se obtendrán perdidas. ¿Por qué motivos se podría presentar esta situación en la empresa?

Definiciones

FUNCIÓN POSITIVA. Una función es positiva si al graficarla se encuentra por encima del eje 'x'.

FUNCIÓN NEGATIVA. Una función es negativa si al graficarla se encuentra por debajo del eje 'x'.

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Para cada una de las funciones siguientes, encuentra sus ceros, los intervalos en donde la función es positiva y los intervalos en donde es negativa.

   a) $f(x) = 3x - 2$

   b) $f(x) = -2x - 3$

   c) $f(x) = x^2 + 6x$

   d) $f(x) = 2x^2 - 32$

   e) $f(x) = x^2 + x - 6$

   f) $f(x) = 2x^2 - 7x + 3$

2. Para cada una de las funciones siguientes, encuentra sus ceros, los intervalos donde la función es positiva y los intervalos en donde la función es negativa.

a) $f(x) = 6x + 1$

b) $f(x) = -3x + 2$

c) $f(x) = x^2 - 4x$

d) $f(x) = x^2 - 49$

e) $f(x) = x^2 - 8x + 15$

f) $f(x) = 3x^2 - 3x - 3$

2.1.3 MÁXIMOS Y MÍNIMOS DE UNA FUNCIÓN

Ejemplo

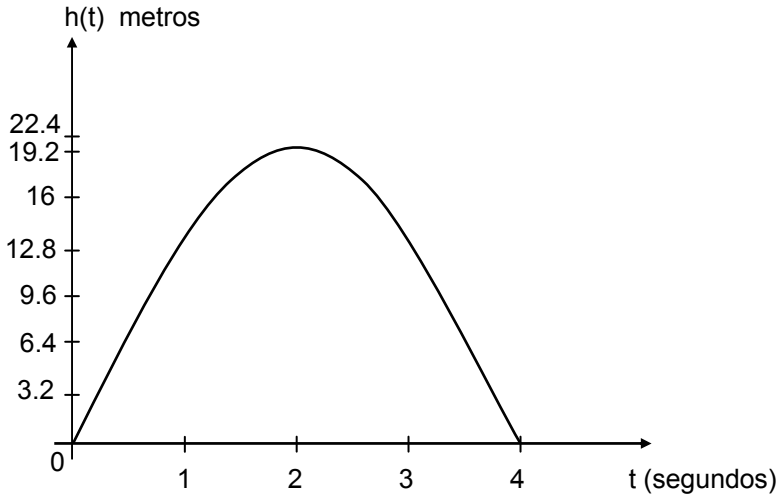
Desde el fondo de un pozo de 15 metros de profundidad, un excursionista, que allí se encontraba por accidente, lanza piedras para que sus compañeros las vean, y así pueda ser rescatado.
La velocidad con la que lanza las piedras verticalmente hacia arriba es de $Vo = 20$ m/s.
Se sabe que la función que describe la altura que alcanza la piedra en términos del tiempo es

$$h(t) = Vo\, t - \frac{gt^2}{2}$$

Sustituyendo $Vo = 20$ m/s y $g = 9.8$ m/s^2 tenemos que $h(t) = 20t - 4.9t^2$

Para graficar esta expresión variamos el valor de "t" según la siguiente tabla.

t	h(t)	
0	0	$h(0) = 20(0) - 4.9(0)^2 = 0$
1	15.1	$h(1) = 20(1) - 4.9(1)^2 = 15.1$
2	20.4	$h(2) = 20(2) - 4.9(2)^2 = 20.4$
3	15.9	$h(3) = 20(3) - 4.9(3)^2 = 15.9$
4	1.6	$h(4) = 20(4) - 4.9(4)^2 = 1.6$



Observa la tabla y la gráfica para contestar las siguientes preguntas:

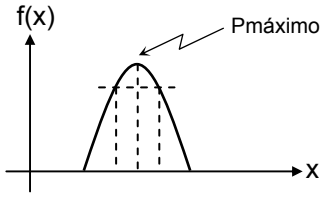
¿Para que valor de 't' la piedra asciende? (El valor de la función aumenta, es decir, crece)

¿Para que valor 't' la piedra desciende? (el valor de la función disminuye, es decir, decrece)

¿Cuál es el máximo valor que puede tomar la altura?

Definición

PUNTO MÁXIMO. Se dice que un punto sobre una determinada curva, f (x), es un máximo relativo, si los valores de la función un poco a la izquierda y un poco a la derecha de dicho punto son más pequeños.



a) Intervalos para los que la Función es Creciente

Después de observar la tabla y la gráfica anteriores

¿Podrías decir cual es el intervalo para el que la función es creciente?

Recuerda que el intervalo de definición debe estar en términos de la variable 't'.
Así que, debe ser $0 < t < 2$

No se incluyen los extremos, $t = 0$ y $t = 2$, dado que en esos puntos la función no crece ni decrece.

b) Intervalos para los que la Función es Decreciente

Después de observar la tabla y la gráfica anteriores

¿Podrías decir cual es el intervalo para el que la función es decreciente?

Dicho intervalo debe ser así:

$$2 < t < 3$$

Definiciones

FUNCIÓN CRECIENTE. Una función es creciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, (x), el valor de la variable dependiente, (y), también aumenta.

FUNCION DECRECIENTE. Una función es decreciente cuando al aumentar el valor de la variable independiente, (x), el valor de la variable dependiente, (y), disminuye.

Durante los primero 7 segundos, el pulso (en pulsaciones por minuto) de un individuo 't' segundos después de que comienza a correr está dado por

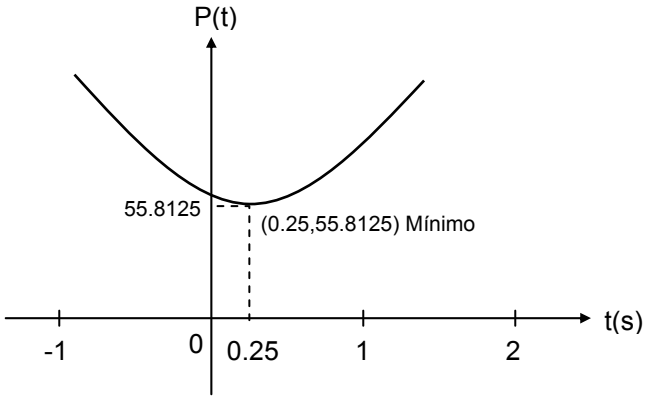
$$P(t) = 2t^2 - t + 56$$

El dominio de la función está dado en el mismo enunciado del problema. ¿Puedes decir cuál es?

Completa la siguiente tabla

t	0	1	2	3	4	5	6	7	–1	–2	–3	0.25
P(t)			62				122			66		55.8125

La gráfica de esta función es la que a continuación se muestra, ¡verifícalo!



ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Después de observar la tabla y la gráfica anteriores, contesta las siguientes preguntas:

¿Cuál es el valor más pequeño de la función?

¿Para que valor de ‘t’ la función es creciente?

¿Puedes determinar el intervalo de valores de ‘t’ para los que la función sea decreciente en el sentido del contexto del problema?

¡Muy bien! El valor más pequeño de la función es 55.875 (pulsaciones por minuto). Además, el intervalo de valores de 't' para los que la función es creciente es

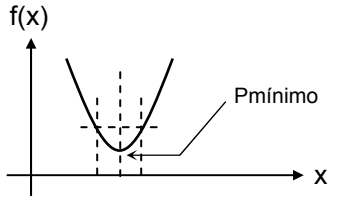
$$0.25 < t < 7$$

y, el intervalo de 't' para los que la función es decreciente es

$$0 < t < 0.25$$

Definición.

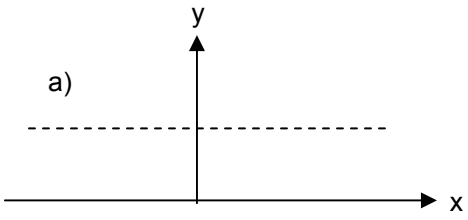
PUNTO MÍNIMO. Se dice que un punto sobre una determinada curva f (X), es un mínimo relativo, si los valores de la función un poco a la izquierda y un poco a la derecha de dicho punto, son más grandes.

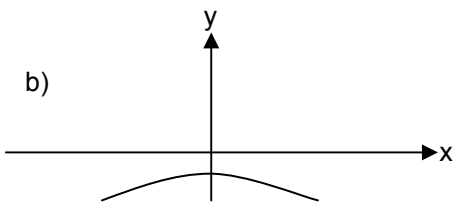


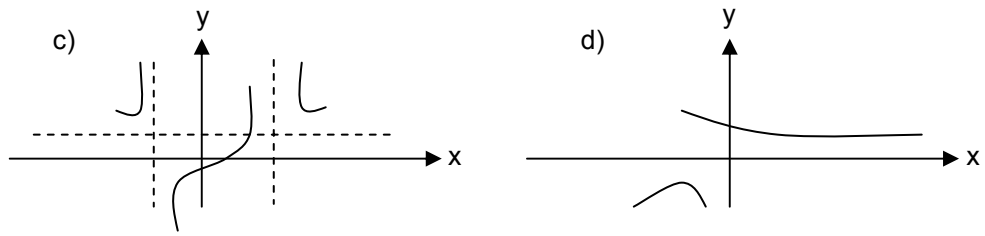
ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Para las gráficas que se muestran a continuación, determina:

Los intervalos en los que la función es positiva
Los intervalos en los que la función es negativa
Los intervalos en los que la función es creciente
Los intervalos en los que la función es decreciente







c) Criterio de la Primera Derivada Para la Obtención de Máximos y Mínimos de una Función.

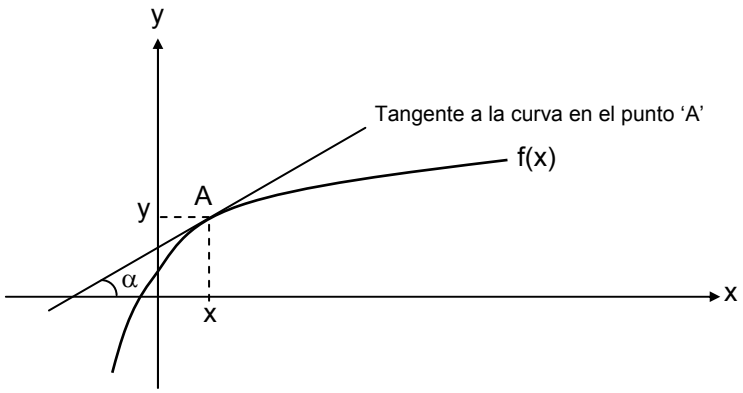
Conceptos Básicos.

Recordaras que la derivada de una función y = f(x), en un punto A(x,y), esta representada geométricamente por la pendiente de la tangente a la curva en ese punto.

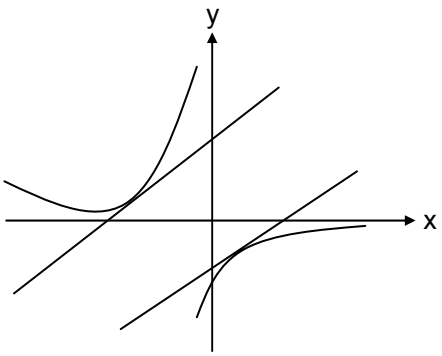
Si $Y = f(x)$,

entonces, $f'(x) = tg\ \alpha$

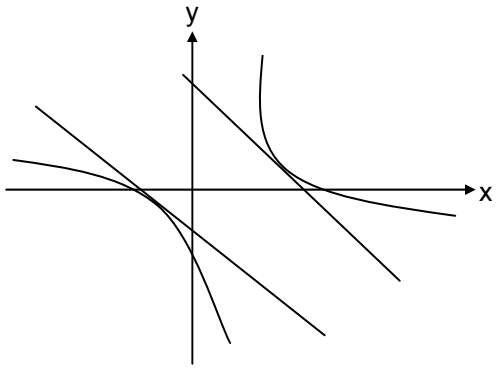
en donde 'α' es la inclinación de la recta tangente, y 'tg α' es la pendiente de dicha tangente.



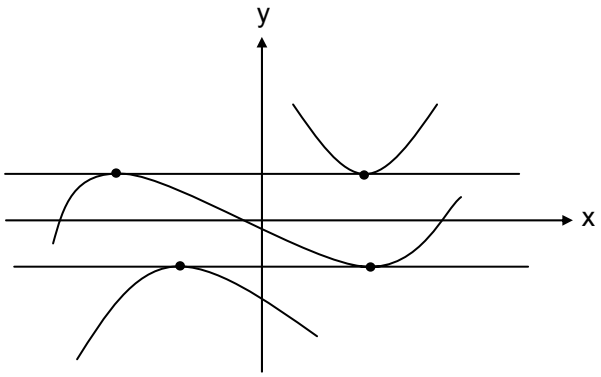
Además también se requiere que recuerdes como es la orientación de la tangente, mencionada con anterioridad, cuando su pendiente es positiva, negativa o cero.



Recta con pendiente positiva



Recta con pendiente negativa



Recta con pendiente ‘cero’

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Contesta las siguientes preguntas con base a las gráficas anteriores.

¿Cómo debe se la derivada de la función cuando la tangente tiene pendiente positiva?

¿Cómo debe se la derivada de la función cuando la tangente tiene pendiente negativa?

¿Cómo debe se la derivada de la función cuando la tangente tiene como pendiente el valor cero?

En un laboratorio de investigaciones nucleares, cierto científico encontró que la función que describe la posición de científico encontró que la función que describe la posición de una determinada partícula subatómica, que se desplaza sobre una recta coordenada, esta dada por

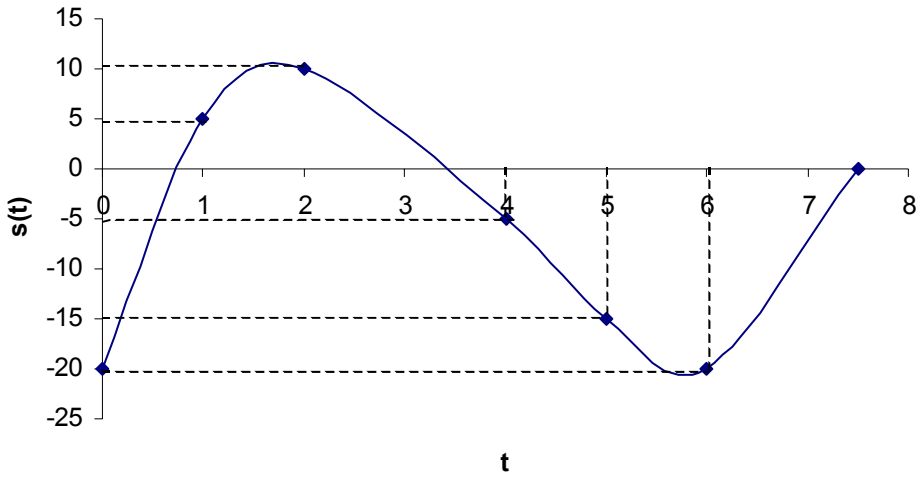
$$s(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20,$$

En donde, s(t), representa la posición de la partícula en el instante 't', y la variable 't' representa cualquier instante (en segundos).

t	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
s(t)	–20					10.375		10.625	–4

4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	10
		18.625				–3.125		

La gráfica que corresponde a la función dada, es



¿Puede dar los intervalos en los que la función es creciente?

¿Cuál es el intervalo en donde la función es decreciente?

Claro que seria más fácil hallar dichos intervalos si se conocieran con seguridad los valores de 't' para los que la función es máxima o mínima.

¿Cómo deben ser las tangentes en los puntos críticos, ya sea máximos o mínimos?

¿Y como deben ser sus pendientes?

¿Y cual debe ser el valor de la derivada de la función en dichos puntos?

Pues bien, para hallar con precisión los máximos y mínimos, en la ecuación resultante se despeja la variable.

Así si la función es

$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

Su derivada resulta ser

$$S'(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

Y, al igualar a cero, se obtiene que

$$3t^2 - 24t + 36 = 0$$

se puede ver que se trata de una ecuación de segundo grado, y para resolverla debes aplicar la ecuación general

$$X_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

¿Qué valores obtuviste?

¿Puedes decir lo que significan?

Los valores obtenidos son t_1 = 2 seg. Y t_2 = 6 seg., que son los instantes en donde se obtiene un máximo y un mínimo.

Pero, si no conocieras la gráfica, ¿podrías determinar en que instante se obtiene un máximo y en cual otro se obtiene un mínimo?

¿Cuál es el valor de la derivad para un valor de 't' a la izquierda de t = 2?

¿Puedes obtener una conclusión a este respecto?

¿Cuál es el valor de la derivada para un valor de 't' a la izquierda de t = 6?

¿Cuál es el valor de la derivada para un valor de 't' a la derecha de t = 6?

¿Puedes obtener una conclusión a este respecto?

Como la derivada de la función es $S'(t) = 3t^2 - 24t + 36$

Entonces, para t = 1.9 seg., que es un valor de 't' un poco a la izquierda de t = 2 seg., se tiene que

$$S'(1.9) = 3\,(1.9)^2 - 24\,(1.9) + 35 = 1.23$$

y como es un valor positivo de la derivada, entonces, la pendiente es positiva y la función en ese instante es creciente.

Así también, para t = 2.1 seg., que es un valor de 't' un poco a la derecha de t = 2 seg., se tiene que

$$S'(2.1) = 3\,(2.1)^2 - 24\,(2.1) + 36 = -1.17$$

y como es un valor negativo de la derivada, entonces, la pendiente de la tangente a la curva es negativa y a la función en ese instante es decreciente.

En conclusión, como la función primero crece (en t = 1.9) y luego decrece (en t = 2.1), entonces, el punto crítico encontrado en t = 2 es un máximo.

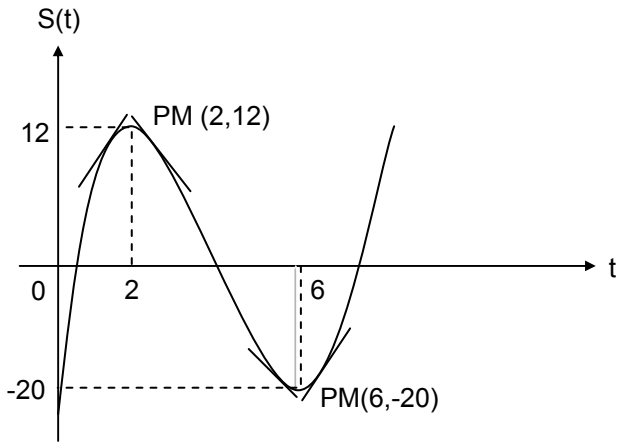
Para calcular el valor del punto máximo se sustituye t = 2 en la función original (sin derivar).

$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

Y se obtiene que

$$S\,(2) = (2)^3 - 12\,(2)^2 + 36\,(2) - 20 = 12$$

por tanto, las coordenadas del punto máximo son PM (2,12)



Del mismo modo, para determinar que tipo de punto critico (máximo o mínimo) es el que se encuentra en t = 6 seg., se sustituye por el valor de 't' un poco a la izquierda de t = 6 , por ejemplo, t = 5.9, y otro un poco a la derecha de t = 6, por ejemplo, t = 6.1 en la función derivada, como se muestra a continuación.

A partir de

$$S'(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

para t = 5.9, se tiene que

$$S'(5.9) = 3\,(5.9)^2 - 24\,(5.9) + 36 = -1.17$$

y como es un valor negativo de la derivada, significa que la pendiente es negativa y la función en ese instante es decreciente.

Así también, para t = 6.1, se tiene que

$$S'\,(6.1\,) = 3\,(6.1)^2 - 24\,(6.1) + 36 = 1.23$$

y como es un valor positivo de la derivada, entonces, la pendiente de la tangente a la curva es positiva y la función es creciente.

En conclusión, como la función primero decrece (en t = 5.9) y luego crece (en t = 6.1), entonces, el punto critico encontrado en t = 6 es un mínimo.

Para calcular el punto mínimo se sustituye t = 6 en la función original (sin derivar).

$$S\,(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

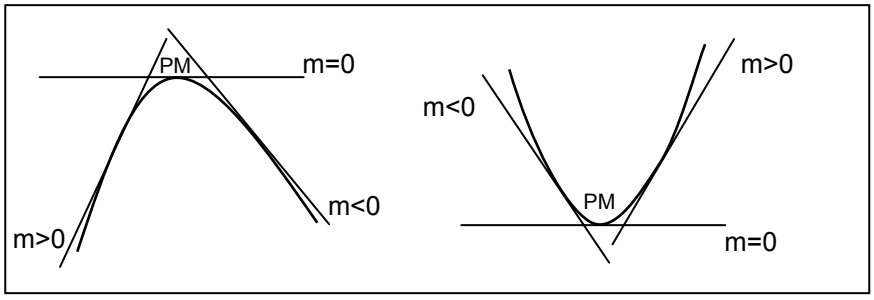
y se obtiene que

$$S(6) = (6)^3 - 12\,(6)^2 + 36\,(6) - 20 = -20$$

Por tanto, las coordenadas del punto mínimo son Pm (6,–20).

(Observa la gráfica anterior).

Las siguientes gráficas te ayudaran a concretar tus ideas.



Si m > 0, entonces, f' (x) >0 y la función es creciente

Si m < 0, entonces, f' (x) < 0 y la función es decreciente.

Si m = 0, entonces, f' (x) = 0 y la función no crece ni decrece, se trata de un máximo o un mínimo

2.1.4 PUNTOS DE INFLEXIÓN

Para la función derivada del problema anterior

$$S'(t) = 3t^2 - 24t + 36$$

Termina de llenar la tabla siguiente:

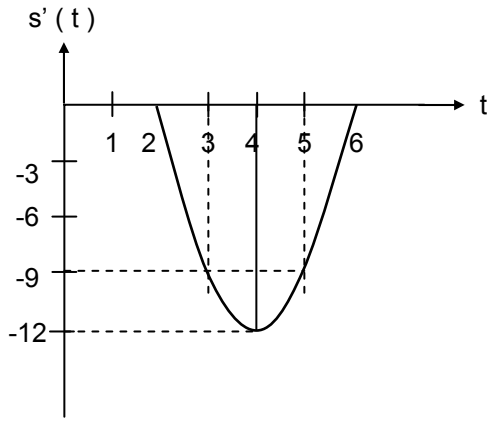
t	2	3	3.5	3.8	3.9	4	4.1	4.2	4.5	5	6
S'(t)			-11.25		-11.97	12		-11.88		-9	

¿Cuál es el valor más pequeño de la derivada S' (t)?

¿Para que valor de 't' sucede esto?

Pues bien, existe entre un punto máximo y un punto mínimo, otro punto en donde la derivada tiene ya sea el máximo valor o el mínimo valor. A dicho punto se le llama punto de inflexión.

La gráfica de la función derivada es la que se muestra a continuación



Puesto que la gráfica presenta simetría respecto al valor de t = 4, se puede decir que existe un punto de inflexión allí mismo, en t = 4.

a) Criterio de la Segunda Derivada para la Obtención de los Puntos de Inflexión

Como pudiste observar en la gráfica anterior, el punto de inflexión se presenta cuando la derivada de la función tiene un mínimo, aunque puede ser un máximo, como ya se dijo.

Entonces, se aplicará el criterio de la primera derivada sobre la función derivada, S' (t), para hallar el máximo o el mínimo valor de dicha función derivada (consulta el criterio de la primera derivada).

Como el criterio de la primera derivada indica que se debe derivar la función en estudio, y dicha función es ya una función derivada, entonces, se tiene la derivada de una derivada, y de aquí que se le llame como: 'criterio de la segunda derivada'.

De este modo, al derivar la función derivada

$$S'(t) = 3t^2 - 24t + 3$$

Se obtiene que

$$S''(t) = 6t - 24$$

Al igualar a cero esta ultima derivada, resulta que

$$6t - 24 = 0$$

y al despejar 't ' queda

$$t = \frac{24}{6}$$

o sea

$$t = 4$$

que es justamente el valor de 't' en donde la derivada S' (t) tiene un valor extremo (mínimo), es decir, es el valor de 't' en donde se presenta el punto de inflexión (o puntos de inflexión si 't' tomara varios valores).

Para hallar la abscisa del punto de inflexión, se sustituye t = 4 en la función original

$$S(t) = t^3 - 12t^2 + 36t - 20$$

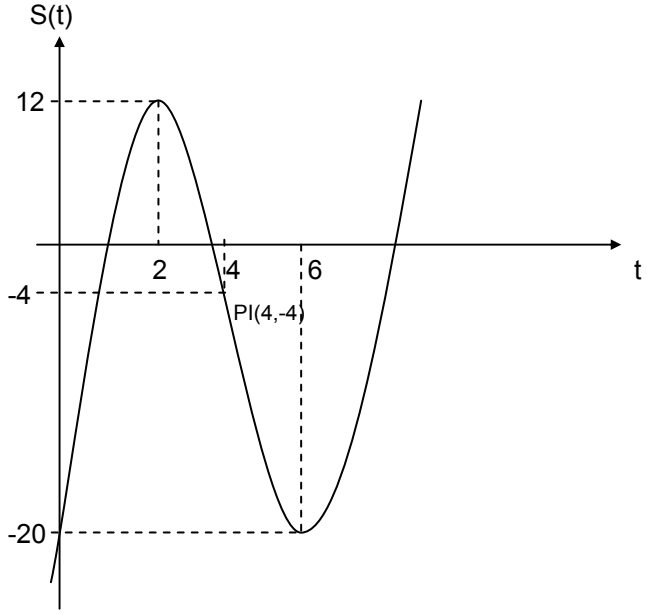
así

$$S(4) = (4)^3 - 12(4)^2 + 36(4) - 20$$

o bien

$$S(4) = -4$$

Por lo que el punto de inflexión se encuentra en PI (4,–4)



Como puedes apreciar, la concavidad de la curva antes del punto de inflexión es negativa y después del punto de inflexión es positiva.

DEFINICIÓN

PUNTO DE INFLEXIÓN. Es un punto sobre la curva f (x), en donde la curva cambia la concavidad.

b) Concavidad y Convexidad

A partir de la segunda derivada de la función del problema anterior,

$$S'' (t) = 6t – 24,$$

Completa la siguiente tabla.

t	2	2.5	3	3.5	4	4.5	5	5.5	6
S''(t)		-9	-6		0	3			12

Como puedes observar, la segunda derivada de la función antes del punto de inflexión, (t = 4), es negativa, lo que quiere decir, que la concavidad de la curva es negativa en ese intervalo ($-\infty < t < 4$). Así también, la segunda derivada de la función después del punto de inflexión, es positiva, lo que quiere decir, que la concavidad de la curva es positiva en ese intervalo ($4 < t < \infty$).

Definiciones

CONCAVIDAD. Se dice que una función es cóncava cuando su concavidad es positiva, es decir, cuando la segunda derivada de la función es positiva.

CONVEXIDAD. Se dice que una función es convexa cuando su concavidad es negativa, es decir, cuando la segunda derivada de la función es negativa

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Para cada una de las siguientes funciones encuentra, utilizando los criterios de la primera y de la segunda derivada:

   Los intervalos en donde la función es creciente.

   Los intervalos en donde la función es decreciente.

   Los puntos extremos (máximos y/o mínimos).

   Los puntos de inflexión.

   Los intervalos en donde la función es cóncava.

   Los intervalos en donde la función es convexa.

   Haz una gráfica aproximada de cada una de las siguientes funciones, sin tabular.

   a) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4x$

   b) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 4x$

   c) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 3x$

   d) $f(x) = (x + 3)(x - 2)$

2. Para cada una de las siguientes funciones encuentra lo mismo que se te pidió en los problemas anteriores.

a) f (x) = x^3 + 4x² – 3x – 2

b) f (x) = $-x^3$ + 9x² – 12x

c) f (x) = 2 x^3 – 6x – 9

d) f (x) = (x + 1) (3 – x)

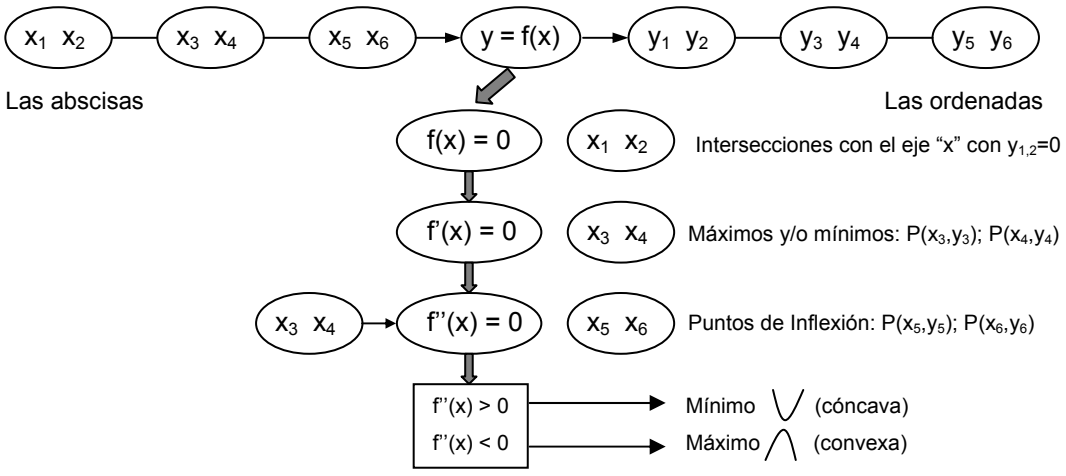
EXPLICACIÓN INTEGRADORA

En este tema has aprendido a:

Analizar la forma en que varían las funciones a través del estudio de sus gráficas y mediante la nueva herramienta que has adquirido llamada 'derivada', la cual puede ayudarte a obtener información más amplia y precisa.

El siguiente diagrama de flujo muestra los pasos que debes seguir para obtener, dada una función f(x), los máximos y mínimos, los puntos de inflexión, las intersecciones con el eje "x" y sus respectivas ordenadas, además de la concavidad o convexidad de la gráfica de la función.
Observa que las "x" representan los valores de entrada, mientras que las "y" representan los valores de salida.

Sigue las flechas.



2.2 ECUACIONES DE LAS RECTAS TANGENTE Y NORMAL

Cuando estudiaste geometría analítica (Matemáticas IV) seguramente te encontraste con el problema de hallar las ecuaciones de las rectas, tangente y normal a una curva en un punto determinado. Pues bien, en esta sección podrás obtener dichas ecuaciones utilizando la derivada de la función*.*

Ejemplo.

Sea la ecuación de una parábola $y = x^2 - x - 6$

Nos interesa encontrar las ecuaciones de las rectas tangente y normal a dicha curva en el punto P(2,–4).

Como la derivada de la función representa la pendiente de la recta tangente a la curva en cualquiera de sus puntos, entonces, empezaremos por obtener dicha derivada.

Así $y' = 2x - 1$

Y como el punto en donde nos interesa obtener las ecuaciones de las rectas tangentes y normal es p(2,–4), que tiene como abscisa el valor de x = 2, entonces el valor de la derivada de la función en x = 2 es

$$f'(2) = 2(2) - 1$$
$$= 4 - 1$$
$$= 3$$

Por tanto, la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto dado es $m = 3$

Debes recordar que las ecuaciones de las rectas tangente y normal son:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Ecuación de la recta tangente

$y - y_1 = -\frac{1}{m}(x - x_1)$ Ecuación de la recta normal

en donde 'm' representa la pendiente de la recta tangente, y los valores x_1 e y_1 representan las coordenadas del punto de tangencia (que en nuestro problema esta dado por el punto p).

De este modo, al sustituir los datos que tenemos en las ecuaciones anteriores, resulta:

a) para la ecuación de la recta tangente

$$y + 4 = 3 (x – 2)$$

ó $$y + 4 = 3x – 6$$

o sea $$y = 3x – 10$$

o bien $$3x – y – 10 = 0$$

b) para la ecuación de la recta normal

$$y + 4 = -\frac{1}{3} (x – 2)$$

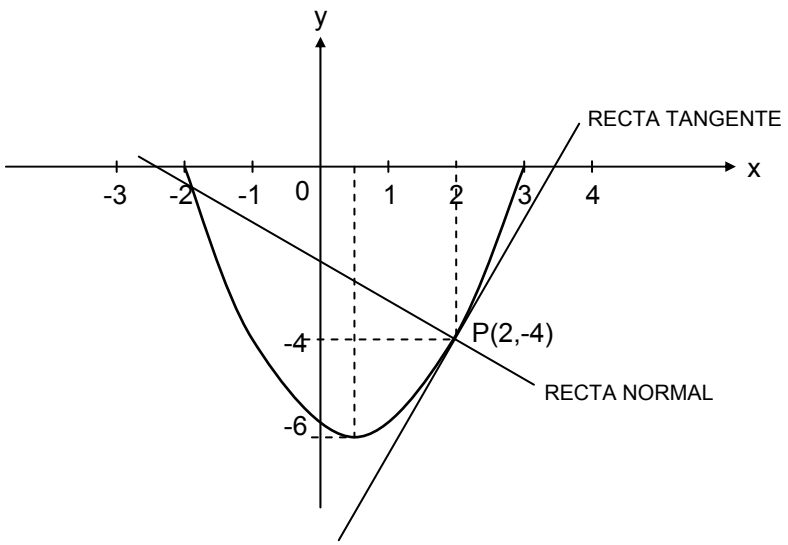
al multiplicar la ecuación anterior por 3, queda.

$$3y + 12 = – (x – 2)$$

o bien $$3y + 12 = –x + 2$$

o también $$x + 3y + 10 = 0$$

La gráfica es como a continuación se muestra



ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

1. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal para cada una de las siguientes funciones y en los puntos que se indican.

   a) $f(x) = x^2 + x - 6$ en $x = 3$

   b) $f(x) = x^2 + 3x - 4$ en $x = -2$

   c) $f(x) = x^3 + 4x^2 - 3x - 2$ en $x = -1$

2. Encuentra las ecuaciones de las rectas tangente y normal para cada una de las siguientes funciones y en los puntos que se indican.

   a) $f(x) = x^2 - 4$ en $x = 0$

   b) $f(x) = x^2 - x - 20$ en $x = -3$

   c) $f(x) = -2x^3 + 2x^2 + 3$ en $x = 1$

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Uno de los problemas que motivó la invención del cálculo fue el problema relativo a la tangente a una curva en un punto dado.

Anteriormente aprendiste que la recta tangente a la gráfica de f(x) en el punto $P(x_1,f(x_1))$ tiene pendiente $m = f'(x_1)$. Con este conocimiento la ecuación de la tangente se obtiene fácilmente, pues conocemos: a) Las coordenadas de un punto $P(x_1,f(x_1))$ y b) la pendiente $m = f'(x_1)$.

Así la ecuación de la recta tangente es: $y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

La normal a la curva en el punto $P(x_1,f(x_1))$ es perpendicular a la tangente, por lo tanto su pendiente es recíproca y de signo contrario, es decir $-\frac{1}{f'(x_1)}$.

Por lo tanto, la ecuación de la recta normal es: $y - f(x_1) = -\frac{1}{f'(x_1)}(x - x_1)$

2.3 PLANTEAMIENTO Y RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN Y RAZÓN DE CAMBIO

Ejemplo.

El director de una determinada empresa editorial ha observado que si fija el precio de un determinado libro $20, vende 10,000 ejemplares. Pero por cada peso que incrementa el precio, las ventas disminuyen en 400 copias. ¿Qué precio deberá fijar el editor a cada libro, de manera que el ingreso para la empresa por la venta de estos libros sea máximo? ¿Cuál es el valor de dicho ingreso?

Planteamiento.

¿Cómo crees que se calculan los ingresos?

Los ingresos se calculan multiplicando el precio de articulo vendidos, así

$$I = (20)\,(10000), \qquad \text{donde} \quad I = \text{ingreso}$$

Supongamos que 'x' representa el numero de pesos en que se incrementa el precio del libro, entonces.

$20 + x$	es el nuevo precio del libro
$400\,x$	es el número de copias que dejan de venderse por cada peso que aumenta el precio
$10{,}000 - 400x$	es el nuevo numero de ejemplares vendidos.

Entonces, la función que representa el ingreso en términos del numero de pesos en que se aumenta el precio del libro, es

$$I(x) = (20 + x)\,(10{,}000 - 400x)$$

Esta función, I(x), recibe el nombre de función objetivo, porque es la función que se requiere optimizar.

Solución

Ahora, se debe aplicar el criterio de la primera derivada; se deriva y se iguala a cero la función resultante.

La derivada de la función I(x), es

$$I'(x) = (1)\,(10{,}000 - 400x) - 400\,(20 + x)$$

o sea $$I'(x) = 10{,}000 - 400x - 8{,}000 - 400x$$

o bien $I'(x) = -800x + 2000$

Al igualar a cero, resulta que $-800x + 2{,}000 = 0$

o bien $-800x = -2000$

o también $$x = \frac{-2000}{-800}$$

y por tanto

x = $ 2.5

Que representa el número de pesos en que se debe incrementar el precio del libro para obtener el máximo ingreso.

De esta manera, al incrementar el precio de venta del libro en $2.5, se obtiene el máximo ingreso. Para calcular el ingreso máximo se sustituye x = 2.5 en la función objetivo, y resulta

$$I(2.5) = (20 + 2.5)\,[10{,}000 - 400\,(2.5)]$$

o

$$I(2.5) = (22.5)\,(10{,}000 - 1000)$$

o bien $I(2.5) = (22.5)\,(9{,}000)$

por tanto $I(2.5) = \$\ 202{,}500.00$

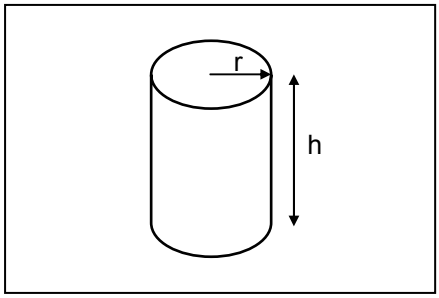
Que representa el máximo ingreso.

Ejemplo.

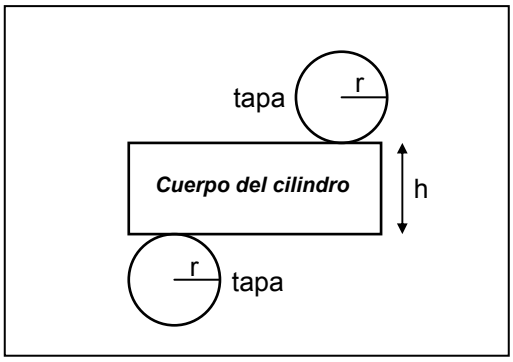
En una fábrica de artículos de fibra de vidrio, se desea construir un recipiente cilíndrico, con tapa, que tenga capacidad de un metro cúbico. ¿Cuáles deben ser las dimensiones de dicho recipiente para que la cantidad de material empleado en su construcción sea mínima?

Planteamiento.

El recipiente tiene la siguiente forma



Pero, si pudiera desenvolverlo quedaría así



Y, el área del recipiente seria la suma del área del cuerpo del cilindro más el área de las dos tapas

$$A = \square + 2 \bigcirc$$

Solución.

Cálculo del área del cuerpo del cilindro:

Como el largo del rectángulo es igual a la longitud de la circunferencia, $c = 2\pi r$, y su altura es 'h', entonces, el área del rectángulo (A = base x altura) queda así

$$A_{\square} = 2 \pi r h$$

Calculo del área de las dos tapas:

Como las tapas tienen forma circular, entonces,

$$A = \pi r^2$$

y por tratarse de dos tapas

$$A = 2\pi r^2$$

así el área total es

$$A = 2\pi r h + 2\pi r^2 \qquad \text{(función objetivo)}$$

Como la función objetivo esta en términos de dos diferentes variables,"r" y "h", es necesario convertir dicha función en términos de una sola variable y así poder derivarla fácilmente.

Como el volumen que se desea en el recipiente es de $1\,m^3$, y el volumen de un cilindro esta dado por la fórmula.

$$V = \pi r^2 h,$$

Entonces,

$$\pi r^2 h = 1$$

o sea

$$h = \frac{1}{\pi r^2} \quad \text{---------- a)}$$

ahora, se sustituye la ecuación a) en la función objetivo y así, dicha función, queda en términos de una sola variable, "r".

Así

$$A(r) = 2\pi r \left(\frac{1}{\pi r^2}\right) + 2\pi r^2$$

o sea

$$A(r) = \frac{2}{r} + 2\pi r^2$$

Al derivar esta última función resulta que

$$A'(r) = \frac{-2}{r^2} + 4\pi r$$

Y, al igualar a cero, queda que

$$\frac{-2}{r^2} + 4\pi r = 0$$

Ahora, para eliminar el denominador, r^2, se multiplica toda la ecuación por "r^2"

$$\left[\frac{-2}{r^2} + 4\pi r = 0 \right] r^2$$

o sea que

$$-2 + 4\pi r^3 = 0$$

ó

$$4\pi r^3 = 2$$

ó bien

$$r^3 = \frac{2}{4\pi}$$

ó también

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}$$

Y como $\pi = 3.1416$, entonces,

$$r = \sqrt[3]{\frac{1}{2(3.1416)}}$$

o sea que

$$\underline{r = 0.542}$$

Y, para calcular "h" se sustituye r = 0.542 en la ecuación a), como se muestra a continuación.

$$h = \frac{1}{\pi (0.542)^2}$$

ó sea

$$h = \frac{1}{(3.1416)(0.542)^2}$$

así que

$$\underline{h = 1.08 \text{ m}}$$

La medida para ocupar la mínima cantidad de material es:

$$r = 0.542 \text{ m} \quad y \quad h = 1.08 \text{ m}$$

¿Cómo puedes estar seguro de que con estas medidas se obtiene un mínimo, y no un máximo?

Se puede aplicar el criterio de la segunda derivada a partir de:

$$A' = \frac{-2}{r^2} + 4\pi r$$

se deriva nuevamente, y entonces,

$$A''(r) = \frac{4}{r^3} + 4\pi$$

Y, como r = 0.542, se sustituye dicho valor en esta última ecuación. De modo que

$$A''(0.542) = \frac{4}{(0.542)^3} + 4\pi$$

y después de resolver las operaciones indicadas, resulta que.

$$A''(0.542) = 37.69$$

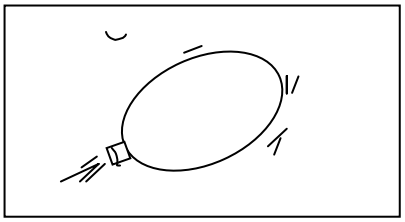
Como el resultado es positivo, entonces, la concavidad de la curva, A´ (r), también es positiva, y el punto en cuestión es un mínimo.

¿Que significado tendría el que la segunda derivada fuera negativa?

Ejemplo.

El gas de un globo esférico se escapa a razón de 1,000 cm^3/min en el mismo instante en que el radio es de 25 cm.

a) ¿Con qué rapidez disminuye el radio?
b) ¿Con qué rapidez disminuye el área de la superficie?



Planteamiento

Como el aire escapa a razón de 1,000 cm^3/min, quiere decir que la razón de cambio del volumen del globo respecto al tiempo es de 1,000.

Así, te das cuenta de que se requiere de la fórmula del volumen de una esfera, que es

$$v = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Al derivar respecto a " t ", resulta que

$$\frac{dv}{dt} = 3(\frac{4}{3})(\pi r^2)(\frac{dr}{dt})$$

en donde dv es la razón de cambio del volumen respecto al tiempo, y dr es la razón de cambio del radio respecto al tiempo, que es precisamente lo que se pide calcular.

Solución

Entonces,

$$\frac{dv}{dt} = 4\pi\ r^2 \frac{dr}{dt}$$

y como, según los datos del problema

$$\frac{dv}{dt} = 1000 \quad y \quad r = 25$$

resulta que

$$1{,}000 = 4\pi\ (25)^2 \frac{dr}{dt}$$

o sea

$$\frac{1000}{4\pi(25)^2} = \frac{dr}{dt}$$

Así,

$$\frac{dr}{dt} = 0.1273 \text{ cm/min.}$$

que es la rapidez con que disminuye el radio.

Para hallar la rapidez con que disminuye el área de la superficie del globo se requiere de la fórmula

$$A = 4\pi r^2$$

Que es el área de la superficie de una esfera.

Y, como se pide $\frac{dA}{dt}$, se deriva la fórmula del área y queda

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r \frac{dr}{dt}$$

además, como el valor de $\frac{dr}{dt}$ ya se había calculado, entonces

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi r(0.1273)$$

y como r = 25, se tiene que

$$\frac{dA}{dt} = 8\pi (25)(0.1273)$$

de modo que

$$\underline{\frac{dA}{dt} = 80\text{cm}^2/\text{min}}$$

Que es la rapidez con que se disminuye el área de la superficie del globo.

Ejemplo.

Para alcanzar una pelota que se encuentra a 12 metros de altura, un delfín sale del agua y se dirige verticalmente hacia arriba con una velocidad de 16 m/s. La posición del delfín h (t) (en metros) sobre la superficie del agua después de "t" segundos esta por dada $h(t) = 16t - 4.9t^2$.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Contesta las siguiente preguntas con base al problema del delfín.

¿Cuál es la velocidad y la aceleración del delfín a los “t” segundos?

¿Cuál es la velocidad y la aceleración del delfín justamente en t = 1 seg.?

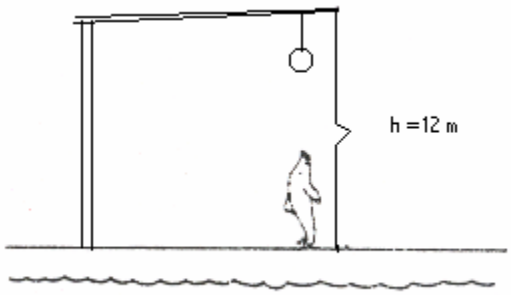
¿Cuál es la altura máxima que alcanza el delfín?

¿Alcanza el delfín la pelota?

¿En que instante toca el delfín la pelota?

¿ En que instante toca el delfín la pelota?

¿Cuánto tiempo dura el salto del delfín?



Para resolver este problema se debe tener presente que si "h (t)" presenta la posición en términos de "t", entonces, h´(t) es la razón de cambio de la posición en términos de tiempo, es decir h´(t) es la velocidad del delfín en términos de ´t´ y h´´(t) h´´ (t) es la aceleración del delfín en términos de ´t´.

En síntesis :

h (t) : representa la posición del delfín.
h´(t) = v(t) : representa la velocidad del delfín.
h´´(t) = v´(t) =a (t) : representa la aceleración del delfín

A partir de

$h(t) = 16t - 4.9t^2$ (m) (posición en un tiempo ´t´)

se tiene que

$h'(t) = v(t) = 16 - 9.8t$ (m/s) (velocidad en un tiempo ´t´)

y también

$h''(t) = a(t) = -9.8$ (m/s^2) (aceleración en un tiempo ´t´)

así que, si t = 1 seg.

$h'(1) = v(1) = 16 - 9.8\ (1)$

y

$\underline{h'(1) = v(1) = 6.2\ m/s}$

que es la velocidad del delfín al cabo del primer segundo, además,

$\underline{h''(1) = v(1) = a(1) = -9.8\ m/s^2.}$

que es la aceleración del delfín sin importar el instante ´t´ en el que sea medida.
¡Es precisamente el valor de la aceleración de la gravedad! ¿Te diste cuenta?

Para calcular la altura máxima, a partir de:

$$h'(t) = 16 - 9.8\,t$$

se iguala a cero, y resulta $16 - 9.8t = 0$

y se despeja 't', así $16 = 9.8\,t$

y $$\frac{16}{9.8} = t$$

por tanto $t = 1.633$ seg.

Que es el tiempo que tarda el delfín en alcanzar la altura máxima.

Al sustituir t = 1.633 en ´h (t)´se obtiene la altura máxima

$$h(1.633) = 16\ (1.633) - 4.9\ (1.633)^2$$

o sea que

$$h\ (1.633\ ) = 13.06\ \text{m.}$$

Se puede apreciar que el delfín sí alcanza la pelota, además como el tiempo de ascenso para el delfín es de t = 1.633 seg. el tiempo que le lleva su descenso es el mismo, 1.633 seg., por lo que el tiempo que dura todo el salto es de 3.266 seg.

Para hallar el instante en que el delfín toca la pelota, se sustituye h = 12 en la función h (t) y resulta que:

$$12 = 16\ t - 4.9\ t^2$$

al igualar a cero la expresión, resulta que

$$4.9t^2 - 16\ t + 12 = 0$$

que es una ecuación de segundo grado, y al resolverla se obtienen los valores de 't.'

t_1 = 2.1 seg.

t_2 = 1.17 seg.

¿Cuál de estos dos valores es el correcto?

¿Qué interpretación les das?

ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

I. Obtén la solución de los siguientes problemas.

1) Encuentra dos números positivos cuya suma sea 100 y su producto sea máximo

2) Encuentra dos números cuya suma sea 50 y tales que la suma de sus cuadrados sea mínima

3) El ingreso mensual por concepto de la venta de 'x' unidades de cierto artículo esta dado por $R(x) = 12x - 0.01x^2$ pesos. Encuentra el número de unidades que deben venderse cada mes con el propósito de maximizar los ingresos. ¿cuál es ese ingreso máximo?

4) En una fábrica de conservas necesitan botes cilíndricos con una capacidad de un litro. Calcula las dimensiones de dicho bote (radio y altura) de manera que en su construcción entre la menor cantidad de material posible.

5) Se requiere construir un rectángulo con un trozo de alambre que tiene una longitud de 1 metro de manera que se forme un rectángulo e la mayor área posible. ¿cuál es deben ser las dimensiones de los lados?

6) Un tanque de aceite que tiene forma de un cilindro circular con un radio de 8 m, se llena constantemente a razón de 10 m^3 /min. ¿Con qué rapidez sube el nivel del aceite?

7) Se quiere construir una caja cerrada que tenga una base cuadrada y una capacidad de 5000 cm^3. si el costo de la base y de la tapa es de $ 6.00 por cada cm^2 y el costo de los lados es de $ 2.00 por cada cm^2. Determina las dimensiones que debe tener la caja para que sea construida con un costo mínimo.

8) Una compañía de bienes raíces es dueña de 180 departamentos que se ocupan en su totalidad cuando la renta es de $ 3,000.00 mensuales. La compañía calcula que por cada $ 100.00 de aumento en la renta se desocupan 5 departamentos. ¿cuál debe ser la renta mensual para que la compañía obtenga el máximo ingreso?

9) Un tanque tiene la forma de un cono invertido. La altura de dicho tanque es de 16 pies y el radio de su base es de 4 pies. Una llave de agua llena el tanque a razón de 2 pies ^{3}/min. ¿qué tan rápido crece el nivel cuando el agua tiene 5 pies de profundidad?

10) Se lanza verticalmente hacia arriba una piedra con una velocidad inicial de 112 m/s. Si se sabe que la ley del movimiento es de $S = 112t – 4.9 t^2$, en donde 'S' es la distancia al punto de partida, calcula:

a) La velocidad y la aceleración en los instantes $t = 3$ y $t = 4$.
b) La máxima altura alcanzada
c) El tiempo que tarda en llegar a una altura de 96 m.
d) La aceleración en cualquier instante

11) Encuentra dos números reales positivos cuya suma sea 40 y su producto sea máximo.

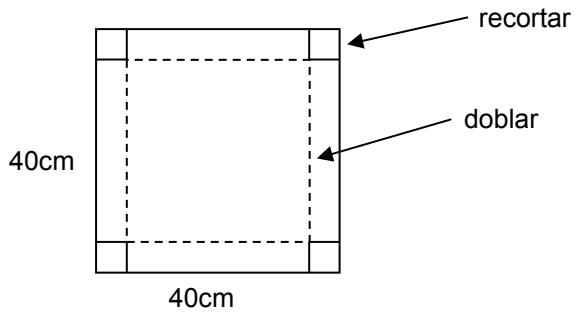
12) Encuentra dos números cuyo producto sea 16 y cuya suma sea mínima

13) De entre todas las latas cilíndricas de hojalata con capacidad de 100 cm^3 ¿cuál es la que requiere menos metal? (Encuentra 'r' y 'h').

14) Si el número de turistas que hacen un recorrido en autobús a una determinada ciudad es de 30, exactamente, la empresa cobra $200 por persona. Por cada persona que se suma a las 30, el costo por persona se reduce en $5. ¿cuál es el número óptimo de turistas que el autobús debe llevar para que la empresa obtenga el máximo beneficio?

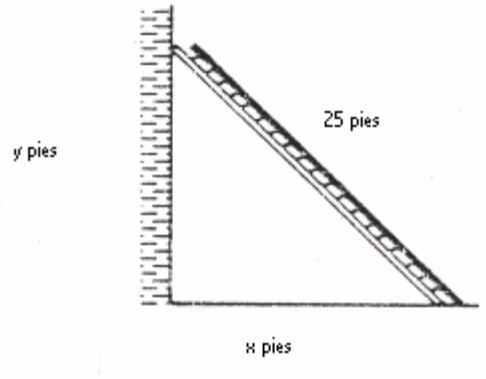
15) Un alambre de 60 cm. De largo se parte en dos pedazos. Con una de las partes formará un círculo y con la otra se formará un triangulo equilátero. ¿cuál debe ser la longitud de cada uno de estos pedazos para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima? ¿y para que sea mínima?

16) De una pieza cuadrada de cartón se va a formar una caja abierta en su parte superior, y para ello se recorta un pequeño cuadrado en cada una de las esquinas y posteriormente se doblan sus bordes. El cartón mide 40 cm. Por cada lado.

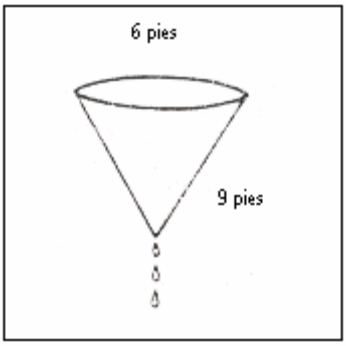


Encuentra las dimensiones de la caja de modo que se obtenga el volumen máximo.

17) Una escalera de 25 pies de largo se apoya contra una pared vertical. Si la base de la escalera se desliza horizontalmente, alejándose de la pared a 3 pies/seg. ¿qué tan rápido se desliza la parte superior de la escalera, cuando la base se encuentra a 15 pies de la pared?



18) El agua escapa por la parte inferior de un depósito cónico a razón de 1 pie^3/min. ¿Conque rapidez varia el nivel del agua cuando su altura sobre el fondo es de 6 pies?



¿A que razón cambia el radio de la superficie del agua en ese instante?

19) Desde un tejado de 112 m de altura, se lanza verticalmente hacia arriba una pelota que, finalmente, regresa al suelo. Si se sabe que el espacio 'S' recorrido desde el tejado es $S = 96t - 16\ t^2$ (m), calcula:

a) La posición de la pelota, su velocidad y el sentido del movimiento en el instante $t = 2$.
b) Su velocidad al llegar al suelo.

EXPLICACIÓN INTEGRADORA

La derivada nos permite resolver toda una gama de problemas de optimización como maximizar ganancias, minimizar la cantidad de material empleado para fabricar un producto y para calcular razones de cambio como velocidad, aceleración, etc.

Para resolver un problema, se necesita:

1. Comprender el problema. En esta fase se identifican los datos, las incógnitas y las condiciones.

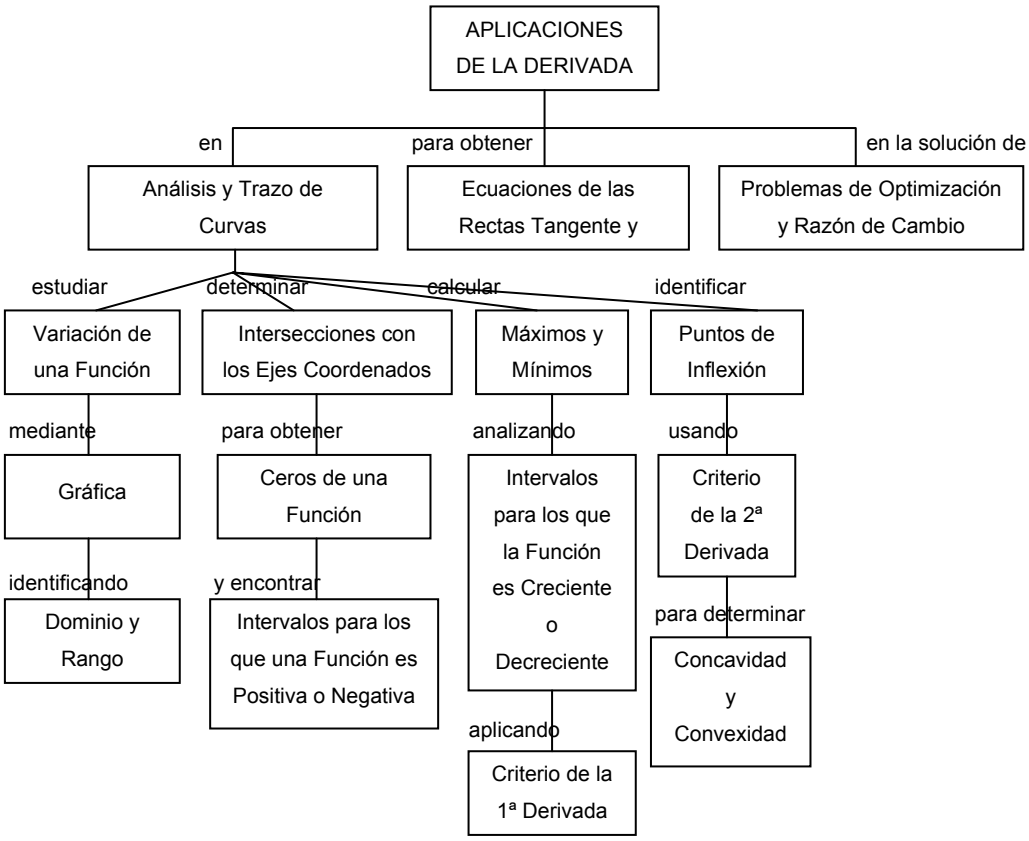
2. Elaborar un plan, para lo cual se determina la relación entre los datos y la incógnita, se formula el modelo matemático y se establecen los pasos a seguir, incluyendo la aplicación de los conceptos del Cálculo Diferencial.

3. Ejecutar el plan.

4. Verificar la solución obtenida.

RECAPITULACIÓN

Has concluido el estudio del capítulo 2 “aplicaciones de la derivada”, analiza el siguiente esquema en donde se muestran los conceptos que se abordaron para ayudarte a organizar los conocimientos que has ido construyendo.



ACTIVIDADES INTEGRALES

Con el objeto de reafirme tus conocimientos, resuelve los siguientes problemas:

1 En un determinado huerto, el agricultor planta manzanos con una densidad de 30 manzanos por acre, y el valor de la cosecha producida por cada árbol es de $100.00.si además se sabe que por cada árbol extra que se plante en un acre el valor de la cosecha disminuye en $3.00, entonces, se podrían plantear las siguientes preguntas:

a) ¿Cuál es el número de árboles que deben plantarse por acre con el objeto de obtener el máximo valor de la cosecha?

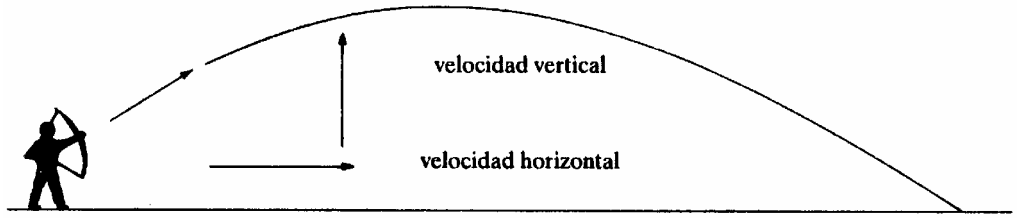
b) ¿Cuál es el valor máximo de la cosecha?

c) ¿Cuál debe ser el intervalo de variación del número de manzanos extra plantados para que el problema tenga sentido?

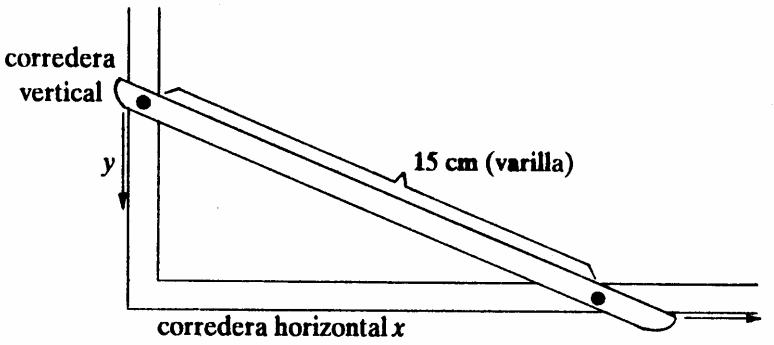
d) ¿Cuál es el intervalo de variación para el valor de la cosecha que es posible en este problema?

2 Un atleta olímpico dispara una flecha con una velocidad vertical de 35m/s. Se sabe que la flecha se encontrará a una altura sobre el suelo de h (t) = $-4.9t^2 + 35t$, "t" segundos después del disparo, entonces, se pregunta lo siguiente:

a) ¿Cuánto tiempo se tarda el proyectil en llegar al suelo?
b) ¿Con qué velocidad vertical llega al suelo la flecha?
c) ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
d) ¿A que velocidad vertical viaja la flecha al cabo de 3, 5 o 7seg. ?
e) ¿Cuál es la aceleración vertical que experimenta la flecha al cabo de 3, 5 o 7seg.?



3 Uno de los extremos de una varilla sé 15 cm. de longitud se encuentra unida en sus extremos a dos correderas, una vertical y otra horizontal.



Si se jala la corredera interior hacia la derecha a razón de 09.3 cm/s. Entonces:

a) ¿Con qué velocidad baja el extremo superior de la varilla cuando su extremo inferior se encuentra alejado de la corredera vertical a una distancia de 4 cm.?
b) ¿Cuándo se moverán con la misma velocidad los dos extremos de la varilla?
c) ¿Cuándo baja el extremo superior de la varilla a razón de 1.2 cm./ seg.?

AUTOEVALUACIÓN

Compara las respuestas que obtuviste en las actividades de consolidación con los valores que enseguida se te muestran,

En caso de que tengas dudas consulta con tu asesor de contenido.

1) a) (30 + 5/3) árboles o bien 32 árboles.

b) $3,008 /acre
c) $0 < x < 33$; x = número de manzanos adicionales
d) $66 < y < 3,008$; y = valor de la cosecha en ($).

2)

a) t = 7.14 seg.
b) h´ (7.14) = –35m/s.
c) h´ (3.57) = 62.5 m.
d) h´ (3) = 5.6m/s.
h´ (5) = 14 m/s.
h´ (7) = –33 m/s.
e) h´´(t) = $-9.8\ m/s^2$

3)

a) dy = –0.25 cm/s.
b) cuando x = y
c) cuando x = 12 cm. e y = 9 cm.