Tema: Máximos y Mínimos. Problemas de optimización. Análisis y Construcción de Gráficos

Preguntas:

1. Hallar los máximos y mínimos de las siguientes funciones en los intervalos indicados.

   a) $f(x)=2^x$ en [-1; 5]
   b) $f(x)=x^2-4x+6$ en [-3; 10]
   c) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$ en [0,01; 100]
   d) $f(x)=\sqrt{5-4x}$ en [-1; 1]
   e) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ en [0; 3]
   f) $f(x)=15x^4-\left(\dfrac{2x-1}{2}\right)^6$ en [0; 1]
   g) $f(x)=(x+1)^{2/3}$ en [0; 2]
   h) $f(x)=x^5-5x^4+20x^3+600$ en [0; 3/2]

2. Construir el gráfico de las siguientes funciones.

   a) $y=3x-x^3$
   b) $y=1+x^2-\dfrac{x^4}{2}$
   c) $y=(x+1)(x-2)^2$
   d) $y=\dfrac{2-x^2}{1+x^4}$
   e) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$
   f) $y=\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$
   g) $y=\dfrac{x^4}{(1+x)^3}$
   h) $y=\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^4$
   i) $y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2-1}}$
   j) $y=\dfrac{x}{(1-x^2)^2}$
   k) $y=\dfrac{(x+1)^3}{(x-1)^2}$
   l) $y=(x-3)\sqrt{x}$
   m) $y=x\sqrt{x^2-4}$
   n) $y=\dfrac{x}{\sqrt{x^2-4}}$
   ñ) $y=\dfrac{x^2-1}{x}$
   o) $y=senx-\cos x$
   p) $y=\dfrac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$
   q) $y=x\ln x$
   r) $y=\dfrac{4x}{x^2-x+1}$
   s) $y=x+senx$
   t) $y=x^{1/5}(x+1)$
   u) $y=x^{10}e^{-x}$
   v) $y=\dfrac{x^3}{x^2-2x-3}$
   w) $y=x^5-5x$
   x) $y=\sqrt[3]{x^3+1}$

Problemas de Optimización.

1. Hallar las dimensiones del rectángulo de mayor área que puede inscribirse en una semicircunferencia de radio a.
2. Un alambre de longitud L ha de cortarse en dos trozos, doblándose uno de ellos para formar un cuadrado y el otro para formar una circunferencia. ¿Cómo debería cortarse el alambre para que la suma de las áreas encerradas por los dos trozos sea máxima? ¿Y para que sea mínima?
3. Una carretera este-oeste y una norte-sur se cortan en un punto O. Una carretera diagonal debe construirse desde un punto A al este de O hasta un punto B al norte de O, pasando por una ciudad C que está ***a*** millas al este y ***b*** millas al norte de O. Hallar el cociente entre OA y OB si el área triangular OAB es lo más pequeña posible.
4. Una librería universitaria puede conseguir del editor el libro "Cálculo en Aplicaciones" a un precio de 4 dólares el ejemplar. La gerente de la librería estima que puede vender 180 ejemplares a un precio de 10 dólares y que cada reducción de 50 centavos en el

precio aumentará las ventas en 30 ejemplares. ¿Cuál debería ser el precio del libro para maximizar el beneficio total de la librería?

5. El suelo de una nueva sucursal bancaria debe tener un área de 3500 pies cuadrados. Debe ser un rectángulo con tres paredes sólidas de ladillo y una pared frontal decorativa de cristal. El cristal cuesta 1,8 veces más por pie lineal que la pared de ladrillo. ¿Qué dimensiones del edificio minimizarán el costo de los materiales para las cuatro paredes?
6. Un rectángulo tiene un área de 32 pulgadas cuadradas. ¿Cuáles son sus dimensiones si la distancia de un vértice al punto medio de un lado no adyacente es la menor posible?
7. En una ventana Norman se fija el perímetro total. Hallar las proporciones de la ventana (i. e. la razón entre la altura de la ventana y su base) que dejará pasar el máximo de luz.
8. Una valla de ***a*** pies de altura está situada a ***b*** pies de un alto edificio en llamas. Hallar la longitud de la escalera más corta que llegará desde el suelo hasta el edificio apoyándose en la parte superior de la valla.
9. La velocidad v de una onda en la superficie de un líquido en calma depende como sigue de su longitud de onda λ: $v=\sqrt{\frac{g}{2\pi}\lambda+\frac{2\pi\sigma}{\delta\lambda}}$, donde las constantes son la aceleración g debida a la gravedad, la tensión superficial σ del líquido y la densidad δ del líquido. Hallar la velocidad máxima de una onda y la longitud de onda correspondiente.
10. La iluminación sobre una superficie plana proporcionada por una fuente de luz es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia a la fuente y directamente proporcional al seno del ángulo de incidencia. ¿A qué altura debería colocarse una luz sobre un poste para maximizar la iluminación de un suelo a 50 pies del poste?
11. Hallar el área máxima de un rectángulo que pueda circunscribirse a un rectángulo dado con base B y altura H.
12. Un tanque cilíndrico sin tapa superior tiene un volumen especificado. El material usado para la base cuesta el triple del costo del material usado para la parte lateral. Hallar la relación entre la altura y el diámetro de la base para que el costo total sea mínimo.
13. Un silo tiene paredes cilíndricas, un suelo circular plano y una parte superior semiesférica. Para un volumen dado, hallar la relación entre la altura total y el diámetro de la base que hace mínima la superficie total.
14. Debe construirse un campo de juego con la forma de un rectángulo junto con una parte semicircular en cada extremo, y el perímetro debe ser una pista de carreras de longitud especificada. Hallar las proporciones del campo que darán a la parte rectangular un área lo más grande posible.
15. Se circunscribe a una semiesfera dada un cono con el menor volumen posible. ¿Cuál es la relación entre su altura y el diámetro de su base?
16. Si el volumen de un cono es fijo, ¿qué forma (relación entre la altura y el diámetro de la base) minimiza su área total?
17. Una pirámide tiene base cuadrada y cuatro caras triangulares iguales. Si se nos da el área total de la base y las caras laterales, probar que el volumen es máximo cuando la altura es $\sqrt{2}$ veces el lado de la base.
18. Un papel de filtro circular de radio r debe convertirse en un filtro cónico curvando un sector circular. Hallar la relación entre el radio y la profundidad para el filtro de mayor capacidad.
19. El eje x es la orilla sur de un lago que contiene una pequeña isla en el punto (a; b) del primer cuadrante. Una mujer situada en el origen puede correr ***r*** metros por segundo a lo largo de la orilla y puede nadar ***s*** metros por segundo, siendo r > s. Si quiere alcanzar la isla lo más rápidamente posible, ¿cuánto debería correr antes de comenzar a nadar?

Bibliografía Complementaria.

Larson /Hostetler/Edwards. Càlculo. Volumen 1
Robert T Smith. Cálculo. Volumen 1
George F. Simmons. Càlculo y Geometría Analítica.
Demidovich B.P. Manual de ejercicios y problemas de Análisis Matemático.