Tema: Derivación Implícita.
Problemas de Razones de Cambio

1. Escribir las ecuaciones de las rectas tangente y normal en los puntos indicados.
   a) $x^2 + 4y^2 = 8$ en (2;1) b) $x^3 y - 4\sqrt{x} = x^2 y$ en (2; $\sqrt{2}$)
   c) $y - 3x^2 y = \cos x$ en (0;1) d) $y^2 + 2xy + 4 = 0$ en (-2;2)

2. Hallar y'(x) por derivación implícita, sabiendo que $x^2 y - 2y = 4$.
   A la vista de la ecuación, ¿por qué cabe esperar tangentes verticales en $x = \pm\sqrt{2}$ y horizontal en y = 0? Probar que no hay puntos para esos valores.

3. Una honda gira contrario a las agujas del reloj, sobre la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$, y suelta la piedra en el punto (2,9; 0,77). Si la piedra recorre 300 pies, ¿dónde caerá? [Sugerencia: Usar la ecuación de la tangente y después…].

4. Localizar tangentes verticales y horizontales.
   a) $x^2 + y^3 - 3y = 4$ b) $xy^2 - 2y = 2$

5. Hallar la segunda derivada y''(x).
   a) $x^2 + y^2 = 4$ b) $x^2 + y^3 - 2y = 3$

<u>Problemas.</u>

6. Una piedra que se deja caer en un estanque produce una serie de ondas concéntricas. Si el radio r de la onda exterior aumenta constantemente a la tasa de 6 pies/s, hallar la tasa a la que aumenta el área del agua afectada: a) cuando r = 10 pies b) cuando r = 20 pies.

7. Una gran bola de nieve esférica se está fundiendo a la tasa de 2π pies cúbicos por hora. En el momento que tiene 30 pulgadas de diámetro, determinar a) con qué rapidez está cambiando el radio, y b) con qué rapidez está cambiando el área.

8. Se está derramando arena en un montón cónico a la tasa constante de 50 pies cúbicos por minuto. Las fuerzas de roce en la arena son tales que la altura del montón es siempre igual al radio de su base. ¿Con qué rapidez está aumentando la altura del montón cuando la arena tiene 5 pies de profundidad?

9. Una muchacha de 5 pies de altura está corriendo a una velocidad de 12 pies/s y pasa bajo un farol que tiene 20 pies de altura sobre el suelo. Hallar con qué rapidez se mueve el extremo de su sombra cuando está (a) 20 pies más allá del farol, y (b) 50 pies más allá del farol.

10. Una luz está en lo alto de un poste de 80 pies de altura. Se deja caer una bola desde la misma altura desde un punto 20 pies más allá de la luz. Hallar con qué rapidez se mueve a lo largo del suelo la sombra de la bola (a) 1 segundo más tarde, (b) 2 segundos más tarde.
    (Suponemos que la bola cae $s = 16t^2$ pies en t segundos.)

11. Una mujer sube un cubo de cemento a un andamio a 40 pies sobre su cabeza por medio de una cuerda de 80 pies de largo que pasa sobre una polea en el andamio. Si ella sujeta firmemente su extremo de la cuerda al nivel de la cabeza y se aleja a 5 pies/s, ¿con qué rapidez está subiendo el cubo cuando ella está a 30 pies del punto situado directamente bajo la polea?

12. Un muchacho está volando una cometa a una altura de 80 pies, y el viento está soplando sobre la cometa horizontalmente alejándola del muchacho a la velocidad de 20 pies/s. ¿A qué velocidad está el muchacho soltando cuerda cuando la cometa está a 100 pies de él?

13. Un bote está siendo acercado a un muelle por medio de una soga con un extremo atado a la proa del bote y el otro extremo pasando por una anilla sujeta al muelle en un punto 5 pies más elevado que la proa del bote. Si está tirando de la soga a la tasa de 4 pies/s, ¿con qué rapidez se está moviendo el bote a través del agua cuando están fuera 13 pies de soga?

14. Un recipiente tiene 10 pies de largo y tiene una sección transversal con la que forma un triángulo equilátero de 2 pies de lado. Si se está introduciendo agua a la tasa de 20 pies cúbicos por minuto, ¿con qué rapidez está subiendo el nivel del agua cuando tiene 1 pie de profundidad?

15. Un meteorito esférico entra en la atmósfera de la tierra y se va fundiendo a una tasa proporcional a su superficie. Probar que su radio disminuye a una tasa constante.

16. Una escalera de 20 pies de longitud está inclinada sobre una pared de 12 pies de altura, con su parte superior proyectándose por encima de la pared. Su pie se está alejando de la pared a la tasa constante de 5 pies/min. Hallar con qué rapidez está acercándose al suelo la pared superior de la escalera (a) cuando 5 pies de la escalera se proyectan por encima de la pared; (b) cuando la parte superior de la escalera alcanza la parte superior de la pared.

17. Se está derramando agua sobre un recipiente semiesférico de 3 pulgadas de radio a la tasa de 1 pulgada cúbica por segundo. ¿Con qué rapidez está subiendo el nivel del agua cuando el agua tiene 1 pulgada de profundidad?

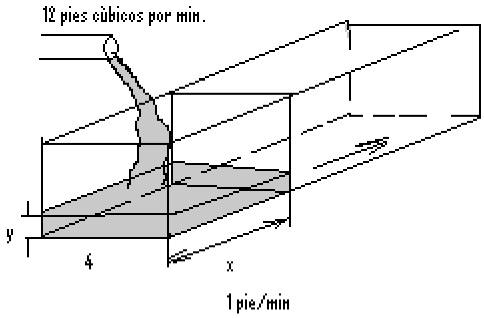
18. En el problema anterior, suponer que el recipiente contiene una bola de plomo de 2 pulgadas de diámetro, y hallar con qué rapidez está subiendo el nivel de agua cuando la bola cuando la bola está sumergida en su mitad.

19. Supongamos que una bola de nieve se funde de tal modo que su volumen disminuye a una tasa proporcional a su superficie. Si se después de 2 horas se ha fundido la mitad de la bola de nieve original, ¿cuánto tiempo tardará en desaparecer completamente?

20. Dos aviones están volando hacia el oeste en trayectorias paralelas separadas 9 millas entre sí. Uno vuela a 425 mph y el otro a 500 mph. ¿Con qué rapidez está decreciendo la distancia entre los aviones cuando el avión más lento está 12 millas más lejos hacia el oeste que el más rápido?

21. Un tanque cónico con su vértice hacia abajo tiene 8 pies de altura y 4 pies de diámetro en la parte superior está lleno de agua, pero el agua se está escapando por un agujero situado en el fondo a una tasa de 1 pie cúbico por segundo. Hallar la tasa a la que está cayendo el nivel del agua cuando el tanque ya se ha vaciado 7/8.

22. Un largo tanque rectangular tiene un panel deslizante que lo divide en dos tanques ajustables de 4 pies de anchura. Se bombea agua al compartimiento izquierdo a una tasa de 12 pies cúbicos por minuto. Al mismo tiempo el panel se está moviendo hacia la derecha a una tasa de 1 pie por minuto En cada una de las siguientes situaciones determinar si el nivel de agua está subiendo o bajando, y con qué rapidez:



(a) el compartimiento izquierdo contiene 144pies cúbicos de agua y tiene 9 pies de longitud;
(b) el compartimiento izquierdo contiene 144 pies cúbicos de agua y tiene 18 pies de largo.

23. Una cuerda de radio 1/10 pulgadas se está enrollando para formar una bola a una tasa de 32 pulgadas por segundo. Si se supone que la bola permanece esférica y consta enteramente de cuerda sin espacios vacíos, hallar la tasa a la que está creciendo su radio cuando el radio es de 2 pulgadas.

24. Se está desenrollando hilo a una tasa de a pulgadas por segundo de una bobina con un radio de r pulgadas. La parte desenrollada del hilo tiene longitud x pulgadas y está tensada formando un segmento PT tangente a la bobina en el punto T. Hallar la tasa de aumento de la distancia y desde el eje de la bobina al punto P del final del hilo.

25. Los meteorólogos están interesados en la expansión o compresión adiabáticas de grandes masas de aire, en las que las temperaturas pueden cambiar pero no se añade ni se elimina calor. La ley adiabática de los gases para el aire es $pV^{1,4}$ = C, donde p es la presión, V es el volumen y C es una constante. El volumen en una cierta cámara de aire aislada está decreciendo a una tasa de 1 pie cúbico por minuto. Hallar con qué rapidez está creciendo la presión en un instante en que la presión es 65 libras por pulgada cuadrada y el volumen 13 pies cúbicos.

26. Si un cohete pesa 1000 libras sobre la superficie de la tierra, entonces pesa $W = \dfrac{1000}{(1 + r/4000)^2}$ libras cuando está r millas por encima de la superficie de la Tierra. Si el cohete se está elevando a una tasa de 1,25 millas por minuto, ¿con qué rapidez está perdiendo peso cuando su altitud es de 1000 millas?

27. Un punto se mueve a lo largo de la parábola $x^2 = 4py$ de tal manera que su proyección sobre el eje x tiene velocidad constante. Probar que su proyección sobre el eje y tiene aceleración constante.

28. Dos puntos Ay B se están moviendo a lo largo del eje x y del eje y, respectivamente, de manera que la distancia perpendicular k del origen O al segmento AB permanece constante. Si A se aleja de O a una tasa de 4k unidades por minuto, hallar con qué rapidez está cambiando OB, y si está creciendo o decreciendo, en el momento en que OA =3k.

29. Un lado de un rectángulo está creciendo a una tasa de 7 pulgadas por minuto y el otro lado está decreciendo a una tasa de 5 pulgadas por minuto. En un cierto momento las longitudes de estos dos lados son 10 pulgadas y 7 pulgadas, respectivamente. ¿Está el área del rectángulo creciendo o decreciendo en ese momento? ¿Con qué rapidez?

30. Dos círculos concéntricos se están expandiendo. En un cierto momento, que designamos por t = 0, el radio interior es de 2 pies y el radio exterior es de 10 pies; y para t > 0, estos radios están aumentando a unas tasas respectivas de 4 pies por minuto y de 3 pies por minuto. Si A es el área entre los dos círculos, ¿cuándo tendrá A su valor máximo?

Bibliografía Complementaria.

Larson /Hostetler/Edwards. Càlculo. Volumen 1

Robert T Smith. Cálculo. Volumen 1

George F. Simmons. Càlculo y Geometría Analítica.