RAZON DE CAMBIO (con respuestas aproximadas)

FAVOR DE REPORTAR CUALQUIER ERROR A: **santiago@math.uprm.edu**

1. Al estudiar la población mundial entre los años 1950 y 2000, se encuentra que la población mundial aproximadamente satisface la función:

$$\boxed{P(t) = 2.5565e^{0.0173514t}, \quad t \geq 0},$$

en donde la variable t representa años desde el 1950 (o sea, $t = 0$ en el 1950, $t = 50$ en el 2000, $t = 100$ en el 2050) y la variable P representa población mundial en miles de millones (o sea, $P = 5$ significa 5,000,000,000 personas). Usar esta función para calcular lo siguiente:

a. La población mundial en los años 1950, 2000 y 2050.

b. ¿En qué año llega a 10 mil millones la población mundial?

c. La razón de crecimiento de la población mundial como función de tiempo.

d. La razón de crecimiento de la población mundial en los años 1950, 2000, 2050.

e. ¿En qué año llega a 75 millones el crecimiento annual de la población mundial?

f. ¿A qué valor se acerca la población cuando $t \to \infty$?

SOLUCION

a. $P(0) = 2.5565e^{0.0173514(0)} = 2.5565 \rightarrow 2,556,500,000$ personas en el año 1950.

$P(50) = 2.5565e^{0.0173514(50)} = 6.08733 \rightarrow 6,087,330,000$ personas en el año 2000.

$P(100) = 2.5565e^{0.0173514(100)} = 14.4946 \rightarrow 14,494,600,000$ personas en el año 2050.

b. Se resuelve la ecuación: $P(t) = 10 \Rightarrow 2.5565e^{0.0173514t} = 10 \Rightarrow t \approx 78.6$, que corresponde al año 2028.

c. Razón de crecimiento: DERIVADA.

$P'(t) = 2.5565e^{0.0173514t}(0.0173514) \approx 0.0443589e^{0.0173514t}$

$\boxed{P'(t) \approx 0.0443589e^{0.0173514t}}$

d. $P'(0) \approx 0.0443589e^{0.0173514(0)} \approx 0.0443589 \rightarrow 44{,}358{,}900$ personas por año en el 1950.

$P'(50) \approx 0.0443589e^{0.0173514(50)} \approx 0.105624 \rightarrow 105{,}624{,}000$ personas por año en el 2000.

$P'(100) \approx 0.0443589e^{0.0173514(100)} \approx 0.251502 \rightarrow 251{,}502{,}000$ personas por año en el 2050.

e. Como 75 millones = 0.075 mil millones, se resuelve la ecuación
$P'(t) = 0.075 \Rightarrow 0.0443589e^{0.0173514t} = 0.075 \Rightarrow t \approx 30.3$, que corresponde al año 1980.

f. $\lim_{t\to\infty} P(t) = \lim_{t\to\infty} 2.5565e^{0.0173514t} = \infty$. En este modelo, la población sigue creciendo hacia el infinito.

2. Un modelo más sofisticado que el anterior para la población mundial es dado por esta función:

$$\boxed{P(t)=\frac{11.1085}{1+3.34516e^{-0.0279592t}},\quad t\geq 0}$$

Repetir los cómputos anteriores con esta función.

SOLUCION

a. $P(0)\approx\dfrac{11.1085}{1+3.34516e^{-0.0279592(0)}}\approx 2.55652\ \rightarrow\ 2{,}556{,}520{,}000$ personas en el año 1950.

$P(50)\approx\dfrac{11.1085}{1+3.34516e^{-0.0279592(50)}}\approx 6.08155\ \rightarrow\ 6{,}081{,}550{,}000$ personas en el año 2000.

$P(100)\approx\dfrac{11.1085}{1+3.34516e^{-0.0279592(100)}}\approx 9.22441\ \rightarrow\ 9{,}224{,}410{,}000$ personas en el año 2050.

b. Se resuelve la ecuación: $P(t)=10\ \Rightarrow\ t\approx 121.9$, que corresponde al año 2071, casi 2072.

c. Razón de crecimiento: DERIVADA

$$P(t)=\frac{11.1085}{1+3.34516e^{-0.0279592t}}$$

$$P(t)=11.1085\left(1+3.34516e^{-0.0279592t}\right)^{-1}$$

$$P'(t)=11.1085\cdot(-1)\left(1+3.34516e^{-0.0279592t}\right)^{-2}\left(3.34516e^{-0.0279592t}(-0.0279592)\right)$$

$$\boxed{P'(t)=\frac{1.03896e^{-0.0279592t}}{\left(1+3.34516e^{-0.0279592t}\right)^{2}}}$$

d. $P'(0)=\dfrac{1.03896e^{-0.0279592(0)}}{\left(1+3.34516e^{-0.0279592(0)}\right)^{2}}\approx 0.0550282\ \rightarrow 55{,}028{,}200$ personas por año en el 1950.

$P'(50)=\dfrac{1.03896e^{-0.0279592(50)}}{\left(1+3.34516e^{-0.0279592(50)}\right)^{2}}\approx 0.0769464\ \rightarrow 76{,}946{,}400$ personas por año en el 2000.

$P'(100)=\dfrac{1.03896e^{-0.0279592(100)}}{\left(1+3.34516e^{-0.0279592(100)}\right)^{2}}\approx 0.0437432\ \rightarrow 43{,}743{,}200$ personas por año en el 2050.

e. Como 75 millones = 0.075 mil millones, se resuelve la ecuación $P'(t)=0.075\ \Rightarrow\ t\approx 29.8\ y\ t\approx 56.5$, que corresponden a los años 1979 y 2006.

f. $\lim\limits_{t\to\infty}P(t)=\lim\limits_{t\to\infty}\left(\dfrac{11.1085}{1+3.34516e^{-0.0279592t}}\right)=\dfrac{11.1085}{1+3.34516(0)}=11.1085\ \rightarrow\ 11{,}108{,}500{,}000$. En este modelo, la población no va al infinito, crece hacia un límite de $11{,}108{,}500{,}000$ personas.

3. La masa (en miligramos) de una muestra de una sustancia radioactiva después de t años es dada aproximadamente por la función:

$$\boxed{M(t) = 10e^{-0.0154033t}, \quad t \geq 0}$$

a. Hallar la masa inicial.
b. Hallar la vida-media de la sustancia.
c. Hallar la masa después de 250 años.
d. Expresar la razón de cambio de la masa como función de tiempo
e. ¿Cuán rápido está disminuyendo la masa inicialmente?
f. ¿Cuán rápido está disminuyendo la masa después de una vida-media?
g. ¿Cuán rápido está disminuyendo la masa después de 250 años?

SOLUCION

a. $M(0) = 10e^{-0.0154033(0)} = 10$ miligramos
b. Se resuelve la ecuación $M(t) = 0.5M(0) \quad \Rightarrow \quad t = 45$ años
c. $M(250) = 10e^{-0.0154033(250)} \approx 0.212622$ miligramos
d. $M'(t) = 10e^{-0.0154033t}(-0.0154033) \approx -0.154033e^{-0.0154033t}$
e. $M'(0) \approx -0.154033e^{-0.0154033(0)} \approx -0.154033$ miligramos/año
f. $M'(45) \approx -0.154033e^{-0.0154033(45)} \approx -0.0770164$ miligramos/año
g. $M'(250) \approx -0.154033e^{-0.0154033(250)} \approx -0.00327508$ miligramos/año

4. Se hierve agua en recipiente de cobre (llega a $100^\circ C$) y se pone a enfriar en un cuarto en donde la temperatura es $21^\circ C$. Se encuentra que la temperatura del agua en $^\circ C$ después de t minutos es dada por la función aproximada:

$$\boxed{T(t) = 21 + 79e^{-0.073t}}$$

a. Hallar la temperatura del agua después de 10 minutos.
b. Hallar la temperatura del agua después de 30 minutos.
c. Expresar la razón de cambio de temperatura como función de tiempo.
d. ¿Cuán rápido está disminuyendo la temperatura inicialmente?
e. ¿Cuán rápido está disminuyendo la temperatura después de 10 minutos?
f. ¿Cuán rápido está disminuyendo la temperatura después de 30 minutos?

SOLUCION

a. $T(10) = 21 + 79e^{-0.073(10)} \approx 59.07^\circ C$
b. $T(30) = 21 + 79e^{-0.073(30)} \approx 29.84^\circ C$
c. $T'(t) = -5.767e^{-0.073t}$
d. $T'(0) = -5.767e^{-0.073(0)} \approx -5.77^\circ C/\min$
e. $T'(10) = -5.767e^{-0.073(10)} \approx -2.78^\circ C/\min$
f. $T'(30) = -5.767e^{-0.073(30)} \approx -0.65^\circ C/\min$

5. Se está disolviendo sal en un tanque de agua. La cantidad de sal (en kilogramos) en el tanque después de t minutos es dada por la función aproximada:

$$\boxed{S(t) = 150 - 130e^{-t/200}, \quad t \geq 0}$$

a. Hallar la cantidad de sal en el tanque inicialmente.
b. Hallar la cantidad de sal en el tanque después de 2 horas.
c. Hallar la cantidad de sal en el tanque después de 4 horas.
d. Expresar la razón de cambio de la cantidad de sal en el tanque como función de tiempo.
e. ¿Cuán rápido está disminuyendo la cantidad de sal en el tanque inicialmente?
f. ¿Cuán rápido está disminuyendo la cantidad de sal en el tanque después de 2 horas?
g. ¿Cuán rápido está disminuyendo la cantidad de sal en el tanque después de 4 horas?

SOLUCION Notar que 2 horas = 120 minutos, 4 horas = 240 minutos, t está en minutos.

a. $S(0) = 150 - 130e^{0} = 20\ kg$
b. $S(120) = 150 - 130e^{-120/200} \approx 78.7\ kg$
c. $S(240) = 150 - 130e^{-24/200} \approx 110.8\ kg$
d. $S'(t) = -0.65e^{-t/200}$
e. $S'(0) = -0.65e^{-0/200} = -0.65\ \text{kg}/\text{min}$
f. $S'(120) = -0.65e^{-120/200} = -0.36\ \text{kg}/\text{min}$
g. $S'(240) = -0.65e^{-240/200} = -0.196\ \text{kg}/\text{min}$