# CAPÍTULO 1

# LA FUNCIÓN DERIVADA

## 1.1 LA DERIVADA

En el fascículo anterior utilizaste el concepto de la razón de cambio a través de problemas o situaciones de la vida real e ilustraste gráficamente $h \to 0$ o, dando una interpretación de la razón de cambio.

Todo lo anterior es la base para el estudio de la derivada a través de la discusión de un problema de la vida real. Y a partir del concepto de la DERIVADA, aprenderás las técnicas para derivar funciones y aplicar estos conocimientos en la construcción de gráficas y solución de problemas.

Analiza el siguiente problema:

Un móvil se desplaza de acuerdo a la función $f(t)=3t^2 - 2t + 1$, Ricardo observa este desplazamiento y le pregunta a Oscar, ¿Cómo se puede determinar la velocidad instantánea o tangencial de dicho móvil, después de que transcurren 3 seg. desde el inicio el movimiento? Oscar respondió; ¡no lo se!, tal vez aplicando conceptos de física. Ricardo le contestó, para saber con exactitud la velocidad instantánea aplicaré mis conocimientos de razón de cambio promedio, razón de cambio instantánea, limites y continuidad; Oscar replicó ¡eso es imposible!.

¿Qué harías para resolver el problema?

Reflexiona y después analiza la solución que te presentamos

## ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Con base al problema del móvil, contesta las siguientes preguntas.

a) ¿Sabes que tipo de función es?

______________________________________________

b) ¿Es una función continua o discontinua?

______________________________________________

c) ¿Por qué es continua o discontinua?

______________________________________________

d) ¿Qué entiendes por velocidad instantánea?

______________________________________________

e) ¿Cuál sería su razón de cambio de la velocidad en el móvil?

______________________________________________

f) ¿Cuál es la velocidad de en los tres segundos que transcurren?

______________________________________________

g) ¿Puedes resolverlo empleando la función derivada a través de la razón de cambio como límite?

______________________________________________

¿Aún no puedes resolver el problema anterior?

Sigue analizando la información que te presentamos, ésta te dará más elementos.

Una bola sube verticalmente alcanzando una altura S $=14t - 4.9t^2$ m, en t segundos después de lanzada. Halla la razón de incremento (Cambio) de altura de la bola en m/s al tiempo $t_1$

Analiza la solución: digamos que la bola esta a una altura $S_1$ al tiempo $t_1$ y $S_2$ a $t_2$.

El incremento promedio de la elevación de la bola durante el intervalo $t_1 < t < t_2$ es,

$$\boxed{\frac{\text{Incremento de altura}}{\text{Tiempo transcurrido}} = \frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1}}$$

Geométricamente esta magnitud esta representada por la pendiente de la Secante a través de los puntos $(t_1, S_1)$ y $(t_2, S_2)$ del diagrama altura tiempo.

Si $t_2 - t_1$ es pequeño, $S_2 - S_1/\ t_2 - t_1$ representa aproximadamente la velocidad de ascenso de la bola en cualquier instante del intervalo.

Para calcular la relación precisa del incremento de altura al tiempo $t_1$ hacemos que $t_1 - t_2 \to 0$. Así,

$$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \text{Pendiente de la Secante}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \text{Velocidad promedio de ascenso}$$

$$\frac{S_2 - S_1}{t_2 - t_1} = \frac{14t_2 - 4.9t_2^2 - 14t_1 + 4.9t_1^2}{t_2 - t_1} = 14\frac{t_2 - t_1}{t_2 - t_1} - 4.9\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = 14 - 4.9(t_2 + t_1)$$

Al aproximarse $t_2$ a $t_1$, en el intervalo $t_2 - t_1$, entonces $t_2 + t_1$ tiende a $2t_1$. Por lo tanto la pendiente $S_2 - S_1/\ t_2 - t_1$ de la secante se convierte en la pendiente de la tangente y de la curva. Es decir:

$$\lim_{h \to 0} = \lim_{t_2 \to t_1} [14 - 4.9(t_2 + t_1)] = 14 - 9.8t$$

La velocidad de ascenso v a los $t_1$ segundos es

$V = 14 – 9.8\,t_1$ m/seg.

Nota: Que la razón de cambio consta de dos términos separados. El término 14 es la razón de cambio de 14t y -9.8t es la razón de cambio de $–4.9t^2$ al tiempo $t_1$.

| |
|---|
| La velocidad o razón de cambio instantánea de elevación con relación al tiempo en el instante se representa gráficamente por la pendiente de la curva en $t = t_1$. |

## ACTIVIDAD DE REGULACIÓN

Con base al problema de la bola, contesta las siguientes preguntas.

¿Cuándo es cero la velocidad?

______________________________________________

¿Cuándo esta, la bola a mayor altura?

______________________________________________

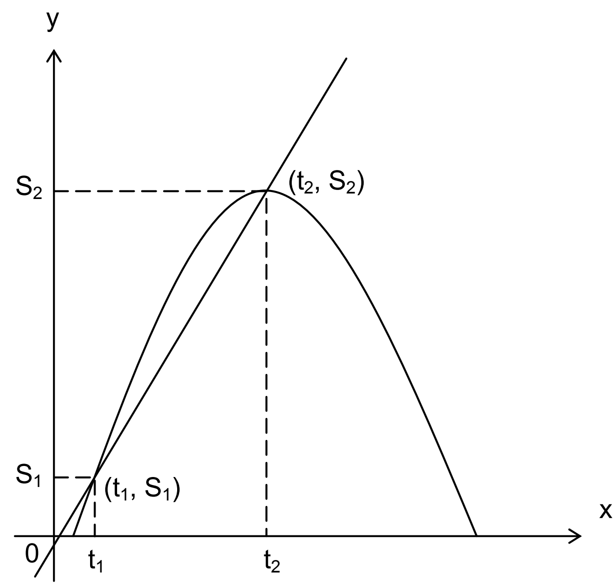
¿A qué velocidad vuelve la pelota al piso?

______________________________________________

### 1.1.1 CONCEPTO DE DERIVADA

Precisamente como dy / dx es la razón de cambio de “y” con respecto a “x”, entonces podemos concluir que:

Velocidad v =ds / dt = $\lim_{t_2 - t_1 \to 0} S_s - S_1 / t_2 - t_{11}$




Gráfica No.1

¿Has aclarado algunas dudas?

Continúa el estudio y analiza el siguiente problema.

La posición de una partícula suspendida en el espacio tiene como ecuación $f(x) = x^3 - 4x - 5$. Determina la pendiente (m) y la ecuación de la recta tangente a la curva en el punto cuya abscisa es igual a 2

Solución:

a) De la derivada como límite, que es la razón de cambio de la función, en la pendiente que une los puntos (x , f (x) ).

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$f(x) = x^3 - 4x - 5$$

$$f(x+h) = (x+h)^3 - 4(x+h) - 5$$

$$f(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4x - 4h - 5$$

$$f(x) = \lim_{h \to 0} = \frac{f(x+h) = x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4x - 4h - 5 - (x^3 - 4x - 5)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} = \frac{3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 4h}{h} \quad = \lim_{h \to 0} = \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2 - 4)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} = 3x^2 + 3xh + h^2 - 4 \;=\; 3x^2 + 3x(0) - 4$$

La razón de cambio para la función es la expresión f'(x)= $3x^2 - 4$ , donde:

La razón de cambio para $x^3 = 3x^2$
La razón de cambio para –4x = –4

Siendo la derivada f'(x) = $3x^2 - 4$ y el valor de la pendiente (m); si f ' (x) = m, entonces:

m = $3x^2 - 4$ para x = 2

m = $3(2)^2 - 4$ = 3 (4) –4 = 12 – 4 = 8 ∴ m = 8u.

La ecuación de la recta tangente a la curva f (x) = $x^3 - 4x - 5$ en x = 2.

Si x = 2, f (x) = $(2)^3 - 4(2) - 5$ = 8 – 8 – 5 = –5.

El punto de tangencia es $P_1(2,–5)$ y m = 8u es la pendiente de la recta tangente. Por lo tanto la ecuación tiene la forma:

$y - y_1 = m(x - x_1)$

y – (–5) = 8 (x – 2)

y + 5 = 8x – 16

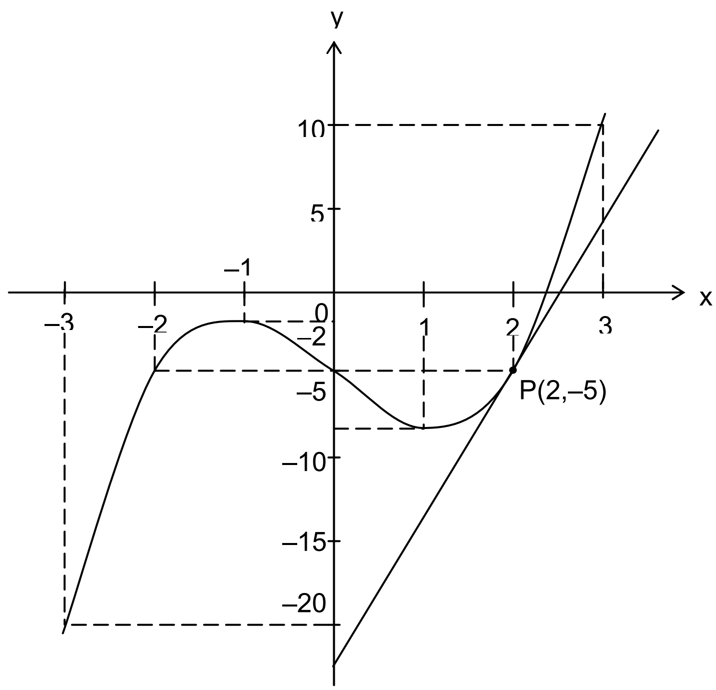
y = 8x – 16 – 5

y = 8x – 21 → ecuación de la recta tangente en donde 8 es la pendiente
y la ordenada al origen es –2.

Graficando $f(x) = x^3 - 4x - 5$ con base a la tabla siguiente:

| x | –3 | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f (x) | –20 | –5 | –2 | –5 | –8 | –5 | –10 |

Podemos trazar la tangente a la gráfica en P(2,–5), tomando en cuenta que corta al eje "y" en (0,–2) y su pendiente es $m = \frac{8}{1}$




Gráfica No.2

Muchos fenómenos físicos implican cantidades variables, la velocidad de un cohete, la devaluación de la moneda por la inflación, el número de bacterias de un cultivo, la intensidad de un movimiento telúrico, el voltaje de una señal eléctrica, etc.

En este fascículo desarrollaremos las herramientas matemáticas para expresar con precisión las razones o tazas de cambio.

Primero se revisarán algunas ideas anteriores, supón que P(x,y) y Q($x_1$,$y_1$) son los puntos de la gráfica de una función f. Entonces la recta secante P y Q tienen la pendiente:

$$m.\sec = \frac{Y_1 - Y}{X_1 - X}$$

o bien, puesto que $y = f(x)$ y $y_1 = f(x_1)$,

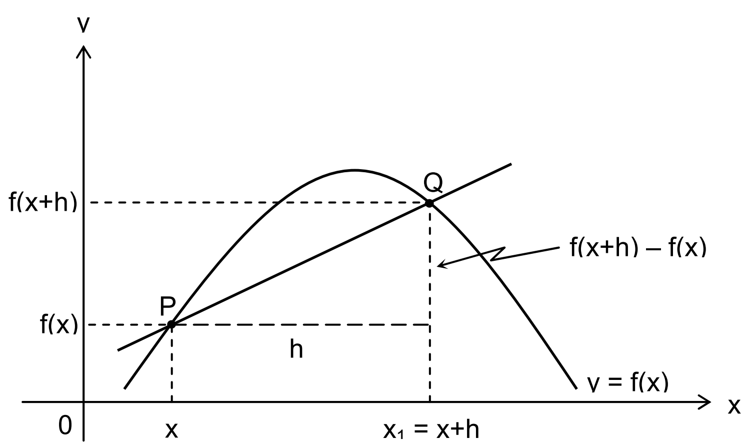
$$m.\sec = \frac{f(x_1) - f(x)}{x_1 - x} \qquad (1)$$

haciendo, $h = x_1 - x$ , entonces $x_1 = x + h$

de tal manera que la ecuación (1) puede escribirse así

$m \sec =$ $m.\sec = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

Observemos la gráfica No 3.




Gráfica No. 3

De la gráfica se observa que P(x,f(x)) y Q($x_1$,f(x+h)–f(x)) ó Q(x+h,f(x+h)–f(x)).

Cuando Q tiende P sobre la gráfica de f, $X_1$ tiende a Xo y por consiguiente h = $X_1$ – X tiende a cero.

Además, cuando Q tiende a P, la recta secante que une P y Q tiende a la recta tangente en P. El cual nos conduce a la siguiente definición:

Si P (x, y) es un punto de la gráfica de una función f, entonces la recta tangente a la gráfica de f en P se define como la recta que pasa por P y tiene la pendiente siempre que exista el limite.

$$m \tan = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (2)$$

Siempre que exista el límite, se hará referencia a la recta tangente en $x_1 = x$.

**DEFINICIÓN:**

La derivada de una función f es una f definida por:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad (3)$$

El dominio de f, consta de todas las “x” en la que existe este límite;

NOTACIÓN: El símbolo f (x) se lee “f prima de x”.
Sí x esta en el dominio de f, entonces se dice que f es diferenciable en x. De (2) y (3) se sigue que si f es diferenciable en Xo, el valor de la derivada en x es:

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = m \tan$$

| |
|---|
| En otros términos, la derivada de f es una función cuyo valor en $X_1 = X$ es la pendiente ($m = \text{tang}\ \theta$) de la recta tangente a y = f(x) en $x_1 = x$. |

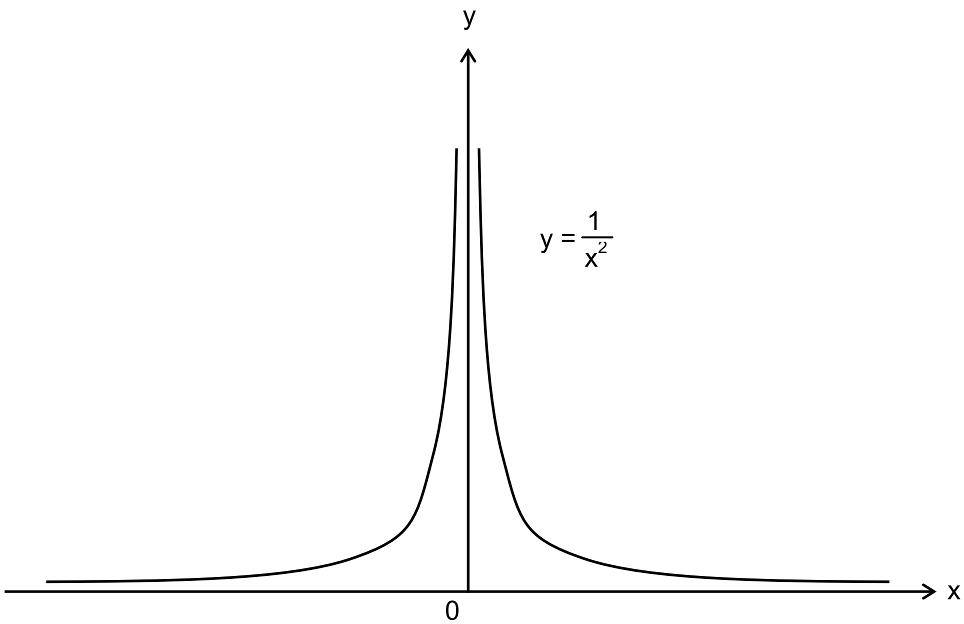
El dominio de la derivada es el conjunto de los valores de X para lo que existe una recta tangente a Y = f(x).

Existen tres maneras comunes en las que la función f puede no ser diferenciable en un punto, formuladas de una manera informal, estas pueden clasificarse como:

a) Rupturas.
b) Vértices.
c) Tangentes verticales.

Ruptura.

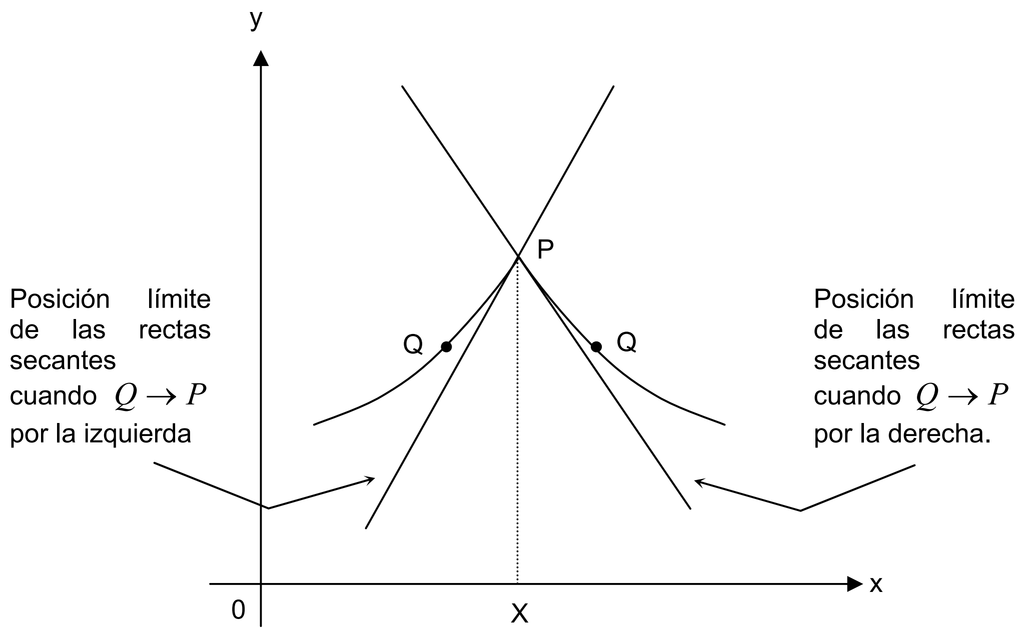
a) *Es evidente que si la gráfica de una función f tiene una "ruptura" en $X_1$=X (ver gráfica 4) entonces la función no puede tener una tangente en X. Esto se demuestra cuando más preciso sea el término de una "ruptura".




Gráfica No. 4

Vértices.

b) La gráfica de una función f tiene un "vértice" en un punto P (X, f (X) ) si la gráfica de f no se interrumpe en P y la posición límite de la recta secante que une a P y Q depende de si Q tiene a P por la izquierda o por la derecha ( ver gráfica 5). En los vértices no existe una recta tangente, ya que las pendientes de las rectas no tienen un límite ( por ambos lados).



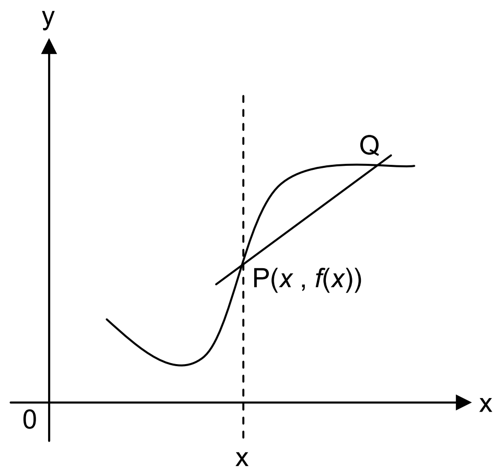

Gráfica No. 5

Tangentes verticales.

c) No existe, puesto que los límites por un lado no son iguales. Por consiguiente, f (x) no es diferenciable en x = 0.

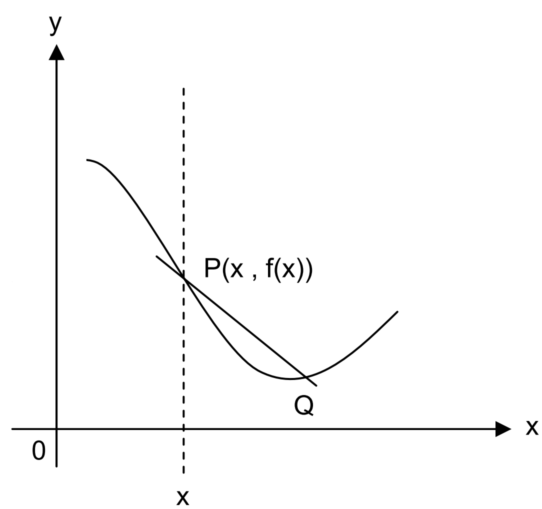
Si la pendiente de la recta secante que une P y Q tiende a a $+\infty$ ó $-\infty$ cuando Q tiende a P sobre la gráfica de f, entonces f no es diferenciable en x.

Desde el punto geométrico, tales puntos ocurren cuando las rectas secantes tienden a una posición límite vertical (ver gráfica 6 y 7)




Gráfica No. 6

a) la pendiente de la recta tiende a $+\infty$ cuando $Q \to P$




Gráfica No. 7

b) la pendiente de la recta secante tiende a $-\infty$ cuando $Q \to P$

El cálculo diferencial es el estudio del cambio que ocurre en una cantidad, cuando ocurren variaciones en otras cantidades de las cuales depende la cantidad original.

Los ejemplos siguientes muestran tales situaciones.

1) El cambio en el corte total de operación de una planta que resultan de cada unidad adicional producida.
2) El cambio en la demanda de cierto producto que resulta de un incremento en el precio.
3) El cambio en el producto nacional bruto de una país con cada año que pasa.

Sea x una variable con un primer valor $x_1$ y un segundo valor $x_2$. Entonces es el cambio, de valor x; es $x_2 - x_1$ y se denomina el incremento de cualquier variable.

$\Delta x$ = $x_2 - x_1$ denota el cambio de la variable *x*

$\Delta p$ = $p_2 - p_1$ índica el cambio de variable *p*

$\Delta q$ = $q_2 - q_1$ denota el cambio de la variable *q*.

Sea y = f(x) una variable que depende de x. Cuando x tiende al valor $x_1$ , y tiende el valor $y_1 = f(x)$ De manera inicial, cuando $x = x_2$ y tiende el valor $y_2 = f(x_2)$
Así el incremento de y es

$$y_2 - y_1 = y_2 - y_1$$
$$= f(x_2) - f(x_1)$$

Ejemplo. El volumen de ventas de gasolina de cierta estación de servicio depende del precio del litro. Si p en el precio por el litro en centavos, se encuentra que el volumen de venta ( en litros por día ) esta dado por:

q = 500 (150 – p )

Calcula el incremento en el volumen de ventas que corresponde a un incremento en el precio de 120 c a 130 c por litro.

Solución. Aquí p, es la variable independiente y q la función de p. El primer valor de *p* es: $p_1$ = 120 y el segundo valor es $p_2$ = 130. El incremento de p es:

$$p_2 - p_1 = p_2 - p_1 = 130 - 120 = 10$$

Los valores correspondientes de q son los siguientes:

$q_1$ = 500 ( 150 – $p_1$ ) = 500 (150 – 120 ) = 15, 000

$q_2$ = 500 (150 – $p_2$ ) = 500 (150 – 130 ) = 10, 000

En consecuencia, el incremento de q esta dado por:

$p_2 – p_1 = q_2 – q_1$ = 10,000 – 15,000 = – 5000

El incremento de q mide el incremento en q y el hecho de que sea negativo significa que q en realidad decrece. El volumen de ventas decrece en 5, 000 litros por día si el precio se incrementa de 120c a 130c.

Resolviendo la ecuación Δx = $x_2 - x_1$ para $x_2$ si Δx = h, entonces tenemos $x_2 = x_1 + h$.
Usando este valor de $x_2$ en la definición de Δy, obtenemos,

$$\Delta y = y_2 - y_1 = f(x+h) - f(x)$$

En forma alternativa, dado que f (x) = $y_1$ podemos escribir:

$$y + y_2 - y_1 = f(x+h)$$

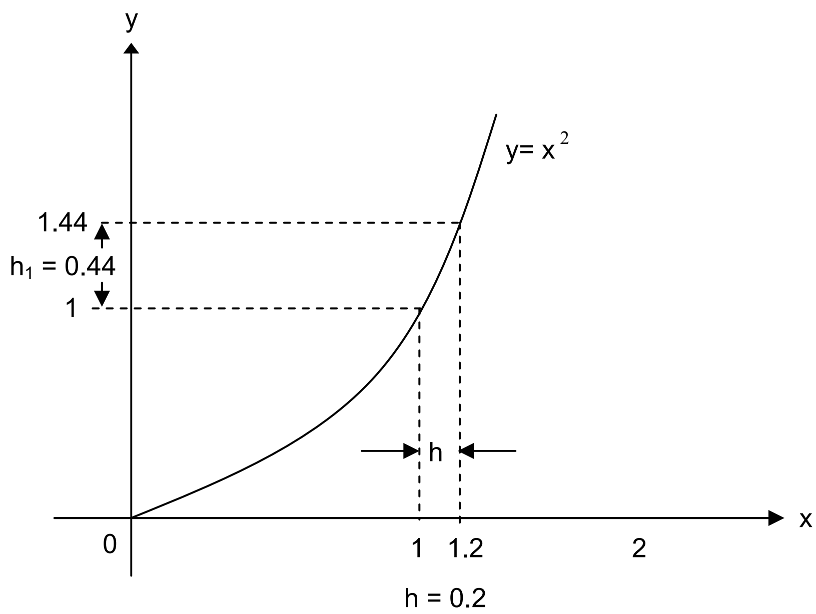
Ejemplo. Dado f (x) = $x^2$ calcula el incremento $y_2 - y_1$, si x = 1 y h = 0. 2

Solución. sustituyendo los valores de x y Δx en la fórmula de Δy1, tenemos:

$$\begin{aligned}\Delta y = y_2 - y_1 &= f(x+h)^2 - f(x)^2 \\ &= f(1+0.2)^2 - f(1)^2 \\ &= f(1.2)^2 - f(1)^2 \\ &= (1.2)^2 - (1)^2 = 1.44 - 1 \\ \Delta y = y_2 - y_1 &= 0.44\end{aligned}$$

Observemos que un cambio de 0.2 en el valor de x da como resultado un cambio en “y” de 0.44.

Observemos la gráfica.




Gráfica No.8

Ejemplo.
En el caso de la función y = $x^2$, determina cuando x = 1 para cualquier incremento $x_1 - x$. de x.

$$
\begin{aligned}
y_2 - y_1 &= f(x+h) - f(x) \\
&= f(1+h) - f(1) \\
&= (1+h)^2 - (1)^2 \\
&= 1 + 2h + (h)^2 - 1 \\
&= 1 - 1 + 2h + (h)^2 \\
&= 2h + (h)^2
\end{aligned}
$$

Como en la expresión de $y_2 - y_1$ el ejemplo es valido para todos los incrementos h, entonces podemos resolverlo sustituyendo h = 0.2 quedando el siguiente resultado:

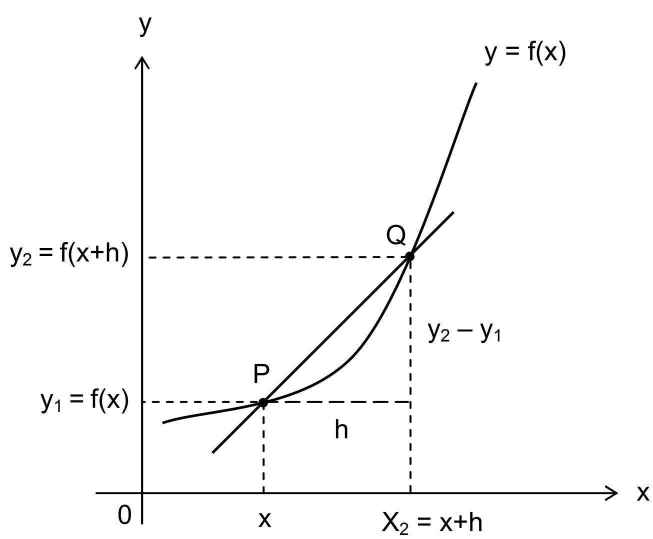
$$y_2 - y_1 = 2(0.2) + (0.2)^2 = 0.4 + 0.04 = 0.44 \quad \text{Como el anterior.}$$

**DEFINICIÓN:**
La tasa de cambio de una función f sobre un intervalo de x a x + h se define por la razón $y_2 - y_1 / h$ , por lo tanto, la tasa de cambio promedio de y con respecto a x es:

$$\boxed{\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}}$$

OBSERVACIÓN: Es necesario que el intervalo de x a x+h pertenezca al dominio de f. gráficamente. Si P en un punto (x , f(x) ) y Q en el punto (x+ h ), f (x+h) sobre la gráfica de y = f (x), entonces el intervalo $y_2 - y_1$ = f (x + h) – f(x) en la elevación de la h en el recorrido de P a Q. Por definición de pendiente, decimos que $y_2 - y_1 / h$ es la pendiente del segmento rectilíneo PQ. Así que, la tasa de cambio promedio de "y" con respecto a "x" es igual a la pendiente de la recta PQ que pasa por los puntos P y Q sobre la gráfica de y = f(x)

Ver la figura para mayor comprensión; estos puntos corresponden a los valores "x" y "x+h" de la variable independiente.




Gráfica No.9

### 1.1.2 NOTACIÓN DE LA DERIVADA.

Es conveniente recordar que para denotar la derivada de una función y con una variable independiente x se utilizan las siguientes notaciones y simbolizaciones. Si se tiene y = f(x), la función derivada se simboliza por **$D_x$y**, que se lee: la derivada de y respecto de **x**. **NOTACIÓN DE CAUCHY**. Si la función es y = f (x) la función derivada se representa por **y**' o por **f' (x) NOTACIÓN DE LAGRANGE**. La notación americana de la derivada de la función y = f (x) es:

$$\frac{dy}{dx} \text{ ó } \frac{df(x)}{dx}$$

Resumiendo las tres notaciones anteriores la derivada de una función y = f(x) puede escribirse:

$$\boxed{\lim_{h\to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}}$$

## EXPLICACIÓN INTEGRADORA

Hasta el momento hemos aprendido que la recta que mejor se aproxima a una curva cerca del punto P es la tangente, a través de ese punto, más precisamente, la recta tangente a una curva en P es la posición de la recta tangente que pasa por dos puntos, conforme uno de los puntos se aproxima al otro a lo largo de la curva.

La pendiente *m* de la recta tangente a la curva y = f (x) está dada por:

$$\lim_{h\to 0} \frac{y_2 - y_1}{h} = f'(x) = y' = \frac{dy}{dx}$$