Capítulo 5

La derivada

[1]

5.2 La derivada de una función

A continuación trataremos uno de los conceptos fundamentales del Cálculo, que es el de la derivada. Este concepto es un límite que está estrechamente ligado a la recta tangente, a la velocidad instantánea y en general a la razón de cambio de una variable con respecto a otra.
Recordemos que la recta tangente a una curva $y = f(x)$ en el punto $[x_0, f(x_0)]$ ha sido definida como la recta que tiene por pendiente el número

$$m_t = \lim_{x \ x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

en el supuesto caso de que este límite exista.
Cuando este límite existe lo llamamos la derivada de la función f en x_0 y lo denotamos por $f'(x_0)$. Es decir:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Si hacemos $x - x_0 = h$ (o sea $x = x_0 + h$), podemos escribir:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

A veces se usa Δx (incremento de x) en lugar de h y Δy en lugar de $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, en cuyo caso:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Ahora sí podemos definir:

- Si existe el número:

  $$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

  Se dice que:

  La función f es derivable en x_0 y que $f'(x_0)$ es la derivada de f en x_0.

[1]canek.azc.uam.mx: 4/ 10/ 2006

- Si no existe $f'(x_0)$, podemos afirmar que la función f no es derivable en x_0 o bien que la función f no tiene derivada en x_0

Otras notaciones para $f'(x_0)$ son:

$$\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_0}, \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}, y'(x_0)$$

Ejemplo 5.1 *Demostrar que la función* $f(x) = 3x^2 - 4x - 5$ *es derivable en* $x_0 = 2$

▼ Demostraremos la existencia de $f'(x_0) = f'(2)$

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \Rightarrow \\
\Rightarrow f'(2) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{[3(2+h)^2-4(2+h)-5]-[3(2)^2-4(2)-5]}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{3(4+4h+h^2)-8-4h-5-12+8+5}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{12+12h+3h^2-12-4h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{8h+3h^2}{h} = \\
&= \lim_{h\to 0}\frac{h(8+3h)}{h} = \lim_{h\to 0}(8+3h) = 8+3(0) = 8 \\
f'(2) &= 8
\end{aligned}$$

Luego $f'(2)$ existe, por lo cual f es una función derivable en $x_0 = 2$. Además la derivada de f en $x_0 = 2$ es $f'(2) = 8$

□

Ejemplo 5.2 *Si*

$$f(x) = 4 - x^2,$$

usando la definición de la derivada, calcular $f'(a)$ *usando la definición de la derivada.*
Calcular también, usando lo anterior, $f'(-2)$ *y* $f'(1)$.

▼ Calculamos el cociente diferencial

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{(4-x^2)-(4-a^2)}{x-a} = \frac{4-x^2-4+a^2}{x-a} = \frac{-x^2+a^2}{x-a} = \\
&= \frac{-(x^2-a^2)}{x-a} = -\frac{(x-a)(x+a)}{x-a} = -(x+a) \text{ si } x-a \neq 0.\text{, esto es si } x \neq a
\end{aligned}$$

Así:

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}[-(x+a)] = -2a.$$

Hemos demostrado por lo tanto que, en todo punto $[a, f(a)] = (a, 4-a^2)$ la función es derivable y su derivada es $f'(a) = -2a$.

Concluimos con esto que $f'(x) = -2x$ para $x \in \mathbb{R}$.

Usando este resultado, tenemos que

$$f'(-2) = 4;$$
$$f'(1) = -2.$$

□

Ejemplo 5.3 *Sea*

$$f(x) = \sqrt{2x+1}.$$

Aplique la definición de la derivada para encontrar $f'(a)$, *con* $a \in D_f = \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$.

▼ Calculamos el cociente diferencial del cual obtendremos el límite:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} &= \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2a+1}}{x-a} = \frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{2a+1}}{x-a} \times \frac{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}} = \\ &= \frac{(2x+1)-(2a+1)}{(x-a)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1})} = \frac{2(x-a)}{(x-a)(\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1})} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}} \text{ si } x-a \neq 0, \text{ esto es, si } x \neq a.\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}f'(a) &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim_{x\to a}\frac{2}{\sqrt{2x+1}+\sqrt{2a+1}} = \\ &= \frac{2}{\sqrt{2a+1}+\sqrt{2a+1}} = \frac{2}{2\sqrt{2a+1}} = \frac{1}{\sqrt{2a+1}}.\end{aligned}$$

Esta última expresión sólo tiene sentido si $2a+1>0$, es decir, si $a > -\frac{1}{2}$. Vemos que $-\frac{1}{2} \in D_f$ pero ahí la función f no es derivable, de hecho ni siquiera está definida a la izquierda de $-\frac{1}{2}$. □

Ejemplo 5.4 *Demostrar que la función* $g(x) = |\,x\,|$ *no es derivable en el origen.*

▼ Demostraremos la no existencia de $g'(x_0)$ en $x_0 = 0$.

$$g'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} \Rightarrow$$
$$g'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0}\frac{|\,x\,|-|\,0\,|}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{|\,x\,|}{x} = ?$$

Calculamos los límites laterales $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|}{x}$ & $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{|\,x\,|}{x}$. Recuerda que ya lo hicimos en la Introducción a la unidad sobre Límites.

1. $x \to 0^- \Rightarrow x < 0 \Rightarrow |\,x\,| = -x \Rightarrow$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|\,x\,|}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1$$

2. $x \to 0^+ \Rightarrow x > 0 \Rightarrow |\,x\,| = x \Rightarrow$

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|\,x\,|}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{x}{x} = \lim_{x \to 0} 1 = 1$$

Entonces

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|\,x\,|}{x} = -1 \neq 1 = \lim_{x \to 0^+} \frac{|\,x\,|}{x} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{|\,x\,|}{x} \text{ no existe } \Rightarrow$$
$$\Rightarrow g'(0) \text{ no existe } \Rightarrow \text{ la derivada de } g \text{ en } x_0 = 0 \text{ no existe.}$$

Por lo tanto, la función g no es derivable en $x_0 = 0$.
En cualquier otro punto sí es derivable y se tiene:

1. $g'(a) = 1$ si $a > 0$

   Pues
   $$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{|\,x\,| - |\,a\,|}{x - a} = \frac{x - a}{x - a} = 1, \text{ si } x \text{ está “cerca” de } a$$

2. $g'(a) = -1$ si $a < 0$

   Pues
   $$\frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \frac{|\,x\,| - |\,a\,|}{x - a} = \frac{-x - (-a)}{x - a} = \frac{-x + a}{x - a} = \frac{-(x - a)}{x - a} = -1, \text{ si } x \text{ está “cerca” de } a$$

□

Ejemplo 5.5 *Si* $g(x) = \dfrac{1}{2 + x^2}$
Usando la definición de la derivada calcular $g'(a)$ *para* $a \in \mathbb{R}$.
Calcular también, usando lo anterior, $g'(-3)$ *y* $g'(2)$

▼ Calculamos el cociente diferencial:

$$\begin{aligned}
\frac{g(a+h) - g(a)}{h} &= \frac{\dfrac{1}{2 + (a+h)^2} - \dfrac{1}{2 + a^2}}{h} = \\
&= \frac{\dfrac{(2 + a^2) - [2 + (a+h)^2]}{[2 + (a+h)^2](2 + a^2)}}{h} = \\
&= \frac{(2 + a^2) - (2 + a^2 + 2ah + h^2)}{h[2 + (a+h)^2](2 + a^2)} = \\
&= \frac{2 + a^2 - 2 - a^2 - 2ah - h^2}{h[2 + (a+h)^2](2 + a^2)} = \\
&= \frac{h(-2a - h)}{h[2 + (a+h)^2](2 + a^2)} = \\
&= \frac{-2a - h}{[2 + (a+h)^2](2 + a^2)} \text{ si } h \neq 0
\end{aligned}$$

Así:

$$g'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(a)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-2a - h}{[2 + (a+h)^2](2 + a^2)} = \frac{-2a}{(2 + a^2)^2}$$

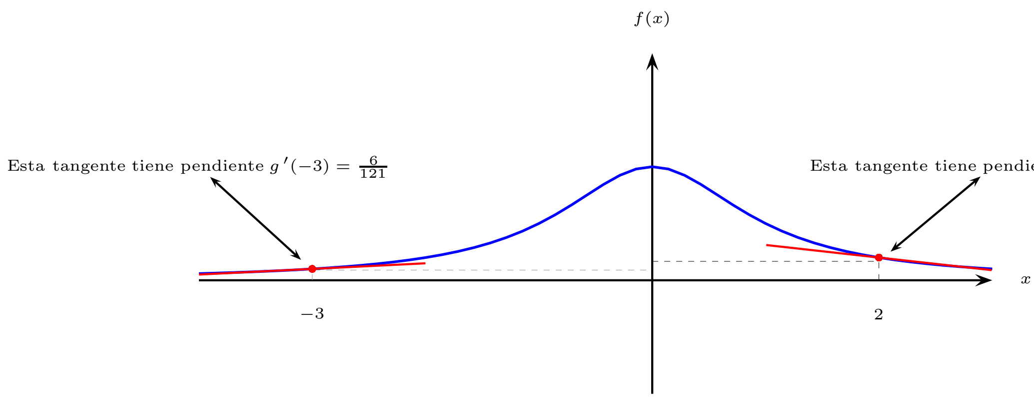
Hemos demostrado, por lo tanto, que en todo punto $[a, g(a)] = \left(a, \dfrac{1}{2 + a^2}\right)$ de la gráfica de la función g, la pendiente de la recta tangente vale $g'(a) = \dfrac{-2a}{(2 + a^2)^2}$.

Concluimos con esto que $g'(x) = \dfrac{-2x}{(2 + x^2)^2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

Usando este resultado tenemos que:

$$g'(-3) = \frac{-2(-3)}{[2 + (-3)^2]^2} = \frac{6}{121}$$

$$g'(2) = \frac{-4}{36} = -\frac{1}{9}$$



$\square$

5.2.1 La regla de los cuatro pasos

Considerando la definición de la derivada de $y = f(x)$ en x_0:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

se puede decir que para obtener la derivada de f en x_0 tenemos que calcular

1. $f(x_0)$ o bien $f(x_0 + h)$ & $f(x_0)$.

2. El incremento de la función: $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0)$

3. El cociente de incrementos o cociente diferencial: el cociente $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$

4. El límite del cociente diferencial: $\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

Algunos autores a este proceso para calcular la derivada de una función le llaman la "regla de los cuatro pasos".

Ejemplo 5.6 *Utilizando la regla de los cuatro pasos, calcular la derivada de la función* $f(x)=4x^3-5x^2-6x+7$ *en* $x=a$.

▼ Utilizamos la igualdad $f'(a)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

1. $f(a)=4a^3-5a^2-6a+7$

2.

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x)-f(a)=\\ &=(4x^3-5x^2-6x+7)-(4a^3-5a^2-6a+7)=\\ &=4(x^3-a^3)-5(x^2-a^2)-6(x-a)\end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\\ &=\frac{4(x^3-a^3)-5(x^2-a^2)-6(x-a)}{x-a}=\\ &=\frac{4(x-a)(x^2+xa+a^2)-5(x-a)(x+a)-6(x-a)}{(x-a)}=\\ &=4(x^2+ax+a^2)-5(x+a)-6,\text{ para } x\neq a\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\\ &=\lim_{x\to a}[4(x^2+ax+a^2)-5(x+a)-6]=\\ &=4(a^2+a^2+a^2)-5(a+a)-6=\\ &=4(3a^2)-5(2a)-6=12a^2-10a-6\end{aligned}$$

Entonces $f'(a)=\displaystyle\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=12a^2-10a-6$ para cualquier $a\in\mathbb{R}$

□

Ejemplo 5.7 *Mediante la regla de los cuatro pasos, calcular* $f'(x)$ *para* $f(x)=\sqrt{x-1}$

▼ Para calcular $f'(x)$ en un $x \in D_f$ arbitrario, utilizamos la igualdad

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

1. $f(x+h) = \sqrt{x+h-1}$

2. $\Delta y = f(x+h) - f(x) = \sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}$

3. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h} = \dfrac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h}$

4. $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} =$

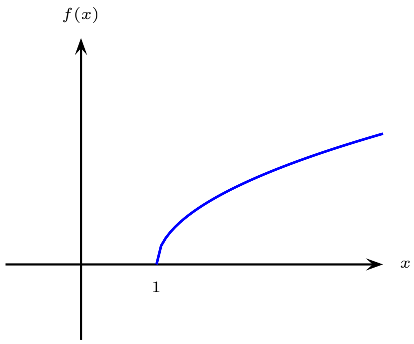
$$\begin{aligned}
&= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} = \\
&= \lim_{h \to 0} \left[\frac{\sqrt{x+h-1} - \sqrt{x-1}}{h} \times \frac{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} \right] = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x+h-1})^2 - (\sqrt{x-1})^2}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h-1) - (x-1)}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{x+h-1-x+1}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h(\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1})} = \\
&= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+h-1} + \sqrt{x-1}} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1}} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}
\end{aligned}$$

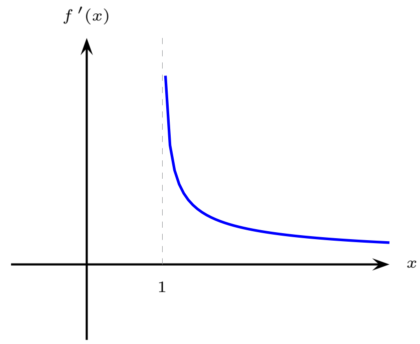
Luego

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

Por lo tanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x-1}} \text{ o bien } \frac{d}{dx}\sqrt{x-1} = \frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$





Esta derivada existe para cada $x > 1$. Aunque $1 \in D_f = [1, +\infty)$, observa que f no está definida a la izquierda de 1 y por lo tanto no tiene sentido calcular

$$\lim_{\Delta x \to 0^-} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} \text{ ni } \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$\square$