3 DERIVADAS ALGEBRAICAS

3 DERIVADAS ALGEBRAICAS

Entiéndase la derivada como la pendiente de la recta tangente a la función en un punto dado, lo anterior implica que la función debe existir en ese punto para poder trazar una recta tangente en él.

3.1. DIFERENCIACIÓN NORMAL

La derivada se puede conocer como un caso particular del límite.

Para conocer numéricamente el valor de la pendiente de una función en un punto dado es necesario resolver la ecuación:

$$Pendiente\ en\ P_1 = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$

Para lo cual hay necesidad de utilizar una calculadora y evaluar la ecuación en valores cercanos a cero (0).

A lo anterior se le conoce como el método numérico, utilizado para conocer la pendiente de la ecuación de grado menor, pero existe lo que se llama diferenciación formal para resolver ecuaciones de grado superior.

3.2. FUNCIONES POLINOMIALES Y SUS DERIVADAS

Existen los conocidos monomios y polinomios, los primeros contiene solamente una expresión de la variable, y los segundos corresponden a una suma finita de monomios.

Derivada

Sea $y = f(x)$ una función de ***x***. Si el limite

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Existe y es finito, diremos que este límite es la derivada de f respecto a ***x*** y que f es diferenciable en ***x.***

A continuación se estudiaran algunas reglas para diferenciación:

Derivada de una Constante

Regla No. 3.1

La derivada de una constante es cero

El significado geométrico de esta afirmación es el hecho que la pendiente de la recta $y = c$, para cualquier valor de ***x***, es cero.

Derivada de una potencia entera positiva

Regla No. 3.2

Potencias enteras positivas de x

Si ***n*** es un número entero positivo, entonces:

$$\frac{d}{dx} x^n = n\, x^{n-1}$$

Deducción:

$$y = f(x) = x^n$$

Entonces

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Como ***n*** es un número entero positivo, se puede aplicar:

$$a^n - b^n = (a-b)\left(a^{n-1} + a^{n-2}b + ... + ab^{n-2} + b^{n-1}\right)$$

Donde $a = x + \Delta x$, $b = x$, $a - b = \Delta x$, que reemplazado en la ecuación anterior da:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^n - (x)^n}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)\left((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + ... + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}\right)}{\Delta x}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \left((x+\Delta x)^{n-1} + (x+\Delta x)^{n-2}x + ... + (x+\Delta x)x^{n-2} + x^{n-1}\right)$$

Haciendo que $\Delta x \to 0$,

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left((x+0)^{n-1} + (x+0)^{n-2}x + ... + (x+0)x^{n-2} + x^{n-1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1} + x^{n-1}\right)$$

$$\frac{dy}{dx} = n\,x^{n-1}$$

Ejemplos.: a.) Derivar la expresión: $y = x^5$

$$\frac{d}{dx}\left(x^5\right) = 5x^4$$

b.) Derivar la expresión: $y = x^3$

$$\frac{d}{dx}\left(x^3\right) = 3x^2$$

Derivada de una Constante por una Función

Regla No. 3.3

Constante por una función
Si $u = f(x)$ es cualquier función diferenciable de ***x***, y ***c*** es una constante, entonces: $$\frac{d}{dx}(c\,u) = c\frac{du}{dx}$$

La regla se resume en el hecho que la derivada de una constante por una función es la constante multiplicada por la derivada de la función.

Geométricamente hablando significa que si multiplicamos la ordenada de una función por un valor cualquiera, estamos multiplicando por ese mismo número el valor de la pendiente.

Deducción:

$$\frac{d}{dx}(cu) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{cf(x+\Delta x) - cf(x)}{\Delta x} =$$ *Aplicando la definición de Derivada.*

$$\frac{d}{dx}(cu) = \lim_{\Delta x \to 0} c\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] =$$ *Factorizando la constante*

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\lim_{\Delta x \to 0}\left[\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}\right] =$$ *Aplicando límite de la constante*

$$\frac{d}{dx}(cu) = c\frac{du}{dx}$$ *Remplazando el limite por la definición de la derivada.*

Ejemplo: Derivar la expresión $y = 7x^5$

$$\frac{d}{dx}\left(7x^5\right) = 7\frac{d}{dx}\left(x^5\right) \quad \textit{Por tratarse de una constante.}$$

$$\frac{d}{dx}\left(7x^5\right) = 7\left(5x^4\right) \quad \textit{Aplicando la derivada de la potencia.}$$

$$\frac{d}{dx}\left(7x^5\right) = 35x^4 \quad \textit{Realizando el producto.}$$

Derivada de una Suma

Regla No.3.4

Regla de la suma

Si ***u*** y ***v*** son funciones diferenciables de ***x***, entonces la suma $u + v$ es una función diferenciable de ***x***, y

$$\frac{d}{dx}(u+v) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$$

Para todos los valores de ***x*** en que existan las derivadas de ***u*** y ***v***

La idea es que si ***u*** y ***v*** tiene derivadas en el punto ***x***, entonces sus suma también tiene derivada en ***x*** y corresponde a la suma de las derivadas de ***u*** y ***v*** en ***x***.

Análogamente, la derivada de la suma de cualquier número finito de funciones diferenciales es la suma de sus derivadas.

Deducción :

$$y = u + v \approx f(x)$$

$$y + \Delta y = (u + \Delta u) + (v + \Delta v) \approx f(x + \Delta x) \quad \textit{Sumando } \Delta \textit{ en cada término.}$$

$$\Delta y = \Delta u + \Delta v \approx f(x+\Delta x) - f(x)$$ *Restando* $y = u + v$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \approx \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$ *Dividiendo término a término por la expresión* Δx

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta u + \Delta v)}{\Delta x}$$ *Aplicando el límite cuando* $\Delta x \longrightarrow 0$

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$ *Por las propiedades de los límites.*

Ejemplo: Derivar la expresión $y = x^3 + 7x^2 - 5x + 4$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(7x^2) - \frac{d}{dx}(5x) + \frac{d}{dx}(4)$$ *Derivando cada término*

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 14x - 5$$

y así se puede aplicar para cualquier número finito de términos.

Ejercicios Propuestos:

Dada $f(x)$, obtener $f'(x)$:

1. $f(x) = 3x^4 - 9$
2. $f(x) = x^3 + C$
3. $f(t) = t^2 + \frac{1}{t^2} + \frac{5}{t^4}$
4. $f(x) = \frac{t}{x^2} + x^{2/3} + C$
5. $f(x) = \frac{x^3 + x^2 + x - 7}{x^2}$
6. $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$
7. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x}}$
8. $f(x) = \sqrt[4]{\frac{3x+5}{x+9}}$
9. $f(x) = \frac{x}{x + \frac{C}{x}}$
10. $f(x) = 2x^2 - 5\sqrt{x}$

3.1. PRODUCTOS POTENCIAS Y COCIENTES

En esta sección estudiaremos a ***u*** y ***v*** como dos funciones diferenciables de ***x***.

Derivada de un Producto

Regla No.3.5

Regla del Producto

El producto de las funciones diferenciables ***u*** y ***v*** es diferenciable y:

$$\frac{d}{dx}(u\,v) = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

Al igual que para la suma, la derivada del producto únicamente existe para aquellos valores en donde exista la derivada de ***u*** y la derivada de ***v***.

$$y = u\,v \qquad \textit{Por definición}$$

$$y + \Delta y = (\,u + \Delta u\,)(\,v + \Delta v\,) \qquad \textit{Sumando } \Delta y \textit{ en ambos lados del igual}$$

$$y + \Delta y = u\,v + u\,\Delta v + v\,u + \Delta u\,\Delta v \qquad \textit{Realizando el producto}$$

$$\Delta y = u\,\Delta v + v\,\Delta u + \Delta u\,\Delta v \qquad \textit{Restando } y = uv \textit{ en ambos lados.}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + \Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} \qquad \textit{Dividiendo a ambos lados por } \Delta x\,.$$

Cuando $\Delta x \to 0$, Δu también lo hace, lo que se puede expresar en la forma:

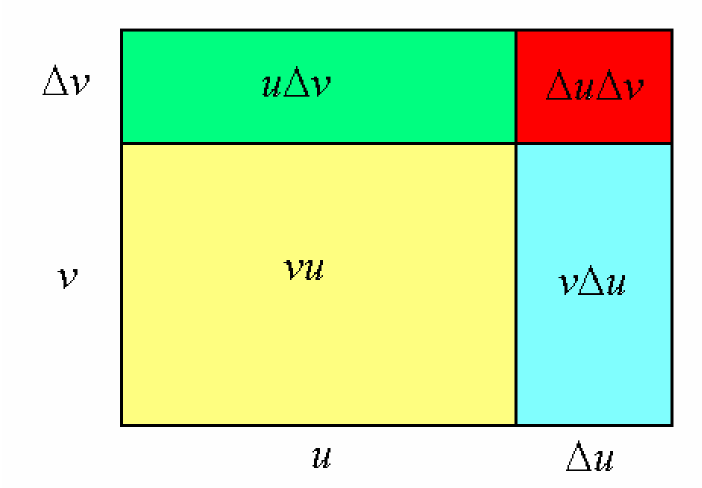
$$Lim\,\Delta u = Lim\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\,\Delta x\right) = Lim\,\frac{\Delta u}{\Delta x}\,Lim\,\Delta x = \frac{du}{dx}\,0 = 0$$

Luego la expresión $\Delta y/\Delta x$ se puede expresar en la forma:

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = Lim\,u\,\frac{\Delta v}{\Delta x} + Lim\,v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} + Lim\,\Delta u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}$$

$$\frac{dy}{dx} = u\,\frac{dv}{dx} + v\,\frac{du}{dx}$$

Al igual que para la suma, la derivada del producto únicamente existe para aquellos valores en donde exista la derivada de ***u*** y la derivada de ***v***.



En La figura anterior se representa gráficamente el significado de la regla del producto.

Hay que tener en cuenta que se trata de la función ***u*** multiplicada por la derivada de la función ***v***.

Ejemplo:

Derivar $f(t) = \sqrt{t}\,(1-t)$

Si : $u = \sqrt{t}$ $\qquad \dfrac{du}{dt} = \dfrac{1}{2}(t)^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} = \dfrac{1}{2}(t)^{-\frac{1}{2}}$

$v = (1-t) \qquad \dfrac{dv}{dt} = -1$

Entonces: $\dfrac{dy}{dt} = u\dfrac{dv}{dt} + v\dfrac{du}{dt}$

$$\frac{dy}{dt} = \sqrt{t}\,(-1) + (t-1)\left(\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}\right) = -\sqrt{t} + \frac{(t-1)}{2\sqrt{t}} = \frac{1-3t}{2\sqrt{t}}$$

Derivada de Potencias enteras positivas de una función diferenciable

Regla No 3.6

Potencias enteras positivas de una función diferenciable
Si ***u*** es una función diferenciable de ***x***, y ***n*** es un número entero positivo, entonces u^n es diferenciable, y: $$\frac{d}{dx}\left(u^n \right) = n\, u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

La ausencia del termino du/dx de la ecuación invalida la diferenciación, por lo que hay que tener cuidado de incluir el diferencial de la ecuación.

DERIVADA DE UN COCIENTE

La razón o cociente u / v de dos polinomios en ***x***, no es en general un polinomio. Dicha razón es una función racional de ***x***.

Regla No 3.7

Regla del Cociente
En los puntos donde $v \neq 0$, el cociente $y = u / v$ de dos funciones diferenciables, es también diferenciable y: $$\frac{d}{dx}\left(u/v \right) = \frac{v \dfrac{du}{dx} - u \dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

Como sucede en todas las ecuaciones vistas hasta el momento, la anterior regla tiene valor únicamente en aquellos puntos en dos de las funciones ***u*** y ***v*** tengan valor y sean diferenciables.

Al igual que para la suma, la derivada del cociente únicamente existe para aquellos valores en donde exista la derivada de ***u*** y la derivada de ***v***.

$$y = \frac{u}{v}$$

$$y + \Delta y = \frac{(u + \Delta u)}{(v + \Delta v)}$$

Ahora restando $y = u/v$ en ambos lados de la igualdad se tiene:

$$\Delta y = \frac{u + \Delta u}{v + \Delta v} - \frac{u}{v} = \frac{(\ v\,u + v\,\Delta u\ ) - (\ u\,v + u\,\Delta v\ )}{v\,(\ v + \Delta v\ )} = \frac{v\,\Delta u - u\,\Delta v}{v\,(\ v + \Delta v\ )}$$

Dividiendo a ambos lados por Δx se tiene.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{v\,(\ v + \Delta v\ )}$$

Cuando $\Delta x \to 0$, se puede expresar:

$$Lim\frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{du}{dx} \quad ; Lim\frac{\Delta v}{\Delta x} = \frac{dv}{dx}$$

y

$$Lim\left(\ v(\ v + \Delta v\ )\ \right) = Lim\ v \times Lim\ (\ v + \Delta v\ ) = v \times (\ v + 0\ ) = v^2$$

ya que:

$$Lim\ \Delta v = Lim\ \frac{\Delta v}{\Delta x}\ \Delta x = \frac{dv}{dx} \times 0 = 0$$

Luego la expresión $\Delta y / \Delta x$ se puede expresar en la forma:

$$Lim\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx} = Lim\ \frac{v\,\frac{\Delta u}{\Delta x} - u\,\frac{\Delta v}{\Delta x}}{Lim\left(\ v(\ v + \Delta x\ )\ \right)}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v\,\frac{du}{dx} - u\,\frac{dv}{dx}}{v^2}$$

Ejemplo 1:

Derivar $y=\dfrac{x^2+x-2}{x^3+6}$

$$u=x^2+x-2 \quad \textit{Enunciado del problema}$$

$$\frac{du}{dx}=2x+1 \quad \textit{Aplicando derivada de una suma.}$$

$$v=x^3+6 \quad \textit{Enunciado del problema.}$$

$$\frac{dv}{dx}=3x^2 \quad \textit{Aplicando derivada de una suma}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(x^3+6\right)\left(2x+1\right)-\left(x^2+x-2\right)\left(3x^2\right)}{\left(x^3+6\right)^2}= \quad \textit{Aplicando la definición de la derivada de un cociente:}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\left(2x^4+x^3+12x+6\right)-\left(3x^4+3x^3+6x^2\right)}{\left(x^3+6\right)^2}= \quad \textit{Realizando las multiplicaciones indicadas.}$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{\left(x^3+6\right)^2}= \quad \textit{Factorizando y agrupando términos.}$$

Ejemplo 2:

Calcular las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f\left(x\right)=x^3+6x^2$ para los puntos $x=2$ y $x=-2$; determinar si estas rectas se cortan y calcular las coordenadas del punto de corte.

La primera derivada es: $f'\left(x\right)=3x^2+12x$, que evaluada para los dos valores de x, da los valores de las pendientes de las rectas tangentes, así:

$$f'\left(x\right)=3x^2+12x\Big|_{x=2}=3\left(2\right)^2+12\left(2\right)=12+24=36$$

$$f'\left(x\right)=3x^2+12x\Big|_{x=-2}=3\left(-2\right)^2+12\left(-2\right)=12-24=-12$$

Para conocer los valores de y en los dos lugares indicados, se procede de la siguiente manera:

Para $x=2$, se tiene : $f(x)=y=x^3+6x^2 \Rightarrow f(2)=2^3+6(2)^2=8+24=32$;

Para $x=-2$, se tiene : $f(x)=y=x^3+6x^2 \Rightarrow f(-2)=(-2)^3+6(-2)^2=-8+24=16$;

Para obtener las dos ecuaciones de las rectas tangentes, se utiliza la forma $y=mx+b$, así:

Para $x=2$, el valor de b se obtiene como $32=36(2)+b \Rightarrow b=32-72=-40$

Para $x=-2$, el valor de b se obtiene como $16=(-12)(-2)+b \Rightarrow b=16-24=-8$

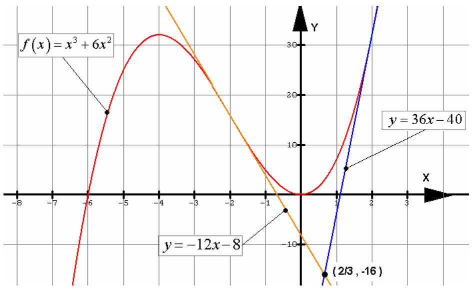
Luego las dos ecuaciones son:

Para $x=2$, la ecuación de la recta tangente es: $y=36x-40$, y
Para $x=-2$, la ecuación de la recta tangente es: $y=-12x-8$

Para determinar si se cortan, se igualan entre si estas dos ecuaciones :

$$36x-40=-12x-8$$
$$36x+12x=40-8$$
$$48x=32$$

$$x=\frac{32}{48}=\frac{2}{3}\approx 0.66\overline{6}$$



El valor de y correspondiente a $x=2/3$, es: $y=36\left(\frac{2}{3}\right)-40=24-40=-16$

Luego las coordenadas del punto de corte son : $\boxed{\left(\frac{2}{3},-16\right)}$

Ejercicios Propuestos :

En los siguientes ejercicios, dada $y=f(x)$, encontrar $\frac{dy}{dx}$:

1	$y=\dfrac{3}{5x^5}$	**2**	$y=11x^4-3x+9$
3	$y=-x^4+3x^2-6x+1$	**4**	$y=3x^7-9x^2+21$
5	$y=\dfrac{2}{x}-\dfrac{1}{x^2}$	**6**	$y=\dfrac{1}{2x}+2x$
7	$y=\left(x^2+2\right)\left(x^3+1\right)$	**8**	$y=\left(x^4-1\right)\left(x^2+1\right)$
9	$y=\left(x^2+17\right)\left(x^3-3x+1\right)$	**10**	$y=\dfrac{1}{3x^2+1}$
11	$y=\dfrac{1}{4x^2-3x+9}$	**12**	$y=\dfrac{x-1}{x+1}$
13	$y=\dfrac{2x^2-1}{3x+5}$	**14**	$y=\dfrac{2x^2-3x+1}{2x+1}$
15	$y=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+1}$	**16**	$y=\dfrac{x^2-2x+5}{x^2+2x-3}$
17	$y=x^2\sqrt{1-x^2}$	**18**	$y=\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2+4}}$
19	$y=\left(\dfrac{3x-1}{x^2+3}\right)^2$	**20**	$y=\dfrac{\sqrt{x}+1}{x^2+1}$
21	$y=\sqrt{\dfrac{2x}{x+1}}$		

En los siguientes ejercicios hallar la ecuación de la recta tangente a la función en el punto dado:

a. $f\left(x\right)=\sqrt{3x^2-1}$ para $\left(\ 3\,,5\ \right)$

b. $f\left(x\right)=\dfrac{1}{3x}\sqrt{x^2+5}$ para $\left(\ 2\,,2\ \right)$