

3.1. DERIVADAS DE SEGUNDO ORDEN

La derivada $y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}$ es la primera derivada de y con respecto a x , pero igualmente es posible realizar la derivada de la derivada,

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Lo que se conoce como la segunda derivada de y con respecto a x .

En esta forma es posible realizar derivadas de derivadas para obtener derivadas de orden superior.

Velocidad y Aceleración

En mecánica, si $s = f(t)$ da la posición en el instante t de un cuerpo en movimiento, entonces:

La primera derivada $\frac{ds}{dt}$ da la velocidad, y

La derivada segunda $\frac{d^2s}{dt^2}$ da la aceleración del cuerpo en el instante t .

Así la velocidad es la rapidez de cambio de la posición y la aceleración es la rapidez de cambio de la velocidad. (Esto es, la rapidez con que un cuerpo adquiere o pierde velocidad.).

Ejemplo 1 :

Si $f(x) = x \cos(x)$, encontrar $f''(x)$

$$f'(x) = x \frac{d}{dx}(\cos(x)) + \cos(x) \frac{d}{dx}(x) \quad \text{Por la regla del producto}$$

$$f'(x) = -x \sin(x) + \cos(x) \quad \text{Reemplazando valores de las}$$

derivadas

Para obtener $f''(x)$, se vuelve a derivar a $f'(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-x \operatorname{Sen}(x) + \operatorname{Cos}(x))$$

De la primera derivada.

$$f''(x) = -x \frac{d}{dx}(\operatorname{Sen}(x)) + \operatorname{Sen}(x) \frac{d}{dx}(-x) + \frac{d}{dx}(\operatorname{Cos}(x))$$

Por la regla del producto

$$f''(x) = -x \operatorname{Cos}(x) - \operatorname{Sen}(x) - \operatorname{Sen}(x)$$

Reemplazando valores de las derivadas

$$f''(x) = -x \operatorname{Cos}(x) - 2 \operatorname{Sen}(x)$$

Agrupando términos comunes

Ejemplo 2:

La posición de una partícula está dada por la ecuación:

$$s = f(t) = t^3 + 6t^2 + 9t$$

Donde t se mide en segundo y s en metros.

i. Halle la aceleración en el instante t .

La función de velocidad es la derivada de la función de posición:

$$s = f(t) = t^3 + 6t^2 + 9t$$

Función de posición

$$v(t) = \frac{ds}{dt} = 3t^2 + 12t + 9$$

Derivando la función de posición.

La aceleración es la derivada de la función velocidad:

$$a(t) = \frac{d^2s}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = 6t + 12$$

Segunda derivada.

ii. ¿Qué valor tiene la aceleración a los 4 segundos?

$$a(4) = 6(4) + 12 = 24 + 12 = 36 \text{ m/seg}^2$$

Ejercicios Propuestos:

Determine la primera y segunda derivadas de cada una de las siguientes funciones:

$$1 \quad f(x) = x^5 + 6x^2 - 7x$$

$$2 \quad f(t) = t^8 - 7t^6 + 2t^4$$

$$3 \quad h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$$

$$4 \quad g(r) = \sqrt{r} + \sqrt[3]{r}$$

$$5 \quad f(s) = (3s + 5)^8$$

$$6 \quad g(u) = \frac{1}{\sqrt{1-u}}$$

$$7 \quad y = \frac{x^2}{x+1}$$

$$8 \quad y = (1 - x^2)^{3/4}$$

$$9 \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

$$10 \quad x^2 + x y + y^2 = 1$$

3.2. DIFERENCIACION IMPLICITA Y POTENCIAS FRACCIONADAS

No siempre se da el caso de que se pueda expresar la función en la forma $y = f(x)$, esto quiere decir que no siempre es posible expresar a y en términos de x , en ocasiones sucede que una misma función corta el eje en más de una ocasión como sucede en las funciones:

$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

$$y^2 - x = 0$$

En las que y no aparece explícitamente en términos de x . Es posible que una posición de una función pueda ser expresada en términos de x , siempre y cuando la función pueda ser definida dentro del intervalo cerrado $[a, b]$.

Método de diferenciación implícita.

Si una curva $y = f(x)$ es lo suficientemente suave en todo su recorrido como para tener tangente en cualquiera de sus puntos, entonces varias de sus partes serán graficas de **funciones diferenciables**.

Cuando se tienen ecuaciones de la forma

$$x^5 + 4xy^3 - 3y^7 - 2 = 0$$

En donde no es posible o fácil de despejar explícitamente la variable dependiente en términos de la variable independiente. Utilizando el método de diferenciación implícita es posible determinar el valor de dy/dx .

El método consiste en realizar la diferenciación término a término de cada uno de los componentes de la ecuación original.

Esto es más claro si se analiza mediante la ayuda de un ejemplo.

Hallar dy/dx para $xy = 1$

$$\frac{d}{dx}(xy) = \frac{d}{dx}(1) \quad \text{Derivando Implícitamente.}$$

$$x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} = 0 \quad \text{Igualando a cero}$$

$$x \frac{dy}{dx} + y = 0 \quad \text{Derivada de } x \text{ para } x \text{ es uno (1).}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y}{x} \quad \text{Despejando la derivada.}$$

Como se puede apreciar el método consiste en plantear y despejar el término dy/dx .

En este tipo de ecuaciones es perfectamente válida la representación de la derivada como dy/dx , como y' .

Ejercicios

Derivar las siguientes expresiones:

1 $x^2 + y^2 = 25$

3 $x^3 + x^2y + 4y^2 = 6$

5 $x^2y + xy^2 = 3x$

7 $\sqrt{x+y} + \sqrt{xy} = k$

9 $\sqrt[3]{1+x^2y^2} = 2xy$

2 $x^3 + y^3 = 6xy$

4 $x^2 - 2xy + y^3 = c$

6 $\frac{y}{x-y} = x^2 + 1$

8 $\sqrt{xy} = 1 + x^2y$

10 $\sqrt{x} + \sqrt{y} = l$

Tangentes

Con el método de la diferenciación implícita es posible calcular el valor de la tangente a una función para cualquier pareja de valores dados (x, y) , lo que se logra sustituyendo en la ecuación de la derivada los valores dados de x y y .

Ejemplo 1: Hallar la pendiente de la tangente en el punto $(1, 2)$, para la función

$$x^2 + x y + y^2 = 7$$

Se realiza la diferenciación en ambos lados del signo igual teniendo en cuenta que se trata de derivadas de potencias y productos, las que se obtienen por los métodos que ya se han visto.

$$2x \frac{dx}{dx} + \left(x \frac{dy}{dx} + y \frac{dx}{dx} \right) + 2y \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{Derivando respecto a } x$$

$$(x + 2y) \frac{dy}{dx} = -(2x + y) \frac{dx}{dx} \quad \text{Agrupando términos}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-(2x + y)}{(x + 2y)} \quad \text{Despejando } \frac{dy}{dx}$$

Para el caso particular del punto $(1, 2)$ se tiene:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,2)} = \frac{-2(1) - 2}{1 + 2(2)} = -\frac{4}{5} \quad \text{Evaluando para el punto dado}$$

El valor de la pendiente para el punto dado es $-\frac{4}{5}$

Rectas Normales

La recta normal a una curva en un punto dado se interpreta como la recta perpendicular a la recta tangente a la función en ese punto.

Una aplicación de este concepto es el ángulo de incidencia de los rayos luminosos en una lente de aumento.

Ejemplo: Hallar la ecuación de las rectas normal y tangente a la curva:

$$y^2 - 6x^2 + 4y + 19 = 0 \text{ en el punto } (2,1)$$

Se realiza diferenciación con relación a x en ambos lados de la igualdad.

$$2y \frac{dy}{dx} - 12x \frac{dx}{dx} + 4 \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{Por diferenciación Implícita.}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{12x \frac{dx}{dx}}{(2y+4)} = \frac{12x}{(2y+4)} = \frac{6x}{(y+2)} \quad \text{Agrupando términos en } \frac{dy}{dx}$$

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{(1,2)} = \frac{6(1)}{2+2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad \text{Evaluando para el punto dado.}$$

$$y - 1 = \frac{3}{2}(x - 2) \quad \text{Ecuación de la recta tangente.}$$

$$y - 1 = -\frac{2}{3}(x - 2) \quad \text{Ecuación de la normal}$$

En esta forma es posible obtener las ecuaciones de las rectas normal y tangente a una función continua para un punto dado como (x, y) .

Ejercicios propuestos:

En los siguientes ejercicios, encontrar las ecuaciones de la recta normal y tangente a la gráfica en el punto dado:

1. $x^2 + x y - y^2 = 1$ en $P(2, 3)$

2. $x^2 + y^2 = 25$ en $P(3, -4)$

3. $x^2 + 4y^2 = 4$ en $P\left(\sqrt{2}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

4. $3(x^2 + y^2)^2 = 100xy$ en $P(3, 1)$

5. $\text{Sen}(y) = x$ en $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$

6. $x^2(x^2 + y^2) = y^2$ en $P\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Potencias enteras negativas de una función diferenciable

Regla No. 3.8

Potencias enteras negativas de una función diferenciable

La derivada de $y = u^n$, en un punto donde $u = g(x)$ es

diferenciable y distinta de cero, está dada por:

$$\frac{d}{dx}(u^n) = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$$

Donde n es un entero negativo.

Regla de la potencias para exponentes fraccionados

Si u es una función diferenciable de x , y , q y p son enteros con $q > 0$, entonces:

$$\frac{d}{dx} u^{p/q} = \frac{p}{q} u^{\left(\frac{p}{q}-1\right)} \frac{du}{dx}$$

Siempre que $u \neq 0$ si $p/q < 1$.

Regla No. 3.9

Esta regla puede entenderse como la ampliación de la regla No. 6, en donde se ha reemplazo n por $\frac{p}{q}$, y equivale al cualquier número racional.

Ejercicios Resueltos :

1. Encuentre todos los puntos de la gráfica de $y = x^3 - x^2$ donde la tangente a la función sea horizontal.

Por definición, una línea recta horizontal tiene pendiente cero, si la primera derivada representa la pendiente de la recta tangente a la función, el problema se resuelve buscando aquellos puntos para los cuales la primera derivada se hace cero.

Primera derivada: $y' = 3x^2 - 2x$

Para encontrar los puntos de tangencia horizontal se buscan los valores de x para los cuales se cumpla que $y' = 0$, así:

$$y' = 3x^2 - 2x = 0$$

$$x(3x-2)=0$$

Para que la igualdad se cumpla, se requiere que, bien $x=0$, ó que $(3x-2)=0$, lo que implica:

$$\begin{aligned} (3x_2-2) &= 0 \\ x_1 &= 0 \text{ y } 3x_2 = 2 \\ x_2 &= \frac{2}{3} \\ \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \Rightarrow y = 0^3 - 0^2 = 0 \\ x_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow y = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = -\frac{4}{27} \end{cases} \end{aligned}$$

2. La altura s en pies de una pelota sobre el piso a los t segundos está dada por $s = -16t^2 + 40t + 100$.

Por definición de velocidad se sabe que la velocidad instantánea está definida con la primera derivada evaluada en el momento dado.

- a.Cuál es la velocidad instantánea cuando $t = 2$?

Para conocer el valor de la velocidad instantánea se evalúa la primera derivada para el punto dado $t = 2$:

$$s' = -32t + 40 \Big|_{t=2} = -32(2) + 40 = -64 + 40 = -24 \text{ ft/seg}$$

- b. Cuando es cero la velocidad instantánea?

La velocidad instantánea se hace cero para cuando la primera derivada de hace cero, es decir para cuando la recta tangente a la función tiene pendiente cero.

$$s' = -32t + 40 = 0 \Rightarrow 32t = 40 \Rightarrow t = \frac{40}{32} = \frac{5}{4} \text{ seg}$$

3. Encontrar $\frac{dy}{dx}$, si $y = u^3 - 3u^2 + 1$ y $u = x^2 + 2$

Por definición $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{dy}{du} \right) \left(\frac{du}{dx} \right)$, luego, si:

$$y = u^3 - 3u^2 \Rightarrow \frac{dy}{du} = 3u^2 - 6u, \text{ y } u = x^2 + 2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 2x$$

Luego, la derivada será: $\frac{dy}{dx} = (3u^2 - 6u)(2x) = (3u)(u - 2)(2x) = 6xu(u - 2)$

Para expresar esta derivada como $\frac{dy}{dx}$, se utiliza la expresión $u = x^2 + 2$, luego:

$$\frac{dy}{dx} = 6xu(u - 2) = 6x(x^2 + 2)[(x^2 + 2) - 2] = (6x^3 + 12x)(x^2) = \boxed{6x^5 + 12x^3}$$

4. Hallar $\frac{dy}{dx}$ si $x^2y + 2y^3 = 3x + 2y$ (Derivada Implícita)

Derivando Implícitamente, se tiene:

$$\left[x^2 \left(\frac{d}{dx} y \right) + y \left(\frac{d}{dx} x^2 \right) \right] + \left[2 \left(3y^2 \frac{dy}{dx} \right) + y^3 \left(\frac{d}{dx} (2) \right) \right] =$$

$$= \left[3 \frac{d}{dx} (x) + x \frac{d}{dx} (3) \right] + \left[2 \left(\frac{d}{dx} (y) \right) + y \left(\frac{d}{dx} (2) \right) \right]$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + y 2x \frac{dx}{dx} + 2 \left(3y^2 \frac{dy}{dx} \right) = 3 \frac{dx}{dx} + 2 \frac{dy}{dx} \quad \text{Eliminando términos nulos:}$$

$$x^2 \frac{dy}{dx} + 6y^2 \frac{dy}{dx} - 2 \frac{dy}{dx} = 3 \frac{dx}{dx} - y 2x \frac{dx}{dx} \quad \text{Agrupando términos en } \frac{dy}{dx} \text{ y } \frac{dx}{dx}, \text{ se tiene:}$$

$$\frac{dy}{dx} (x^2 + 6y^2 - 2) = \frac{dx}{dx} (3 - 2yx) \quad \text{Factorizando:}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(3 - 2yx)}{(x^2 + 6y^2 - 2)} \quad \text{Despejando } \frac{dy}{dx}$$