3.1. REGLA DE LA CADENA Y ECUACIONES PARAMETRICAS.

Regla de la cadena

La regla para calcular la derivada de la composición de dos funciones establece que la derivada de su composición es el producto de las derivadas. Este enunciado es conocido como la ***regla de la cadena***.

Ejemplo: Una partícula se mueve a lo largo de la recta $y = 5x - 2$ de manera que su coordenada ***x*** en el tiempo ***t*** es $x = 3t$. Calcular dy/dt como función de ***t***,

$$y = 5x - 2 = 5(3t) - 2 = 15t - 2$$

Por lo tanto,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(15t - 2) = 15$$

Nótese que:

$$\frac{dy}{dx} = 5 \qquad \frac{dx}{dt} = 3$$

y

$$\frac{dy}{dt} = 3 \times 5 = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

En otras palabras la regla de la cadena define que si dos funciones son continuas, la derivada de la composición de las dos funciones será el producto de sus derivadas.

Regla No.3.10

Regla de la Cadena
Suponiendo que $h = g \circ f$ es la composición de las funciones diferenciables $y = g(x)$ y $x = f(x)$. Entonces, ***h*** es una función diferenciable de ***t*** cuya derivada en cada valor de ***t*** es: $h(t) = g'(f(t)) \times f'(t)$

La particularidad de esta formula es que establece la forma como se debe evaluar la derivada, existen otras formulas para evaluar la derivada de la composición,

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Otra es, $\left.\frac{dy}{dt}\right|_t = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{f(t)} \left.\frac{dx}{dt}\right|_t$

Demostración de la Regla de la Cadena

Si $x = f(t)$ es diferenciable en t_0 entonces un incremento Δt produce otro incremento Δx
tal que:

$$\Delta x = f'(t_0)\Delta t + \varepsilon_1 \Delta t = [f'(t_0) + \varepsilon_1]\Delta t$$

y, si $y = g(x)$ es diferenciable en $x = f(t_0)$ entonces un incremento Δx produce otro incremento Δy tal que:

$$\Delta y = g'(x_0)\Delta x + \varepsilon_2 \Delta x = [g'(x_0) + \varepsilon_2]\Delta x$$

Estas dos ecuaciones relacionan los incrementos $\Delta x \quad y \quad \Delta y$ con sus aproximaciones de la recta tangente, en estas ecuaciones $\varepsilon_1 \to 0$. cuando $\Delta t \to 0$, y $\varepsilon_2 \to 0$ cuando $\Delta x \to 0$.

Combinando estas dos ecuaciones se tiene:

$$\Delta y = [g'(x_0) + \varepsilon_2]\Delta x = [g'(x_0) + \varepsilon_2][f'(t_0) + \varepsilon_1]\Delta t$$

Dividiendo todo por Δt

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = [g'(x_0) + \varepsilon_2][f'(t_0) + \varepsilon_1]$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta t} = g'(x_0)f'(t_0) + \varepsilon_2 f'(t_0) + \varepsilon_1 g'(x_0) + \varepsilon_1\varepsilon_2$$

Cuando $\Delta t \to 0$, también lo hacen $\Delta x, \varepsilon_1, \; y \; \varepsilon_2$, y resulta:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = g'(x_0)f'(t_0) = g'(f(t_0))f'(t_0)$$

Ejemplo:

Hallar dy/dt en $t = -1$, si: $g(x) = y = x^3 + 5x - 4$, y $f(t) = x = t^2 + t$

Según la expresión : $\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{f(t)} \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t}$, se tiene:

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=1} = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=f(-1)} \left.\frac{dx}{dt}\right|_{t=-1} = \left.\left(3x^2+5\right)\right|_{x=0} \left.(2t+1)\right|_{t=-1} = (5)(-1) = -5$$

Ejercicios :

1 $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

2 $y = \left(x^3-1\right)^{100}$

3 $y = \left(2x+1\right)^5\left(x^3-x+1\right)^4$

4 $y = \left(2x-5\right)^4\left(8x^2-5\right)^{-3}$

5 $y = \left(x^2+1\right)\sqrt[3]{x^2+2}$

6 $y = \left(x^3+4x\right)^7$

7 $y = \left(t-\frac{1}{t}\right)^{3/2}$

8 $y = \frac{1}{\left(t^2-2t-5\right)^4}$

9 $s(t) = \sqrt[4]{\frac{t^3+1}{t^3-1}}$

10 $f(z) = \frac{1}{\sqrt[5]{2z-1}}$

Ecuaciones Paramétricas

En lugar de escribir una curva expresando la coordenada y de un punto $P(x,y)$ de la curva en función de ***x***, frecuentemente es más conveniente expresar ambas coordenadas en función de una tercera variable.

$$x = f(t) \qquad\qquad y = g(t)$$

Esta ecuaciones se conocen con el nombre de ***ecuaciones Paramétricas*** y la variable ***t*** es conocida como el *parámetro.*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt}$$

Expresión que también puede expresarse como:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

Lo anterior implica resolver la derivada de cada una de las funciones con relación al parámetro.

$$\frac{d}{dt}(g(t)) \qquad y \qquad \frac{d}{dt}(h(t))$$

Ejemplo:

Dada la siguiente función definida por las ecuaciones paramétricas $x = t - t^2$ y $y = t - t^3$, determinar su derivada.

$$\frac{dx}{dt} = 1 - 2t \qquad \textit{Derivando a } \boldsymbol{x}$$

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 3t^2 \qquad \textit{Derivando a } \boldsymbol{y}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{(1-3t^2)}{(1-2t)} \qquad \textit{Por definición.}$$

Derivadas segundas en forma Paramétrica:

Si se tiene que:

$$x = f(t) \qquad y = g(t) = g(h(t))$$

Definen a ***y*** como una función de ***x*** dos veces diferenciable, entonces es posible calcular:

$$\frac{dy}{dx} = y' = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

lo que permite definir la segunda derivada como:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'/dt}{dx/dt}$$

Esta ecuación permite expresar la segunda derivada de ***y*** con respecto a ***x*** $\left(d^2y/dx^2\right)$ como:

1. Expresar $y' = dy/dx$ en función de ***t***.
2. Diferenciar dy/dx respecto a ***t***.
3. Dividir el resultado por dx/dt

Ejemplo:

Continuando con el ejemplo anterior, la segunda derivada será:

CALCULO DIFERENCIAL

1. Expresar $y' = \dfrac{\left(1-3t^2\right)}{\left(1-2t\right)}$

2. Derivar y' con respecto a ***t:***

$$\frac{dy'}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\frac{1-3t^2}{1-2t}\right] = \frac{\left(1-2t\right)\left(-6t\right)-\left(1-3t^2\right)\left(-2\right)}{\left(1-2t\right)^2} = \frac{2-6t+6t^2}{\left(1-2t\right)^2}$$

3. Dividir el resultado por dx/dt

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'/dt}{dx/dt} = \frac{\dfrac{2-6t+6t^2}{\left(1-2t\right)^2}}{\left(1-2t\right)} = \frac{2-6t+6t^2}{\left(1-2t\right)^3}$$

Ejercicios Propuestos

1. Hallar dz/dx, si $z = w^2 - w^{-1}$ y $w = 3x$
2. Hallar dy/dx si $y = 2v^3 + 2v^{-3}$ y $v = \left(3x+2\right)^{2/3}$
3. Hallar dr/dt, si $r = \left(s+1\right)^{1/2}$ y $s = 16t^2 - 20t$
4. Hallar da/db , si $a = 7r^3 - 2$, y $r = 1 - 1/b$
5. Hallar dy/dt, si $2x - 3y = 9$, y $2x + t/3 = 1$
6. Hallar dy/dt, si $y = \sqrt{x+2}$, y $x = 2/t$, $t \rangle 0$
7. Hallar dy/dt, si $y = x^4$, y $x = \sqrt[3]{t}$
8. Hallar dy/dt, si $y = \dfrac{x^2}{x^2+1}$, y $x = \sqrt{2t+1}$
9. Hallar d^2y/dx^2 , si $x = t - t^2$, y $y = t - t^3$