Dominio de la frecuencia

Temario

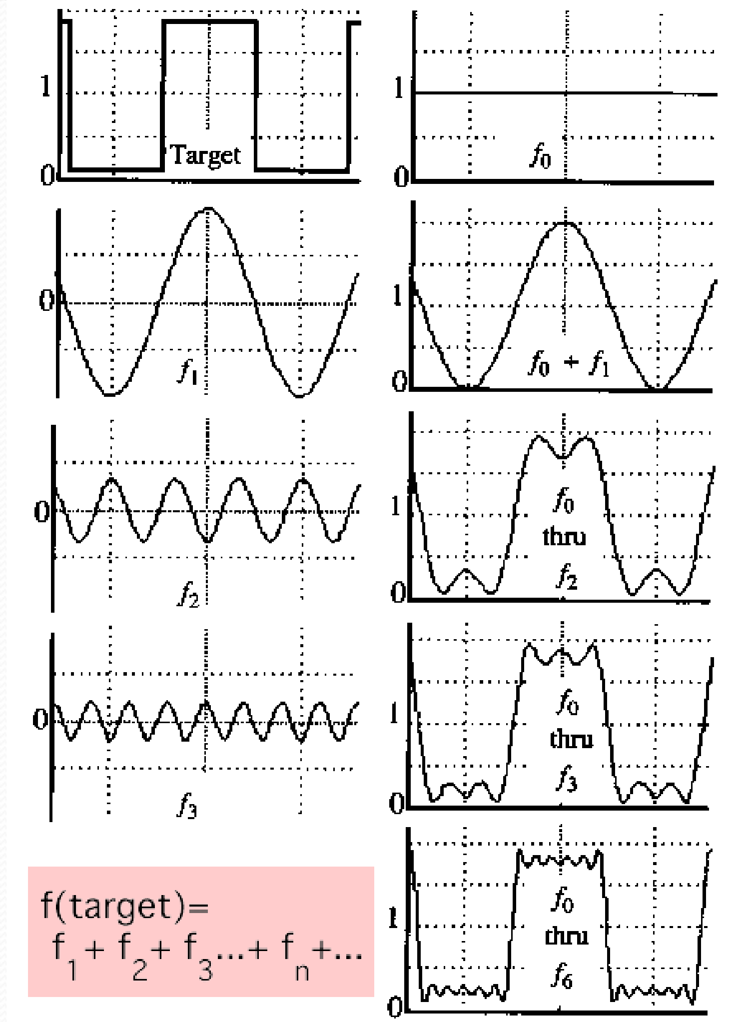
- Transformada de Fourier.
- Filtrado de frecuencia.
- Imágenes híbridas.

Pensando en términos de frecuencia

- Joseph Fourier (1768 – 1830):
- Cualquier función de una variable se puede reescribir como una suma ponderada de senos y cosenos de diferentes frecuencias.

Suma de senos

- Bloque de construcción:
- $A\sin(\omega x + \varphi)$
- Agregar suficientes de ellos para obtener cualquier señal $f(x)$ deseada.

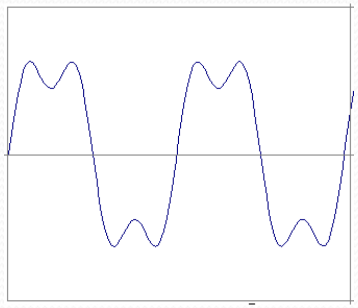


f(target)= $f_1 + f_2 + f_3 \ldots + f_n + \ldots$

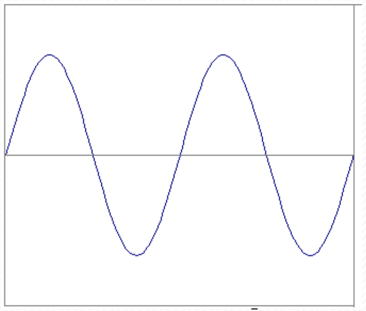
Fuente: Derek Hoiem (UIUC)

Espectro de frecuencias

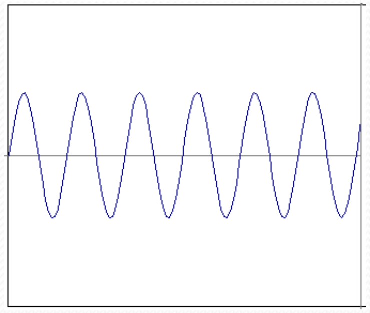
- Ejemplo: $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f)t)$



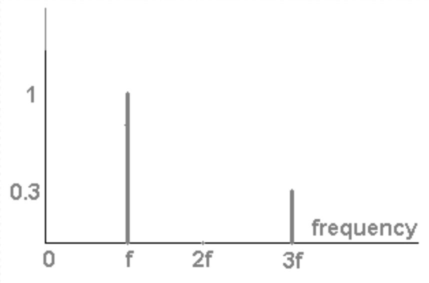
=



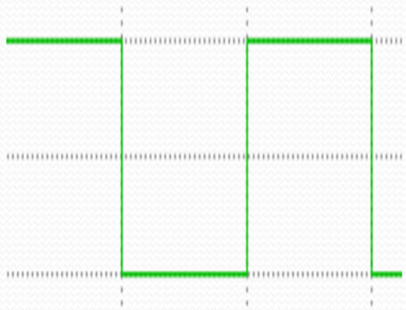
+



Fuente: Derek Hoiem (UIUC)

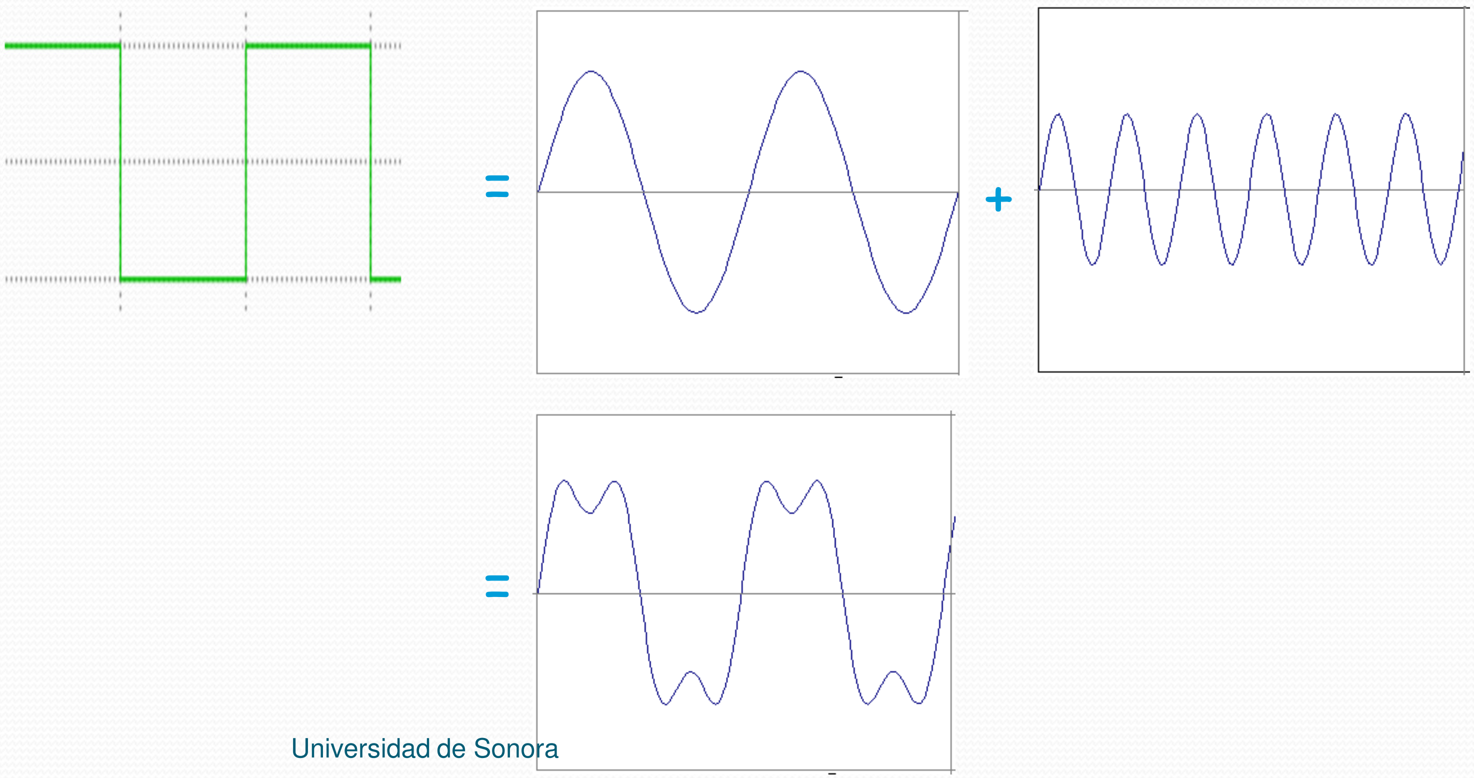


Espectro de frecuencias

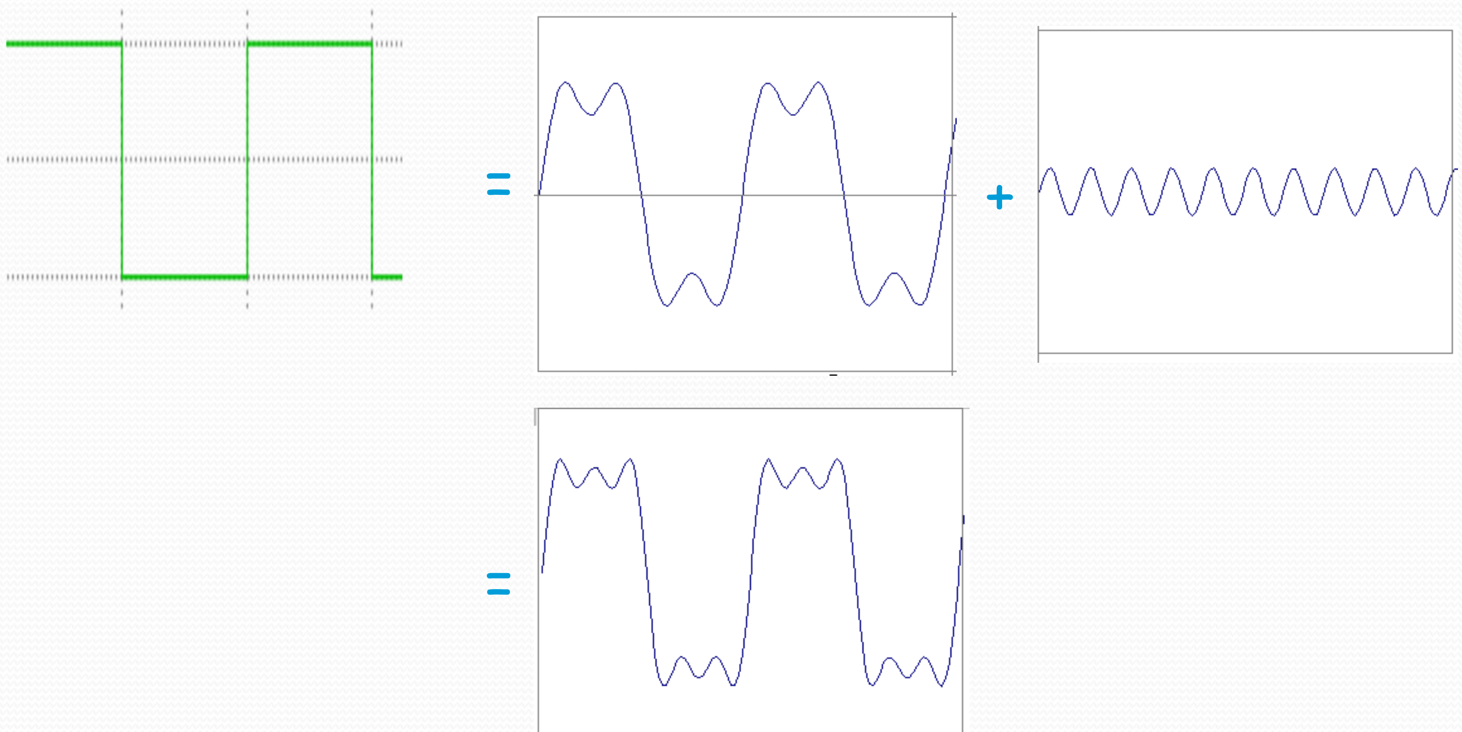


Fuente: Derek Hoiem (UIUC)

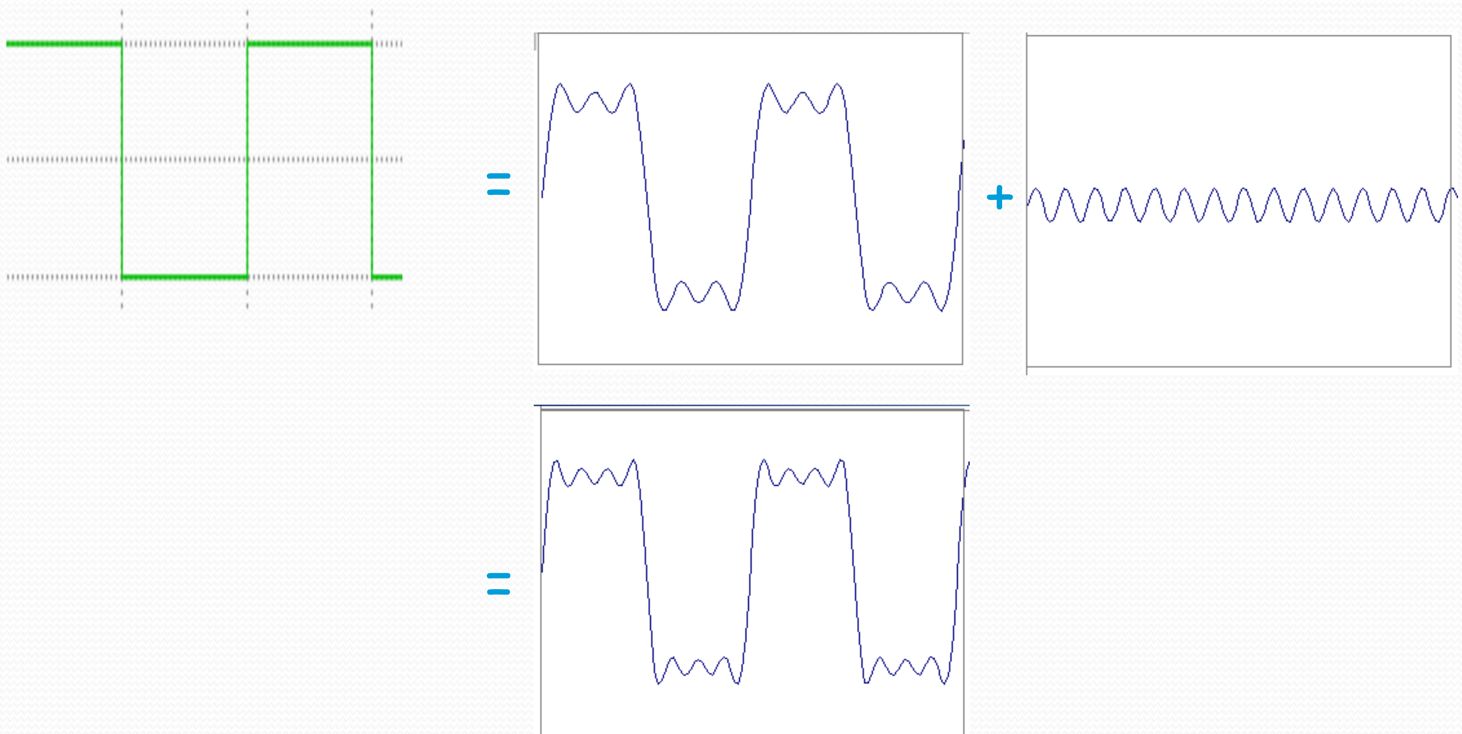
Espectro de frecuencias



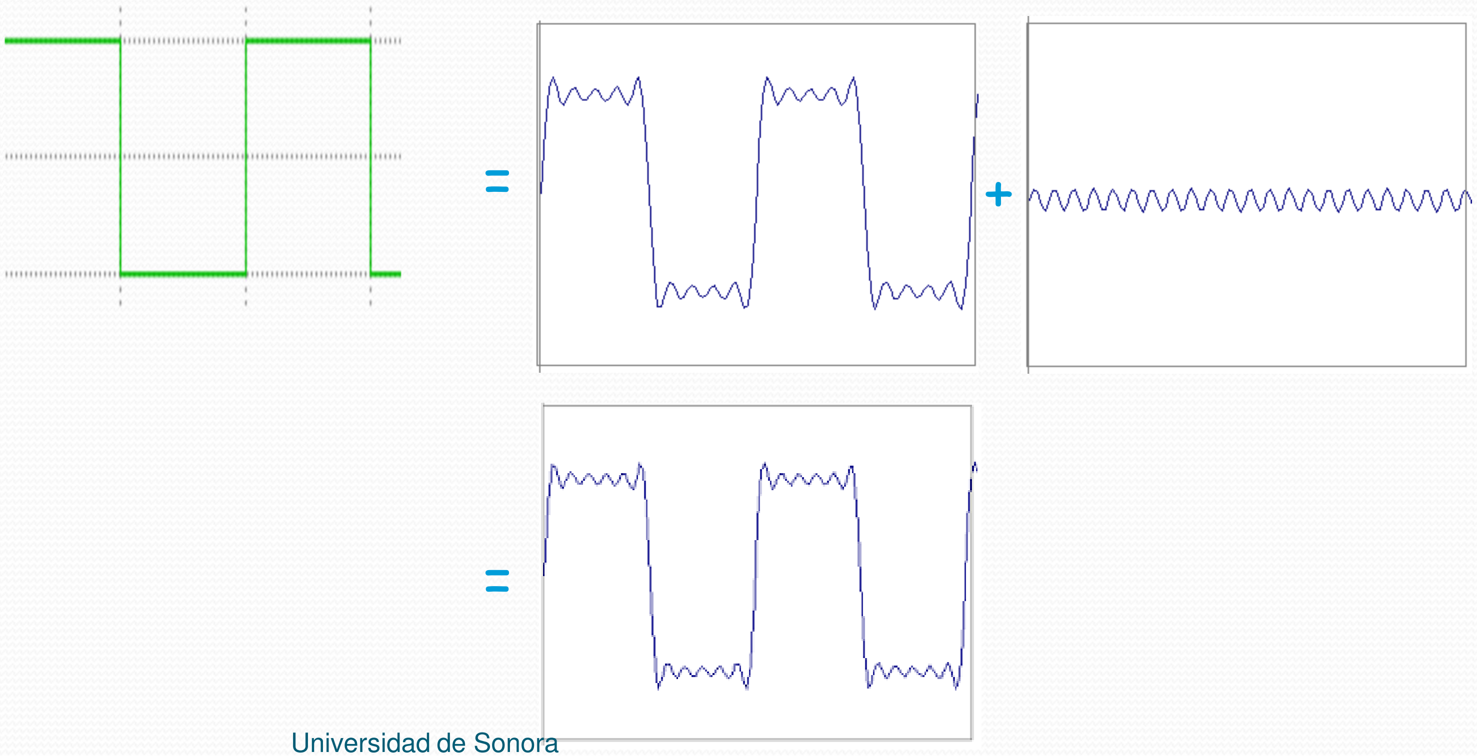
Espectro de frecuencias



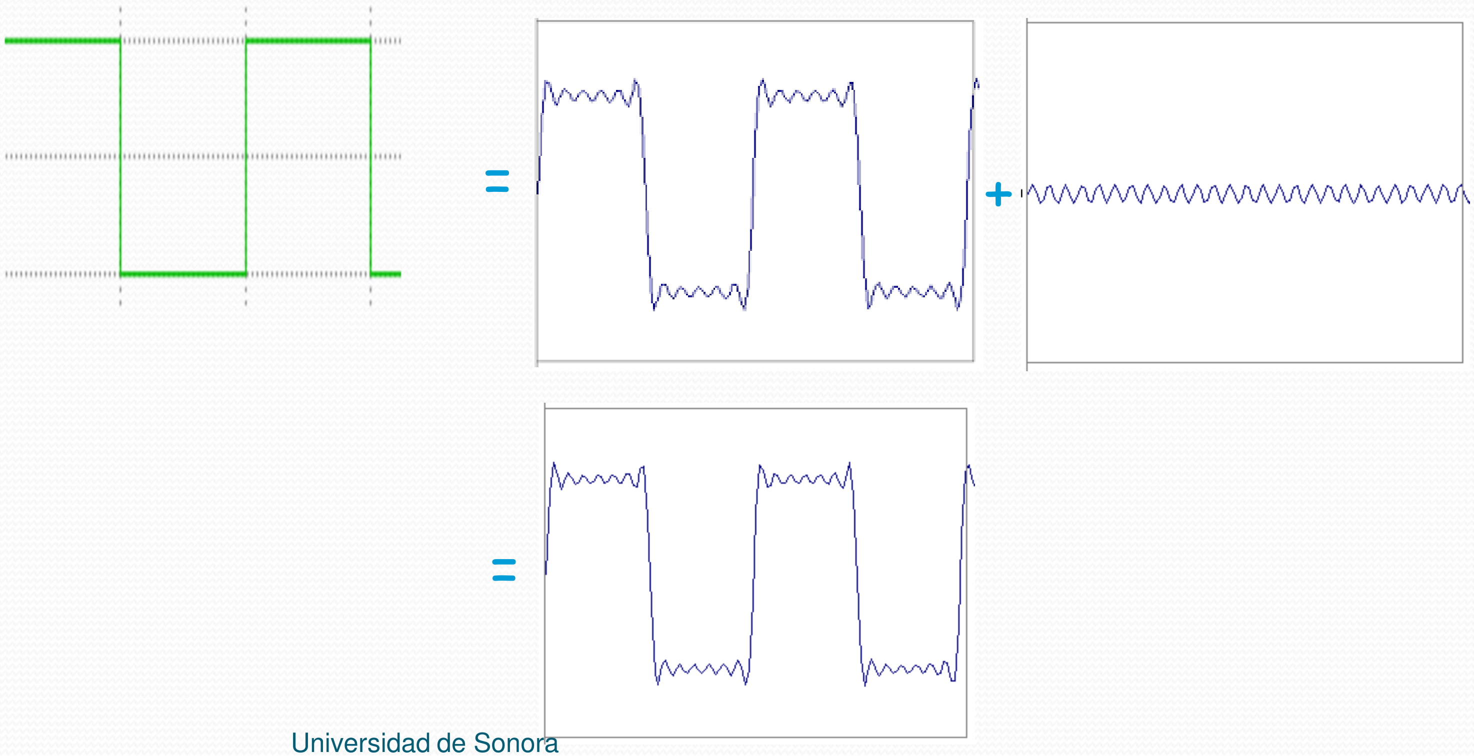
Espectro de frecuencias



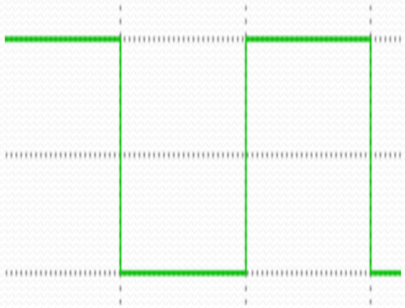
Espectro de frecuencias



Espectro de frecuencias

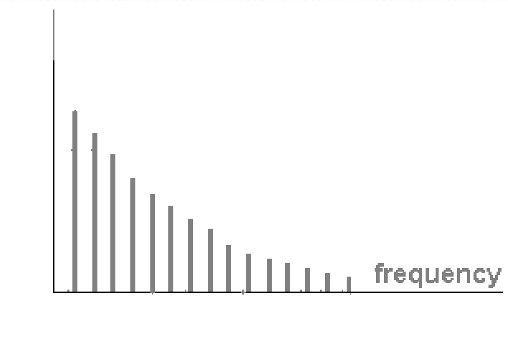


Espectro de frecuencias



=

$$\boxed{A\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin(2\pi kt)}$$



Otras señales

- El análisis de Fourier se puede aplicar a otro tipo de señales (p.e. música, imágenes).

Análisis de Fourier en imágenes

- Transformada discreta de Fourier en 2D (DFT 2D).
- La DFT 2D descompone una imagen digital en sus componentes de frecuencia.
- La imagen se representa como una combinación de diferentes ondas sinusoidales.
- La salida de la DFT 2D es un espectro (spectrum).
- Cada coeficiente es un número complejo que indica la amplitud y la fase de una sinusoide de frecuencia específica.

Análisis de Fourier en imágenes

- La DFT 2D de una imagen se denota como $F(u, v)$.
- Cada elemento de F es un número complejo $\omega = R(\omega) + I(\omega)$.
- De F se puede calcular la amplitud y la fase.

Amplitud

- $A(u,v) = |F(u,v)| = \sqrt{R(\omega)^2 + I(\omega)^2}$
- La amplitud indica la intensidad de cada frecuencia.
- Se utiliza en el filtrado, eliminación de ruido y compresión de imágenes.

Fase

- $\phi = \arg(F(u,v)) = \operatorname{atan}\left(\frac{I(\omega)}{R(\omega)}\right)$
- La fase indica información espacial.
- La fase codifica la estructura y la geometría de la imagen.
- Las unidades son radianes entre $-\pi$ y $+\pi$.

Usos comunes de la DFT 2D

- a) Filtrado.
- En el dominio de la frecuencia, los filtros son máscaras simples.
- Filtro pasa bajas: mantiene las frecuencias bajas → la imagen se desenfoca.
- Filtro pasa altas: mantiene las frecuencias altas → solo se conservan los bordes y los detalles.

Usos comunes de la DFT 2D

- b) Compresión
- Muchas amplitudes son pequeñas y pueden descartarse (p.e., JPEG utiliza algo parecido con la DCT).
- Mantener solo amplitudes grandes reduce el almacenamiento, a la vez que conserva las frecuencias importantes.
- c) Reducción de ruido
- El ruido suele aparecer en ciertas bandas de frecuencia.
- Se pueden suprimir esas frecuencias modificando el espectro de amplitud.

Usos comunes de la DFT 2D

- d) Reconstrucción de la imagen
- Se puede reconstruir la imagen combinando la amplitud y la fase:
- $I(u,v) = F^{-1}\left(A(u,v) \cdot e^{-j\phi(u,v)}\right)$
- Dato interesante: si se toma la fase de una imagen y la amplitud de otra, la reconstrucción se asemeja más a la imagen que proporcionó la fase.
- Esto demuestra que la fase contiene la información estructural.

Usos comunes de la DFT 2D

- e) Registro y emparejamiento
- Los métodos de correlación de fase ayudan a alinear imágenes, detectar traslaciones y emparejar patrones.

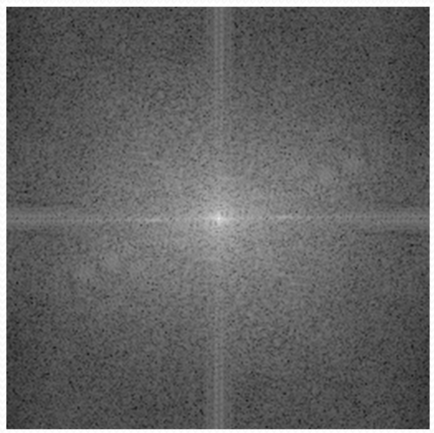
DFT 2D en Python

- np.fft.fft2() – Calcula la DFT 2D (se recomienda que los pixeles de la imagen sean de punto flotante con valores entre 0 y 1).
- np.fft.ifft2() – Calcula la inversa de la DFT 2D.
- np.fft.fftshift() – Desplaza el componente de frecuencia cero al centro.
- np.fft.ifftshift() – La inversa de fftshift. Aunque idénticas para x de longitud par, difieren en una muestra para x de longitud impar.
- np.abs() – Obtiene la amplitud.
- np.angle() – Obtiene la fase.

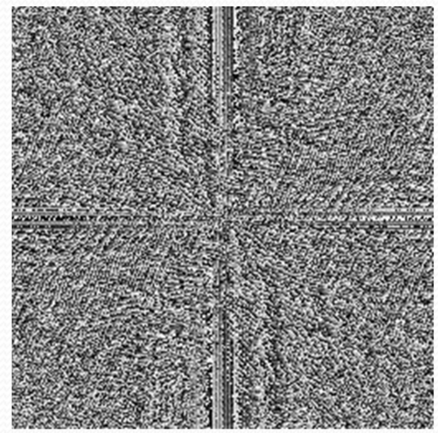
Análisis de Fourier en imágenes

Imagen

Amplitud

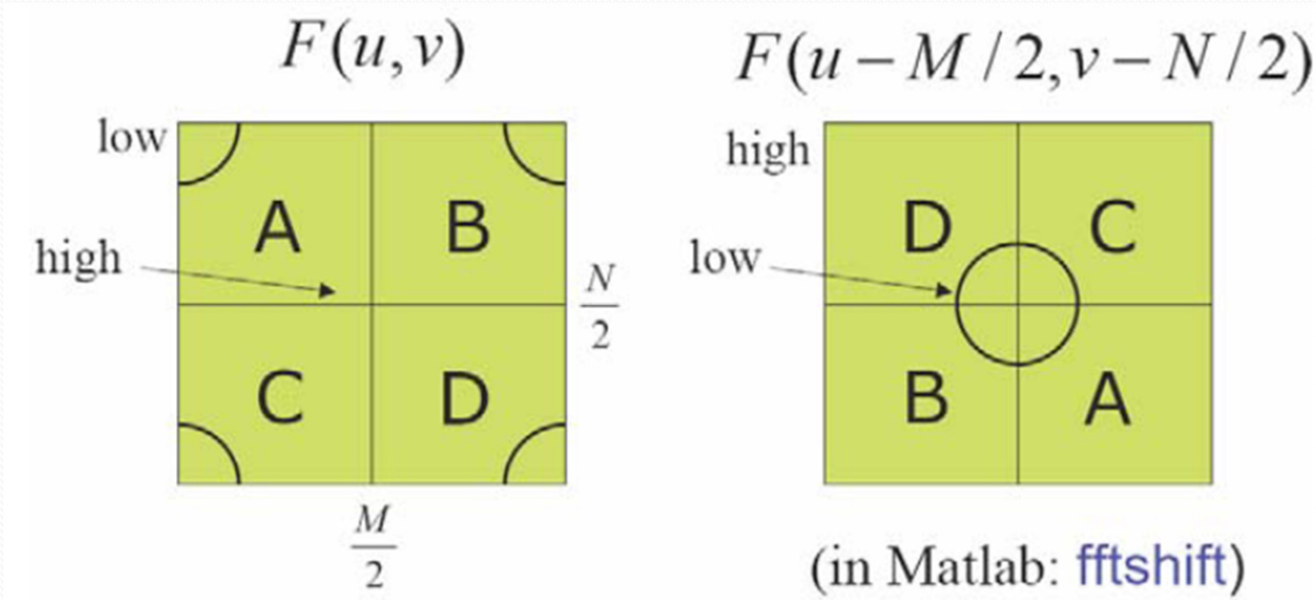


Fase



Fuente: **https://homepages.inf.ed.ac.uk/rbf/HIPR2/fourier.htm**

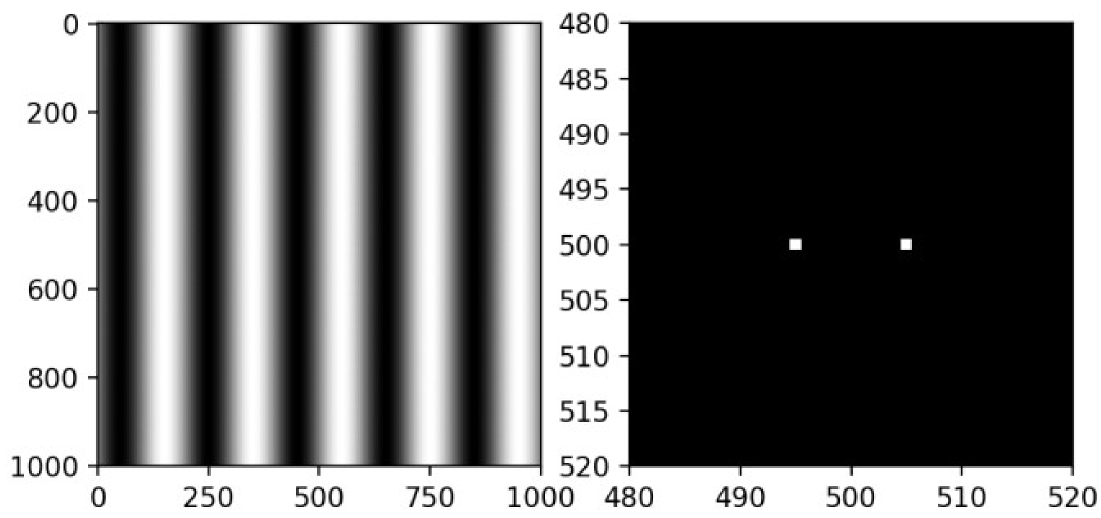
Desplegando la DFT 2-D



Fuente: https://staff-old.najah.edu/sites/default/files/Chapter4_Frequency_Enhancement.pdf

Análisis de Fourier en imágenes

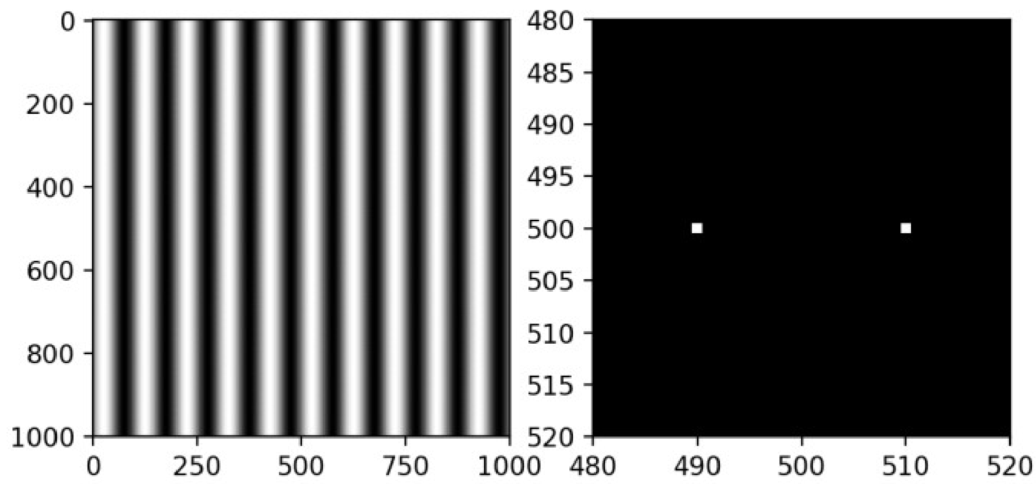
wavelength = 200



Fuente: https://thepythoncodingbook.com/2021/08/30/2d-fourier-transform-in-python-and-fourier-synthesis-of-images

Análisis de Fourier en imágenes

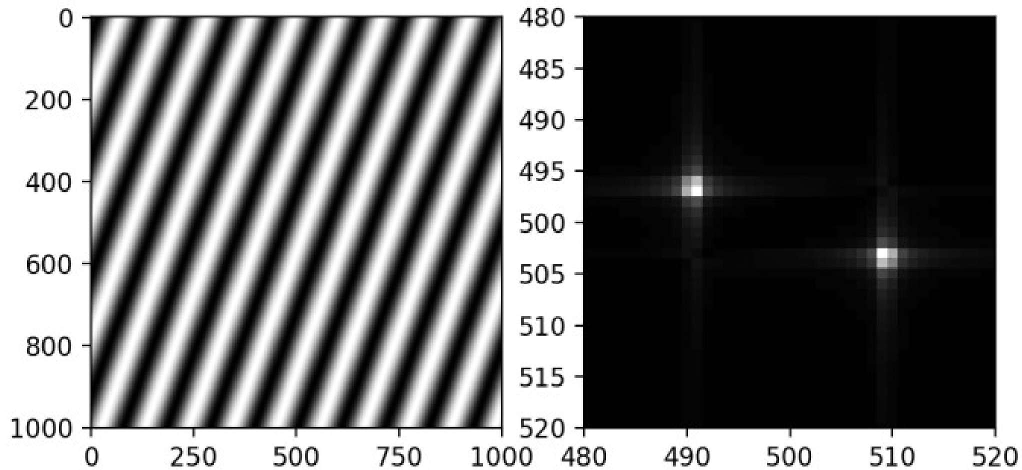
wavelength = 100



Fuente: https://thepythoncodingbook.com/2021/08/30/2d-fourier-transform-in-python-and-fourier-synthesis-of-images

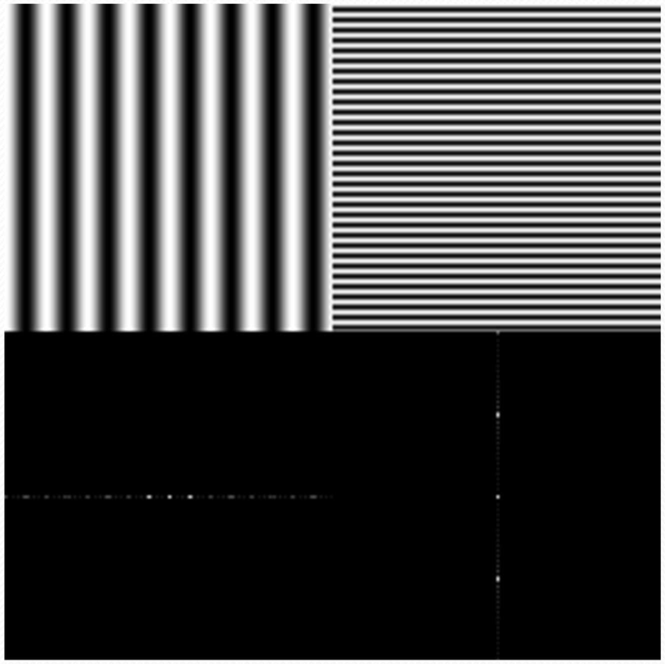
Análisis de Fourier en imágenes

wavelength = 100



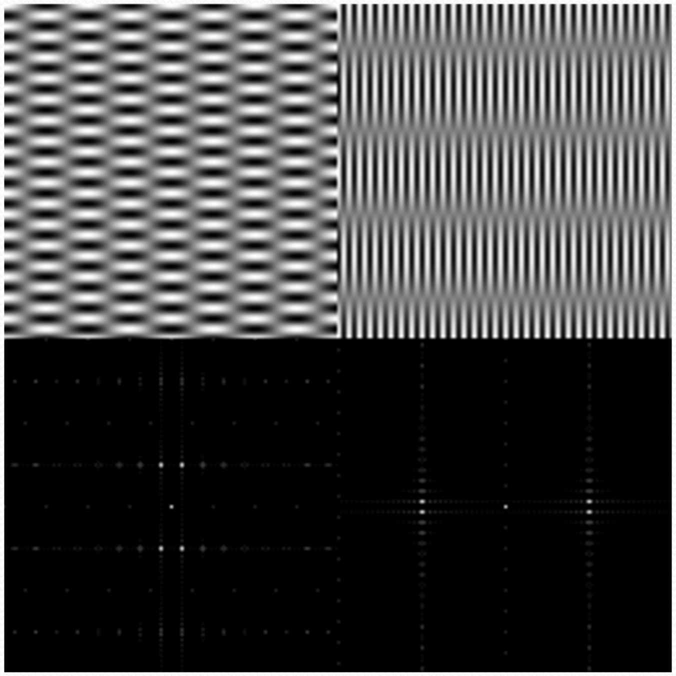
Fuente: https://thepythoncodingbook.com/2021/08/30/2d-fourier-transform-in-python-and-fourier-synthesis-of-images

Análisis de Fourier en imágenes



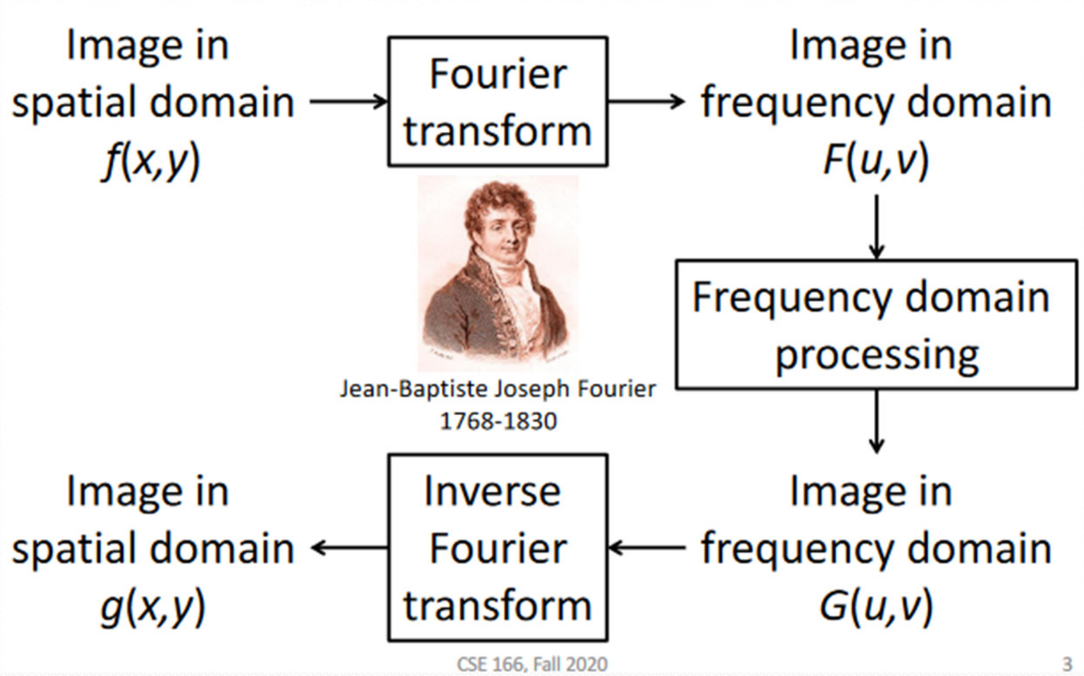
Fuente: https://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html

Análisis de Fourier en imágenes



Fuente: https://www.cs.unm.edu/~brayer/vision/fourier.html

Filtrado en frecuencia



Fuente: https://cseweb.ucsd.edu/classes/fa20/cse166-a/lec7.pdf

Teorema de la convolución

- Teorema de la convolución: la convolución en el dominio espacial equivale a la multiplicación en el dominio de la frecuencia.
- $I \star H = F^{-1}[F(I) \cdot F(H)]$

Comparación

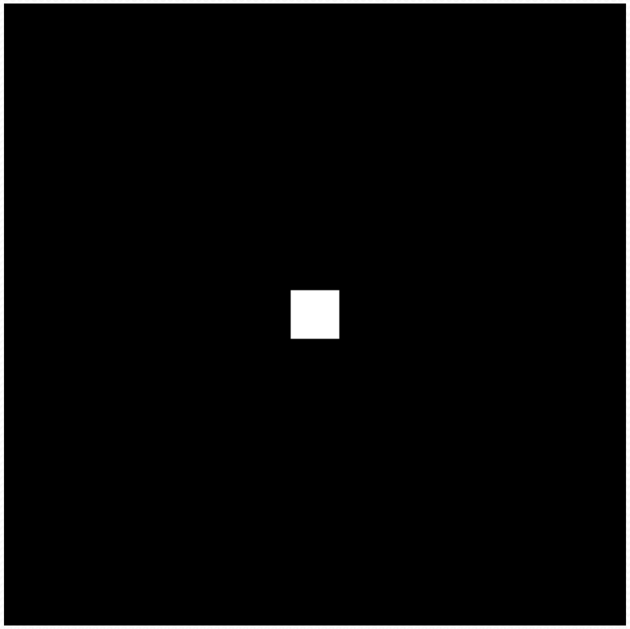
- Todos los filtros de frecuencia se pueden implementar en el dominio espacial.
- Es menos costoso realizar el filtrado en el dominio espacial.
- El filtrado de frecuencia es apropiado si no existe un kernel sencillo en el dominio espacial.

Ejemplos de filtrado en frecuencia

- Filtro de caja.
- Filtro gaussiano.

Filtro de caja en tonos de gris

Imagen original

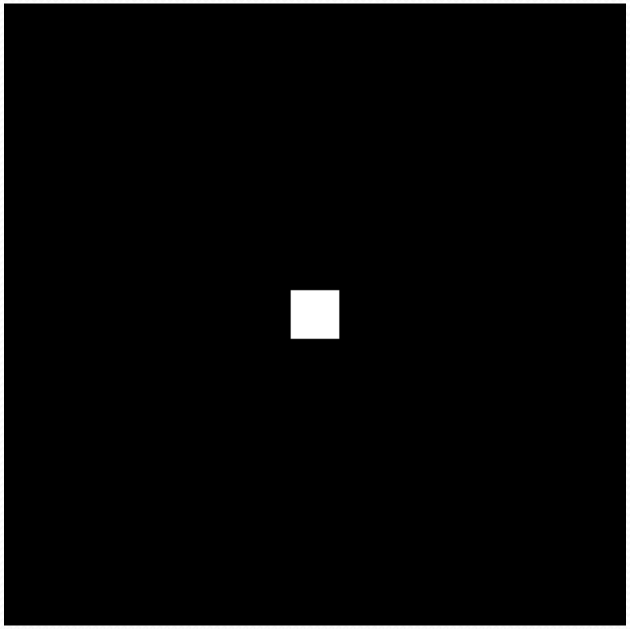


Máscara (40 x 40)

Imagen filtrada

Filtro de caja en color

Imagen original

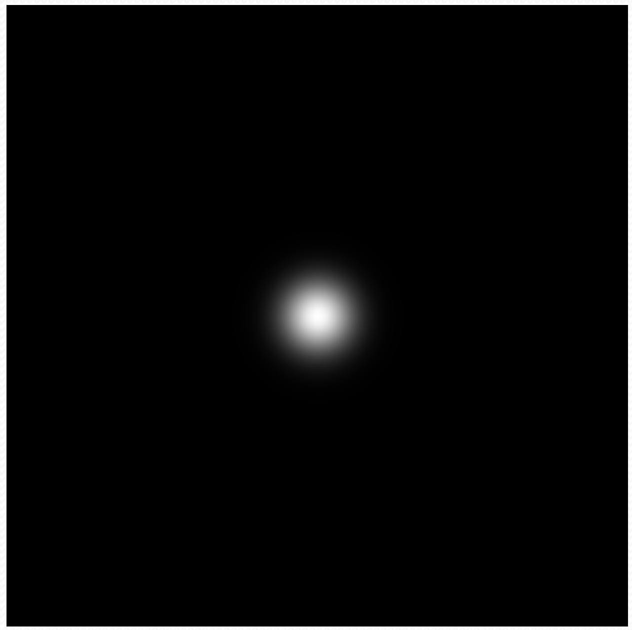


Máscara (40 x 40)

Imagen filtrada

Filtro gaussiano en tonos de gris

Imagen original

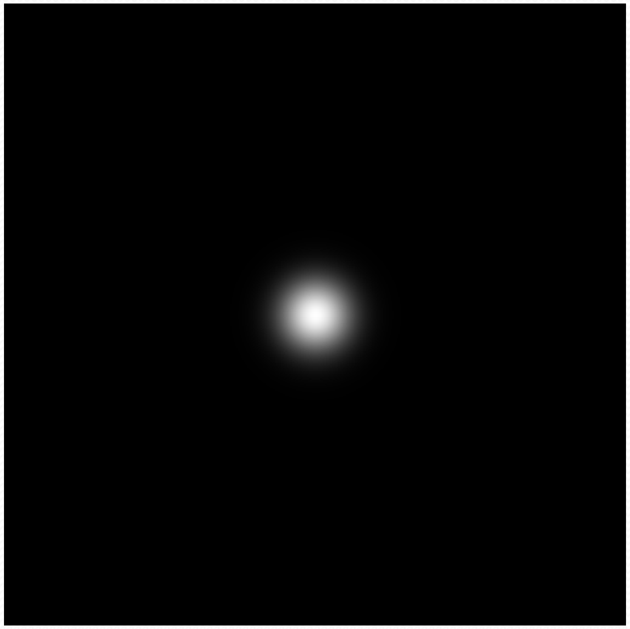


Máscara ($\sigma_x = 20, \sigma_y = 20$)

Imagen filtrada

Filtro gaussiano en tonos de gris

Imagen original



Máscara ($\sigma_x = 20, \sigma_y = 20$)

Imagen filtrada

Conclusiones

- El filtro de caja presenta una respuesta de frecuencia con ruido debido a su corte brusco.
- Esto provoca artefactos de anillados (fenómeno de Gibbs).
- El filtro gaussiano tiene una respuesta de frecuencia suave que suprime las altas frecuencias sin generar ruido.

Reducción de ruido

- La DFT 2D puede reducir el ruido y mejorar detalles importantes.
- El ruido suele aparecer en los componentes de alta frecuencia de una imagen.
- La DFT 2D permite identificar y aislar esos componentes.

Ejemplo

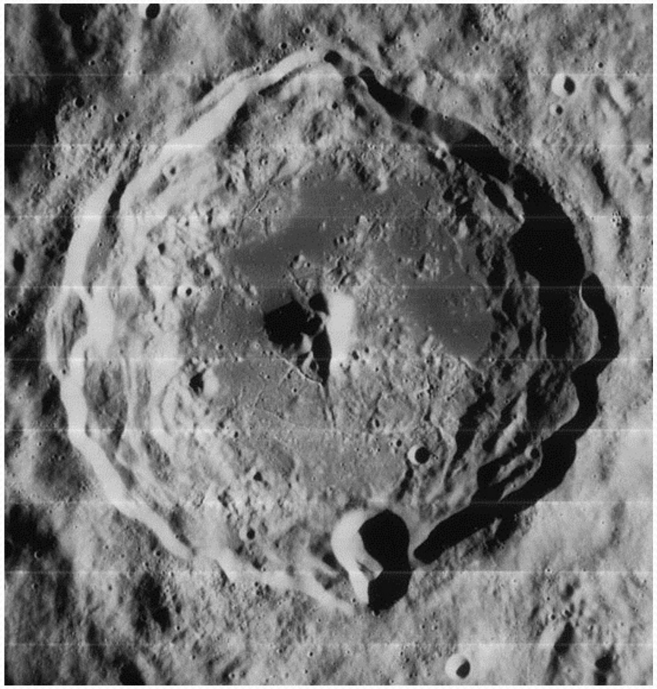
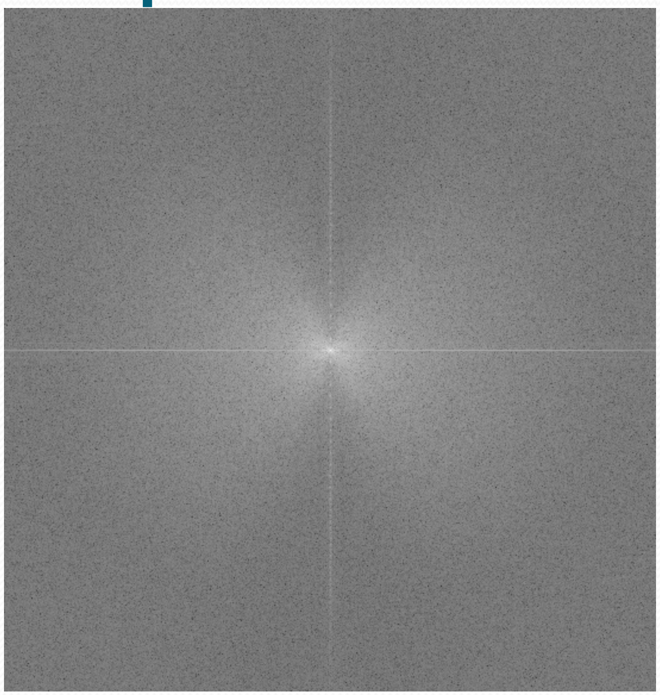
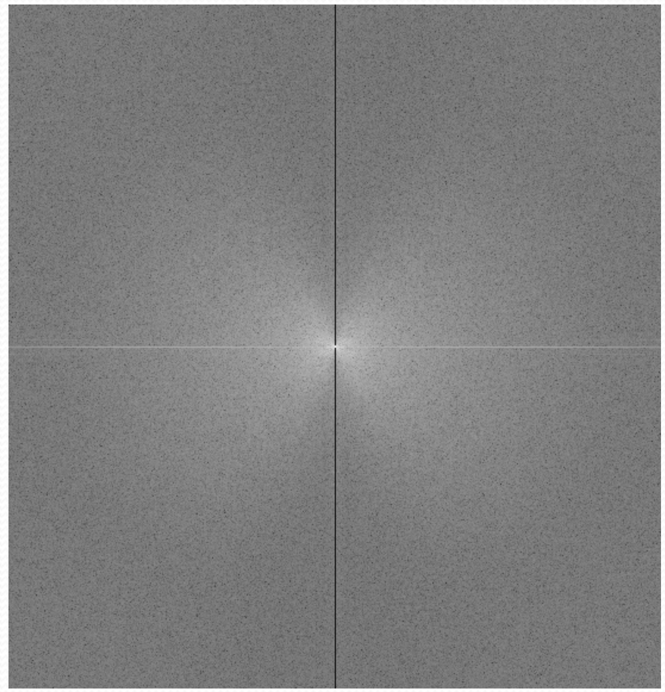


Imagen original

Ejemplo



Amplitud original



Amplitud filtrada

Ejemplo

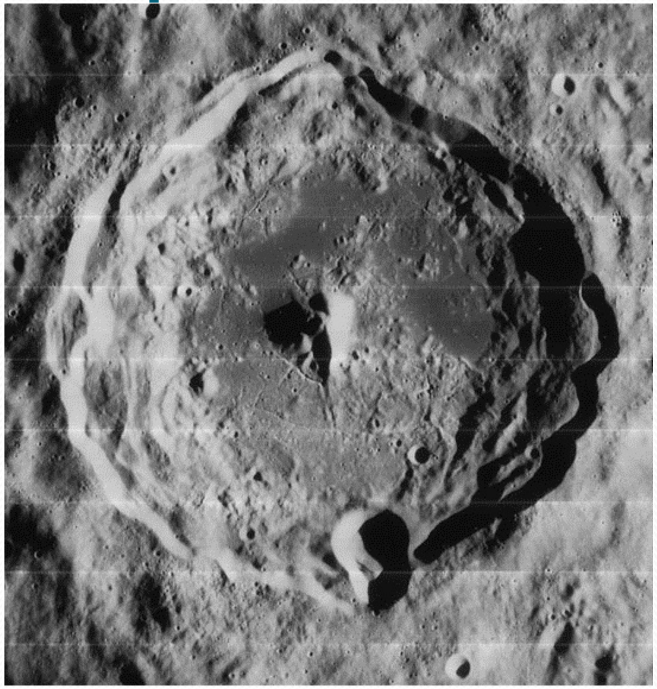


Imagen original

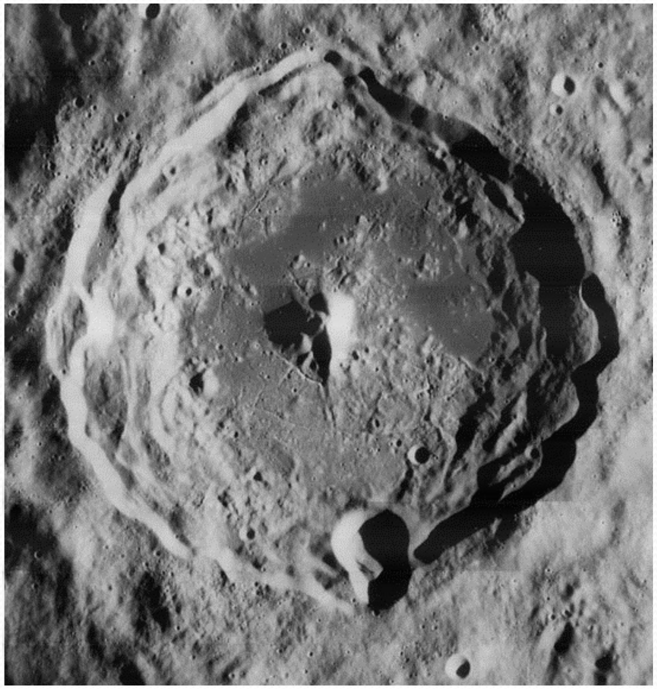
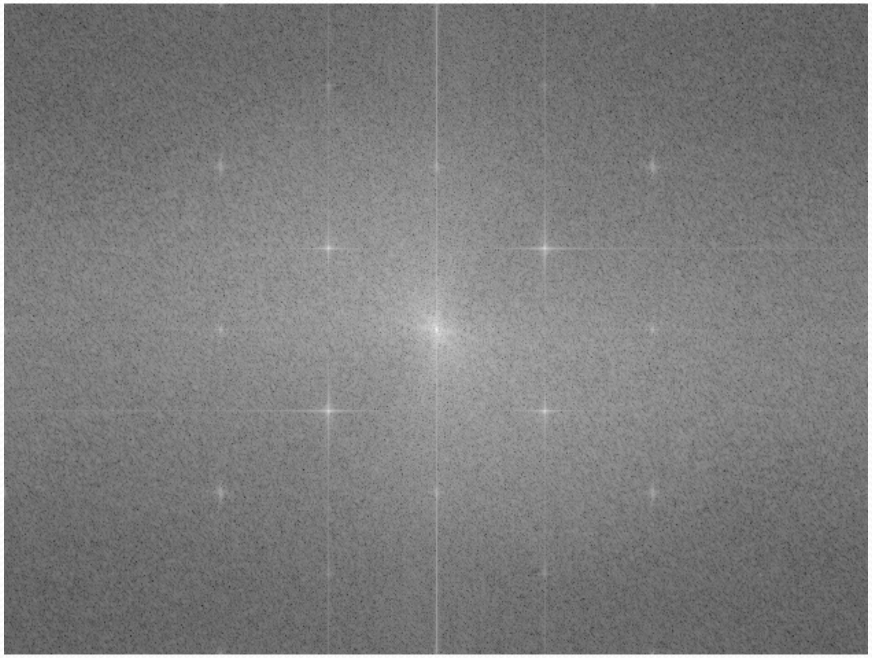


Imagen transformada

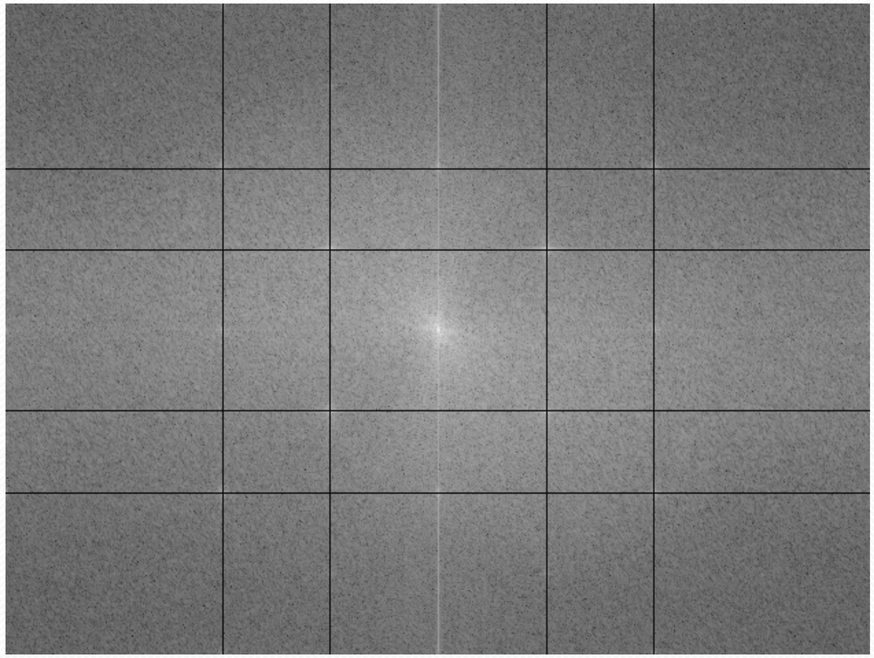
Ejemplo

Imagen original

Ejemplo



Amplitud original



Amplitud filtrada

Ejemplo

Imagen original

Imagen transformada

2 preguntas 2

- ¿Cuál tiene más información, la fase o la amplitud?
- ¿Qué pasa si se toma la fase de una imagen y se combina con la amplitud de otra imagen?

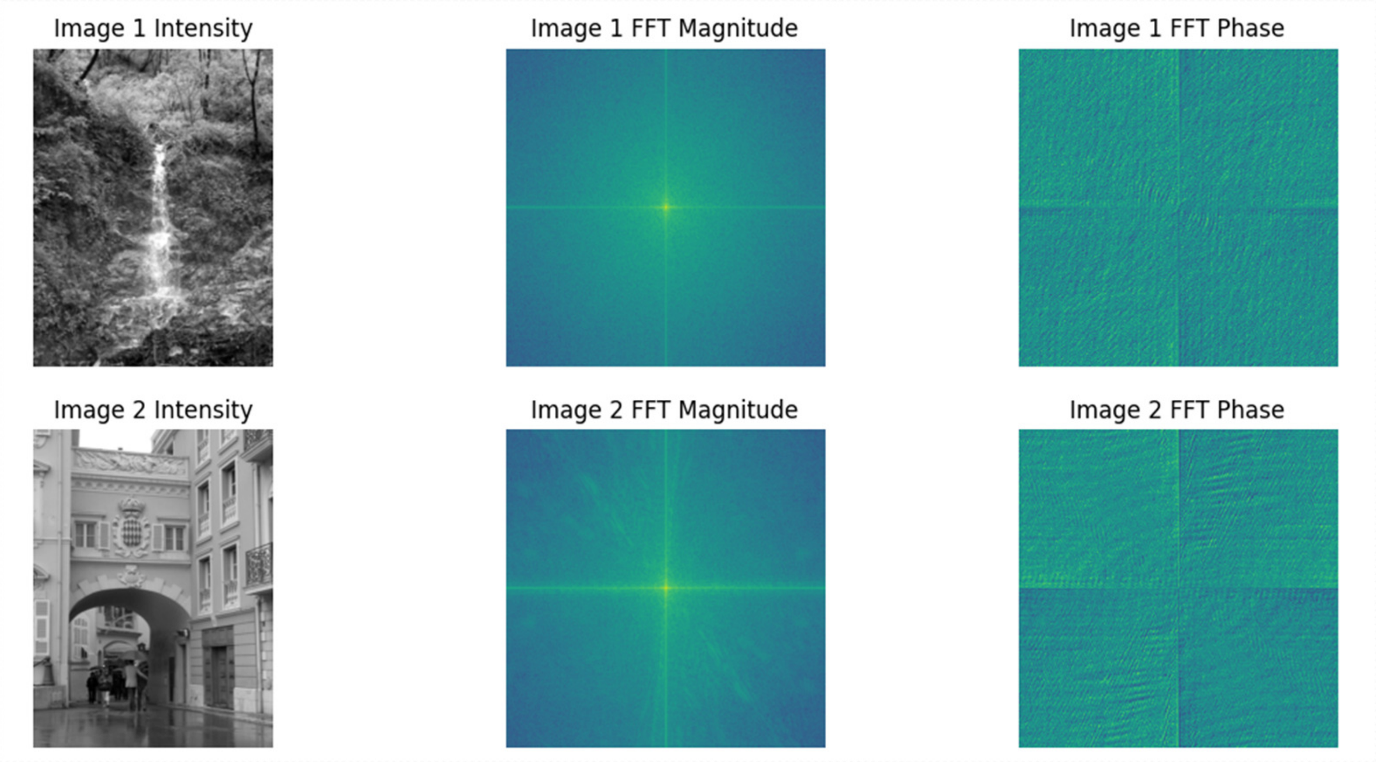
Paso 1

```
# Compute fft and decompose to amplitude and phase
im1_fft = fft_image(im1)
im2_fft = fft_image(im2)
im1_amp = np.abs(im1_fft)
im1_phase = np.angle(im1_fft)
im2_amp = np.abs(im2_fft)
im2_phase = np.angle(im2_fft)
```

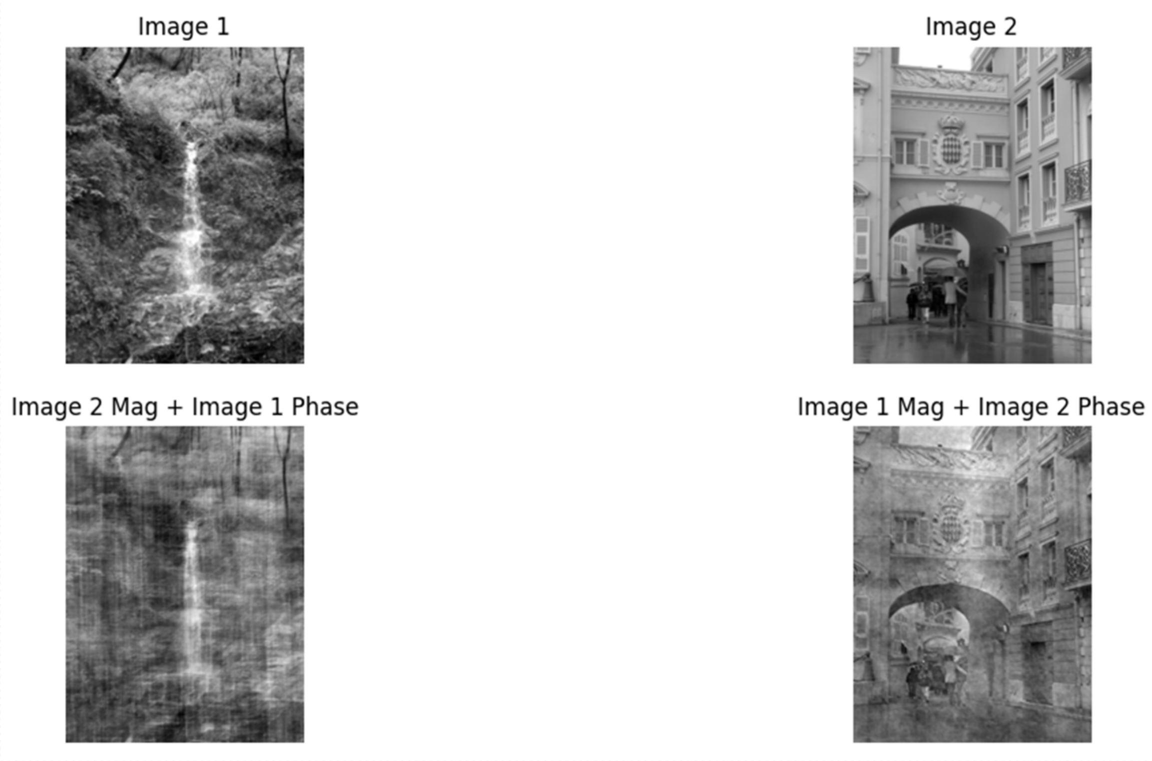
Paso 2

```
# Combine amp and phase from different images and compute inverse FFT
mag1_phase2 = np.fft.ifft2(im1_amp * (np.cos(im2_phase) +
                           1j * np.sin(im2_phase)))
mag2_phase1 = np.fft.ifft2(im2_amp * (np.cos(im1_phase) +
                           1j * np.sin(im1_phase)))
```

Amplitud y fase



Amplitud y fase

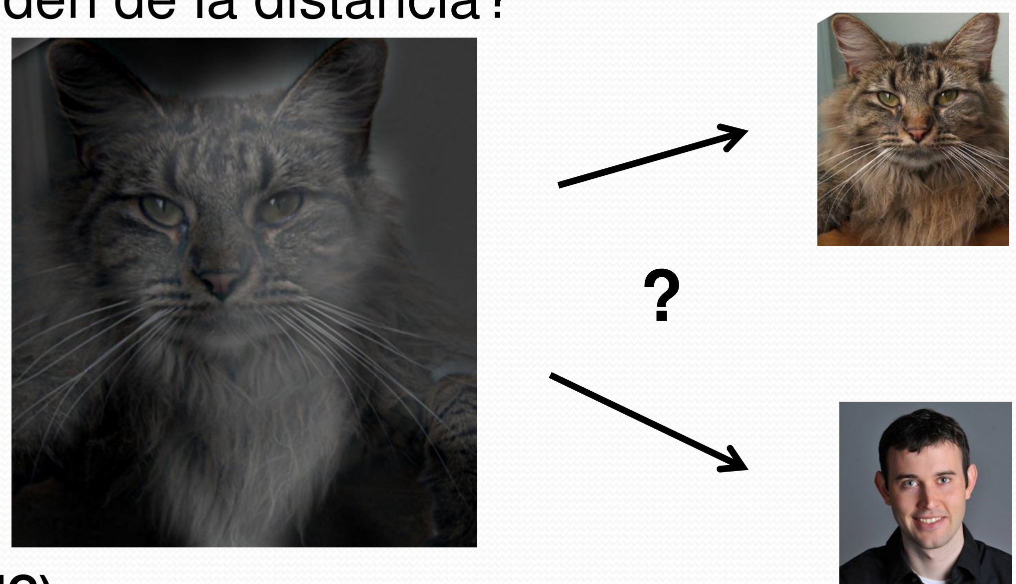


Conclusión

- La fase es importante porque tiene la información espacial.

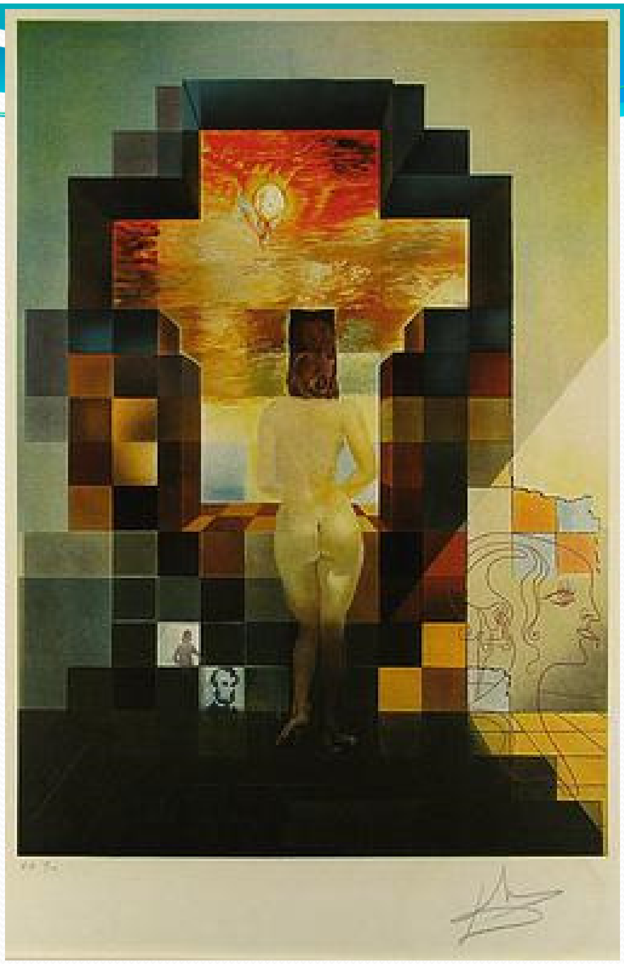
Imágenes híbridas

- ¿Por qué se obtienen interpretaciones diferentes de las imágenes híbridas que dependen de la distancia?



Fuente: Derek Hoiem (UIUC)

Lincoln in Dalivision



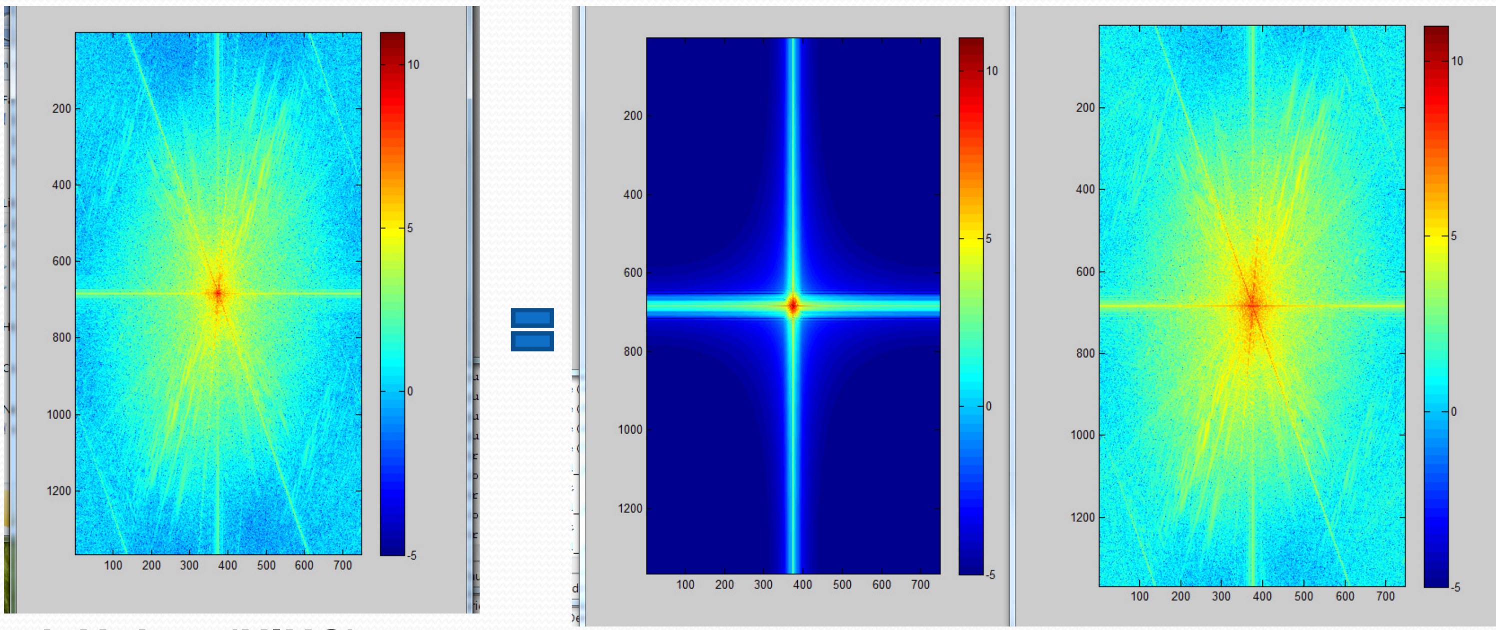
By Levine & Levine - http://www.doubletakeart.com/cgi-bin/dtg/dtg.sla?name=Salvador+Dali&lp=1632345780216809419 1&cc=dtg&ca=x&alc=dtg*64589&ai=00133*3676, Fair use, https://en.wikipedia.org/w/index.php?curid=36956616

Pistas de la percepción humana

- La percepción humana filtra varias orientaciones y escalas de frecuencia.
- Las frecuencias medias dominan la percepción.
- Cuando se ve una imagen desde lejos, se ven las frecuencias bajas.

Imagen híbrida en DFT 2D

Hybrid Image = Low-passed Image + High-passed Image



Fuente: Derek Hoiem (UIUC)

Resumen

- A veces es conveniente hacer filtrado en el dominio de la frecuencia.
- Puede ser más rápido filtrar usando la DFT 2D para imágenes grandes ($N \log N$ vs N^2 para correlación).
- La compresión de imágenes toma ventaja de áreas de baja frecuencia.