Capítulo 12

Series

La posibilidad de dar sentido a la suma de un número infinito ordenado de números reales, es una de las consecuencias importantes del concepto fundamental de límite de una sucesión. Esta nueva operación, propia del cálculo, da lugar a la noción de serie numérica, que de hecho se ha manejado desde el primer capítulo de este texto, con la representación decimal de los números reales. Ahora, con el apoyo de la teoría de los límites, se retoma ese concepto y se demuestran los resultados básicos sobre convergencia de series numéricas, incluyendo los criterios más importantes para comprobarla. Finalmente, se introduce la familia de las funciones analíticas, definidas como aquellas que son representables como series de potencias. Esta clase de funciones resulta ser de gran importancia en varias áreas del análisis matemático y sus aplicaciones.

12.1 Definición de serie y su suma

Cada sucesión de números reales $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ da lugar a la sucesión de *sumas parciales* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida por

$$s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad \text{para} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

A esta sucesión de sumas se le llama *serie inducida por la sucesión* $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ y se denota con el símbolo $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ o $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. A la sucesión inicial $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ se le dice *sucesión de sumandos de la serie* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

Ejemplo 12.1. (a) La sucesión real $\{1/k\}_{k=1}^{\infty}$ induce la *serie armónica*

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \right\}_{n=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}.$$

(b) La sucesión $\left\{r^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, donde r es un número real, induce la *serie geométrica*

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{k=1}^{n} r^k\right\}_{n=1}^{\infty} = \sum_{k=1}^{\infty} r^k.$$

Para la serie geométrica con $r \neq 1$, el n-ésimo término de la sucesión s_n de sumas parciales está dado por

$$s_n = r + r^2 + \cdots + r^n = \frac{r(1-r^n)}{1-r}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

como se deduce directamente de la relación

$$rs_n - s_n = r^{n+1} - r.$$

Para $r = 1$, la serie geométrica coincide con la sucesión de números naturales $\{n\}_{n=1}^{\infty}$. $\triangleleft$

Tomando en cuenta que una serie es una sucesión de números reales, se dice que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es *convergente a* S (o *que tiene suma* S) si la sucesión correspondiente de sumas parciales $\{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ tiene por límite al número S. En tal caso, se escribe

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_k = S.$$

Si una serie no es convergente, se le llama serie *divergente*.

NOTA IMPORTANTE. *Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente, denotamos a su suma S con el mismo símbolo que la serie, es decir $S = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$.*

Ejemplo 12.2. La serie geométrica $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \left\{\sum_{k=1}^{n} r^k\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{r(1-r^n)}{1-r}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente si $|r| < 1$ y tiene por límite o suma el número $S = \dfrac{r}{1-r}$.
Si $|r| \geqslant 1$, la serie geométrica es divergente. $\triangleleft$

Ejemplo 12.3. La serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k$ no es convergente, ya que la sucesión de sumas parciales correspondiente toma los valores

$$s_n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ es par} \\ -1 \text{ si } n \text{ es impar} \end{cases}$$

y, por tanto, no converge. $\triangleleft$

NOTA IMPORTANTE. *Si se modifica un número finito de sumandos de una serie convergente, la serie resultante seguirá siendo convergente.*

12.2 Propiedades de las series convergentes

Las propiedades de las sucesiones convergentes que se presentaron en el capítulo 3, se trasladan de manera automática al caso de series.

Proposición 12.1. Las propiedades principales de las series convergentes son:

(i) La sucesión de sumandos de toda serie convergente es una sucesión convergente a cero.

(ii) La suma y la multiplicación por un número real de series convergentes es una serie convergente. Más aún, si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k = M$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda a_k + b_k) = \lambda S + M$.

Demostración. Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$, las sucesiones de sumas parciales$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right\}$ convergen ambas a S y por tanto, su diferencia, que es la sucesión de términos $\{a_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ deberá converger a cero, es decir,

$$\lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} p_n - \lim_{n\to\infty} s_n = 0.$$

Por tanto, la sucesión de los sumandos de toda serie convergente es necesariamente convergente a cero.

Para probar la validez de (ii), observemos que las series $\sum_{k=1}^{\infty}(a_k + b_k)$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda a_k$, son la suma y el producto por un escalar de sucesiones convergentes, por lo que serán convergentes a la suma y al producto por el escalar de los límites correspondientes a esas sucesiones. ◁

Nota Importante. *La convergencia a cero de los términos de una serie no es condición suficiente para asegurar su convergencia. Basta considerar como contraejemplo la serie armónica $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, la cual, a pesar de que su sucesión de sumandos tiende a cero, tiene una sucesión de sumas parciales que crece sin límite, como se muestra con las estimaciones siguientes:*

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > 4\left(\frac{1}{8}\right) > \frac{1}{2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^n+1} + \frac{1}{2^n+2} + \cdots + \frac{1}{2^{n+1}} > 2^n(\frac{1}{2^{n+1}}) = \frac{1}{2},$$

es decir, la sucesión $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es tal que $s_{2^{n+1}} - s_{2^n} > 1/2$ y por tanto $s_{2^n} > n/2$, lo cual muestra que la sucesión de sumas parciales no es acotada y, consecuentemente, la serie armónica no es convergente.

Antes de discutir los diversos criterios de convergencia, introduciremos algunas de las familias de series de mayor importancia:

(a) Se dice que una serie de números reales $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una *serie positiva* si $a_k > 0$ para $k = 1, 2, 3 \ldots$

(b) A una serie de la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} a_k, \quad \text{con} \quad a_k > 0 \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

se le llama *serie alternante*.

(c) Se dice que una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es una *serie telescópica* si existe una sucesión real $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ tal que

$$a_k = b_{k+1} - b_k \quad \text{para} \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

En el caso de las series telescópicas, cada una de sus sumas parciales s_n para $n = 1, 2, 3, \ldots$ es de la forma

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = b_{n+1} - b_1;$$

en consecuencia, la serie telescópica será convergente si la sucesión correspondiente $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ que la genera es convergente y, en ese caso,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} - b_1.$$

Ejemplo 12.4. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}$ es telescópica ya que

$$\frac{1}{k(k+1)} = -\frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}$$

y, por tanto, su suma es

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1. \lhd$$

12.3 Series positivas

Consideremos ahora una serie de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. La característica más notable de las series positivas es que su sucesión de sumas parciales es una sucesión creciente y positiva de números reales y por eso, de acuerdo al teorema **??**, será convergente si y sólo si es acotada, es decir, si y sólo si existe $M > 0$ tal que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant M, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Desafortunadamente, este criterio de convergencia es a menudo difícil de aplicar y resulta más conveniente recurrir al llamado *criterio de comparación*, que consiste en comparar una serie positiva con otra serie cuya convergencia o divergencia se conoce, pudiéndose deducir de esto la convergencia o divergencia de la serie inicial.

Teorema 12.1. *(Criterio de Comparación)* Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ son series de términos positivos tales que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = S$ y $b_k \leqslant a_k$, para $k \geqslant N$ con $N \in \mathbb{N}$, entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k \leqslant S$. Análogamente, si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente y $a_k \leqslant b_k$, para $k \geqslant N$, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es divergente.

Demostración. Para mostrar la validez del criterio de comparación, observemos que bajo las hipótesis se tiene, para cada $n > N$, que

$$\sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} a_k = S - \sum_{k=1}^{N-1} a_k$$

y entonces obtenemos la estimación

$$\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{N-1} b_k + \sum_{k=N}^{n} b_k \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} b_k + \sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant S - \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=1}^{N-1} b_k,$$

lo cual muestra que la sucesión de sumas parciales $\sum_{k=1}^{n} b_k$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ es acotada por el número $S - \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=1}^{N-1} b_k$ y, por consiguiente, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ es convergente.

Por otro lado, si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es divergente y $a_k \leqslant b_k$ para $k \geqslant N$, entonces

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^{n} b_k$$

y por tanto, la sucesión $\sum_{k=N}^{n} b_k$ crecerá sin límite cuando $n \to \infty$, ya que es mayor que la sucesión de números positivos $\sum_{k=1}^{n} a_k$, que diverge. $\triangleleft$

De la aplicación del criterio de comparación con respecto a la serie geométrica, se deduce el llamado *criterio del cociente,* que se enuncia en los términos siguientes:

Teorema 12.2. *(Criterio del cociente* o *criterio de d'Alembert*[1]*).* Si la sucesión de números positivos $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ es tal que

$$\lim_{k \to \infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = L,$$

[1] Por Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783), matemático que participó en la publicación de la Enciclopedia francesa.

entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente si $L < 1$ y es divergente si $L > 1$.

Demostración. Supongamos primero que $L < 1$. De la definición de límite, dado $r = \dfrac{1-L}{2} < 1$, existe un número natural N tal que

$$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k} - L\right| \leqslant \frac{1-L}{2}, \text{ para } k \geqslant N. \tag{12.1}$$

Luego,

$$a_{k+1} \leqslant \left(\frac{1+L}{2}\right) a_k, \text{ para } k \geqslant N,$$

y la aplicación reiterada de esta última estimación, nos lleva a

$$a_{k+1} \leqslant \left(\frac{1+L}{2}\right)^{k-N+1} a_N, \text{ para } k \geqslant N.$$

Esto significa que cada término a_{k+1} con $k \geqslant N$ de la serie inicial, es menor o igual que el término $b_{k+1} = cr^{k+1}$ con $r = \left(\dfrac{1+L}{2}\right)$ y $c = \left(\dfrac{1+L}{2}\right)^{-N} a_N$. Al ser $r < 1$, la serie geométrica $\sum_{k=1}^{\infty} r^k$ es convergente y mayor, término a término, que la serie inicial $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ a partir de $k = N$. Entonces, por el criterio de comparación, se deduce la convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$. Si, por lo contrario, se tuviera $L > 1$, tomando $r = \dfrac{L-1}{2}$ y aplicando la estimación (12.1), se tendría

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} - L \geqslant -\frac{L-1}{2} \text{ para } k \geqslant N,$$

o equivalentemente,

$$a_{k+1} \geqslant \left(\frac{L+1}{2}\right) a_k \text{ para } k \geqslant N.$$

Aplicando repetidamente la estimación anterior, se obtiene que

$$a_{N+n} \geqslant \left(\frac{L+1}{2}\right)^n a_N \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

y, tomando en cuenta que $(L+1)/2 > 1$, se tendrá

$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \geqslant a_N \sum_{k=N}^{\infty} \left(\frac{L+1}{2}\right)^n$$

y, por el criterio de comparación, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ será divergente. ◁

Nota Importante. *Si para una serie de términos positivos $\Sigma_{k=1}^{\infty} a_k$ se tiene $\lim_{k\to\infty} a_{k+1}/a_k = 1$, entonces no se puede asegurar la convergencia ni la divergencia de tal serie. Para mostrar lo anterior, basta observar que tanto la serie convergente de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} 1/[k(k+1)]$ como la serie divergente de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$, son tales que su sucesión de cocientes $\{a_{k+1}/a_k\}_{k=1}^{\infty}$ es convergente a 1.*

Ejemplo 12.5. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} k^3 e^{-k}$ es convergente ya que al aplicar el criterio del cociente se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)^3 \mathrm{e}^{-k-1}}{k^3 \mathrm{e}^{-k}} = \frac{1}{\mathrm{e}} < 1. \triangleleft$$

Teorema 12.3. *(Criterio de Cauchy[2])* Si la sucesión de números positivos $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ es tal que

$$\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L,$$

entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente si $L < 1$ y es divergente si $L > 1$.

Demostración. Si $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L < 1$, existen $r < 1$ y N natural tales que $\sqrt[k]{a_k} < r < 1$ para $k > N$. Luego, $a_k < r^k$ si $k > N$ y, por el criterio de comparación, se sigue que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente.

Por el contrario, si $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = L > 1$, existirán $r > 1$ y un natural N tales que $\sqrt[k]{a_k} > r > 1$ para $k > N$; luego, $a_k > r^k$ si $k > N$ y, aplicando el criterio de comparación, se tendrá que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. $\triangleleft$

Teorema 12.4. *(Criterio de comparación al límite)* Sean $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ sucesiones de números positivos y

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_k}{b_k} = L,$$

donde L es un número no negativo o ∞:

(a) Si $L < \infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también converge.

(b) Si $L > 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ también diverge.

Demostración. Si $L < \infty$, entonces existe una etiqueta N tal que

$$\frac{a_k}{b_k} \leqslant L + 1 \quad \text{para} \quad k > N;$$

luego,

$$a_k \leqslant (L+1) b_k \quad \text{para} \quad k > N,$$

y aplicando el criterio de comparación, se concluye que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente. Para probar (b), observamos que si $L > 0$, existirá una etiqueta N tal que

$$\frac{a_k}{b_k} > \frac{L}{2}, \text{ para } k > N;$$

por tanto,

$$b_k < \frac{2}{L} a_k, \text{ para } k > N,$$

y entonces, si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, aplicando el criterio de comparación concluimos que $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ deberá también ser divergente. Note que si $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_k}{b_k} = \infty$, se

[2]Por Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francés mencionado en el capítulo primero.

tendría que $\dfrac{a_k}{b_k} > 1$ para toda etiqueta mayor que un cierto natural K. Luego, $b_k < a_k$ para $k > K$, y por el criterio de comparación se concluye que, si $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ diverge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge. $\triangleleft$

Ejemplo 12.6. La serie $\sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{k^2+1}-k)$ es divergente ya que para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene la comparación
$$\sqrt{k^2+1}-k = \frac{1}{\sqrt{k^2+1}+k} > \frac{1}{2\sqrt{k^2+1}} > \frac{1}{2k+2}.$$
Dado que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} 1/(2k+2)$ es divergente, por el criterio de comparación, la primera será también divergente. $\triangleleft$

Ejemplo 12.7. La serie $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}(1/k)$ es divergente ya que al compararla con la serie inducida por la sucesión $\{1/k\}_{k=1}^{\infty}$ se observa que
$$\lim_{k\to\infty} \frac{\operatorname{sen}(1/k)}{(1/k)} = 1,$$
luego, al ser $\sum_{k=1}^{\infty} 1/k$ divergente, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sen}(1/k)$ será divergente. $\triangleleft$

Teorema 12.5. *(Criterio de la integral)* Si la sucesión $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ es tal que a partir de una etiqueta N se tiene $a_k = f(k)$ para $k = N, N+1, \ldots,$ donde $f : [N,\infty) \to \mathbb{R}$ es una función continua, positiva y $f(x) \leqslant f(y)$ si $x \geqslant y$, entonces
$$\sum_{k=N}^{\infty} a_k \qquad \text{y} \qquad \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
convergen ambas o divergen ambas.

Demostración. Comparando, para cada natural K, el término $\sum_{k=N}^{N+K} a_k$ con la integral $\int_N^{N+K} f(x)\,\mathrm{d}x$, en virtud del carácter no creciente de f, se tiene la estimación siguiente:
$$\sum_{k=N}^{N+K} f(k+1) \leqslant \int_N^{N+K} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=N}^{N+K} f(k).$$
Nótese que los términos $\sum_{k=N}^{N+K} f(k+1)$ y $\sum_{k=N}^{N+K} f(k)$ son las sumas inferior y superior de Darboux-Riemann, respectivamente, asociadas a la partición $\mathcal{P} = \{N, N+1, N+2, \ldots, N+K\}$ del intervalo $[N, N+K]$, como se observa en la figura 12.1.

Tomando límites cuando $K \to \infty$, se tiene que
$$\sum_{k=N}^{\infty} a_{k+1} \leqslant \int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=N}^{\infty} a_k,$$
lo cual demuestra que la serie $\sum_{k=N}^{\infty} a_k$ y la integral impropia $\int_N^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$, o ambas convergen o ambas divergen. $\triangleleft$

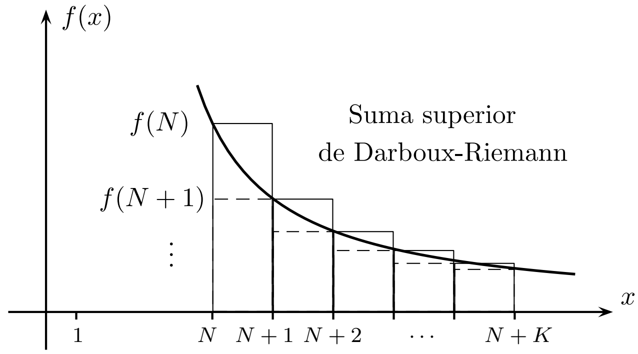

Figura 12.1: Sumas inferior y superior de Darboux-Riemann

Ejemplo 12.8. Una aplicación importante del criterio de la integral se da en la determinación de la convergencia de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}, \tag{12.2}$$

donde p es un número real fijo. Comparando con la función $f(x) = x^{-p}$, se tiene que $k^{-p} = f(k)$, luego, tomando en cuenta que

$$\int_1^{\infty} x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p} x^{-p+1}\Big|_1^{\infty},$$

se concluye que la serie (12.2) converge si $p > 1$ y diverge si $p \leqslant 1$. ◁

12.4 Series absolutamente convergentes

Una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ se dice *absolutamente convergente* si la serie de números no negativos $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ es convergente. La importancia de este tipo de series radica en el resultado siguiente.

Proposición 12.2. Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Demostración. Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie absolutamente convergente y consideremos las sucesiones de sumas parciales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} = \{\sum_{k=1}^{n} |a_k|\}_{n=1}^{\infty}$. Por hipótesis, la sucesión de términos no negativos $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente y, por tanto, está acotada por algún número $M > 0$. Aplicando la desigualdad del triángulo se tiene, para cada $i = 1, 2, 3, \ldots,$ que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqslant M,$$

lo que muestra que también la sucesión de sumas parciales $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada por M. Ahora formemos la serie con términos no negativos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$$

donde $a_k^+ = a_k$ si $a_k \geqslant 0$ y $a_k^+ = 0$ si $a_k < 0$ y, análogamente, la serie de términos no negativos

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-,$$

donde $a_k^- = -a_k$ si $a_k < 0$ y $a_k^- = 0$ si $a_k \geqslant 0$. Por la hipótesis, estas dos últimas series tienen sucesiones de sumas parciales acotadas y, por tanto, al ser no negativas, las dos series son convergentes. Por otro lado, la serie inicial puede escribirse en la forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^+ - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^-,$$

es decir, es la diferencia de dos series convergentes. Luego, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es también convergente. $\triangleleft$

Ejemplo 12.9. La serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ es una serie convergente ya que es absolutamente convergente pues

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

y esta última es convergente. $\triangleleft$

Nota Importante. *(a) Si una serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente, se tiene que:*

$$-\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k|.$$

(b) Es oportuno hacer notar, que si bien toda sucesión absolutamente convergente es convergente, no necesariamente una serie que no es absolutamente convergente es divergente, por ejemplo, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k/k$ no es absolutamente convergente pero sí es convergente, como lo probaremos después de la sección siguiente.

12.5 Los criterios de Abel y Dirichlet

Los criterios que hasta ahora hemos presentado se refieren a la convergencia o divergencia de series de términos positivos. En este apartado incluiremos dos criterios que se aplican a series que no convergen absolutamente y se basan en la llamada *fórmula de Abel*[3] para las sumas parciales. Incluimos su aplicación a las series alternantes

Teorema 12.6. *(Fórmula de Abel)* Si $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ y $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ son dos sucesiones y $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}. \tag{12.3}$$

En consecuencia, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ es convergente si $\sum_{k=1}^{\infty} s_k(b_k - b_{k+1})$ y $\{s_n b_{n+1}\}_{n=1}^{\infty}$ convergen.

Demostración.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k &= \sum_{k=1}^{n} (s_k - s_{k-1}) b_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} s_k b_k - \sum_{k=1}^{n} s_k b_{k+1} + s_n b_{n+1} \\ &= \sum_{k=1}^{n} s_k(b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1},\end{aligned}$$

donde hemos tomado $s_0 = 0$. $\triangleleft$

Nota Importante. *La fórmula de Abel es análoga a la fórmula de integración por partes.*

Corolario 12.1. *(Criterio de Dirichlet*[4]*)* Si la sucesión de las sumas parciales de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ está acotada y la sucesión $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente y converge a cero, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ es convergente.

Demostración. Sean $s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ y M una cota para esa sucesión, es decir,

$$| s_n | \leq M \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Por ser $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ decreciente, se tiene

$$| s_k(b_k - b_{k+1}) | \leq M(b_k - b_{k+1})$$

y, entonces, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} s_k(b_k - b_{k+1})$ es convergente, pues es absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{k=1}^{\infty} | s_k(b_k - b_{k+1}) | \leq M \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - b_{k+1}) = M b_1.$$

[3] Por Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático noruego.

[4] Por Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859), matemático alemán, autor de la definición moderna de función.

Por otro lado,

$$\lim_{n\to\infty} \mid s_n b_{n+1} \mid \leq M \lim_{n\to\infty} \mid b_{n+1} \mid = 0$$

y, por tanto, tomando en cuenta la fórmula de Abel (12.3), concluimos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ converge. ◁

Corolario 12.2. *(Criterio de Abel[5])* Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y la sucesión $\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente y convergente, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ es convergente.

Demostración. Repitiendo la argumentación dada en el corolario anterior y tomando en cuenta la convergencia de $\{s_k b_k\}_{k=1}^{\infty}$ se concluye la validez de este corolario. ◁

Corolario 12.3. *(Criterio de convergencia para series alternantes)* Toda serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$, donde $a_k > 0$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$, que satisface las condiciones

$$a_1 \geqslant a_2 \geqslant \cdots \geqslant a_k \geqslant \cdots \quad \text{y} \quad \lim_{k\to\infty} a_k = 0$$

es convergente. Más aún, la sucesión de sumas parciales $s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1} a_k$ para $n = 1, 2, 3, \cdots$ satisface la desigualdad

$$s_{2n} \leq \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k \leq s_{2n+1}.$$

Demostración. La convergencia de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$ se sigue directamente de la aplicación del criterio de Dirichlet. La estimación de la desigualdad es consecuencia del comportamiento de las sumas parciales pares e impares. Concretamente, la sucesión de sumas parciales pares s_{2n} es creciente ya que

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqslant s_{2n}$$

Análogamente, la subsucesión de sumas parciales s_{2n+1} para las etiquetas impares es decreciente ya que

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} - a_{2n+2} + a_{2n+3} \leqslant s_{2n+1}.$$

Siendo ambas sucesiones convergentes a la suma $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} a_k$, se sigue la validez de la desigualdad dada en el enunciado del corolario. ◁

Ejemplo 12.10. Las series alternantes $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$ y $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}\sqrt{\frac{2k+1}{5k-1}}$ son convergentes. La primera satisface las condiciones del criterio de Dirichlet, mientras que la segunda, las del criterio de Abel. ◁

[5] Por Niels Henrik Abel (1802-1829), matemático noruego.

12.6 Series de potencias

En esta sección consideraremos series numéricas que dependen de una variable real x en la forma $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. A este tipo de series se les llama *series de potencias* y, como veremos, generalmente definen una función con derivadas de todos los órdenes en cierto intervalo. Esta familia de funciones es de gran importancia para el cálculo y sus aplicaciones.

El primer concepto asociado a las series de potencias es el concepto de *intervalo de convergencia* que se define como el máximo intervalo abierto I con centro en cero tal que para cada valor $x \in I$, la serie numérica $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ es absolutamente convergente.

Para justificar el concepto anterior, supongamos que al tomar $x = x_0$, la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x_0^k$ es convergente. Si tomamos ahora otro valor y con $|y| < |x_0|$, tendremos que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k y^k$ resulta ser absolutamente convergente, ya que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k y^k| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} |a_k||\frac{y}{x_0}|^k |x_0|^k \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} r^k$$

donde $r = |y/x_0| < 1$ y M es cota de la sucesión de términos de $\left\{a_k x_0^k\right\}_{k=1}^{\infty}$, que existe en virtud de la convergencia de la serie de potencias en $x = x_0$, es decir,

$$|a_k x_0^k| \leqslant M \text{ para } k = 1, 2, 3, \ldots$$

Tomando en cuenta lo anterior, tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k y^k| \leqslant M \sum_{k=1}^{\infty} r^k \text{ con } r < 1$$

y, aplicando el criterio de comparación entre series positivas, concluimos que la serie es absolutamente convergente.

Nota Importante. *Al valuar una serie de potencias en $x = 0$, se tiene una serie convergente a cero. Más aún, es posible que sólo en ese punto la serie sea convergente; por ejemplo, tenemos el caso de la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k! x^k$, que sólo es absolutamente convergente en $x = 0$, ya que para cualquier otro valor de x se tiene*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)!|x|^{k+1}}{k!|x|^k} = \lim_{k\to\infty} (k+1)|x| > 1,$$

y la serie sólo converge para $x = 0$. El otro caso extremo se tiene cuando la serie es absolutamente convergente para todo $x \in \mathbb{R}$, como es el caso de la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} x^k/k!$, cuyo intervalo de convergencia es $(-\infty, \infty)$.

Ejemplo 12.11. La serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k$ tiene por intervalo de convergencia a $(-1, 1)$ ya que si $|x| < 1$ se tiene que

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{(k+1)}|x|<1$$

y, por el criterio del cociente para series positivas, la serie es convergente. Note que si $x=1$ la serie de potencias no es convergente. $\triangleleft$

Como se ha mostrado, una serie de potencias define, salvo excepciones, una función f que denotaremos

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k,$$

cuyo dominio es el intervalo de convergencia. Enseguida mostraremos que si la serie es absolutamente convergente entonces la función f es derivable y calcularemos tanto su derivada como sus primitivas.

Lema 12.1. Si la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$ es absolutamente convergente en $(-c,c)$, entonces la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx^{k-1}$$

es también absolutamente convergente en $(-c,c)$.

Demostración. Para cada $x_0\in(-c,c)$, probaremos la convergencia absoluta de la serie $\sum_{k=1}^{\infty}ka_kx_0^{k-1}$. Sea $r>0$ con $|x_0|+r<c$; tomando en cuenta que $|x_0|+r\in(-c,c)$, se tiene que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|(|x_0|+r)^k$$

es absolutamente convergente. Por otro lado, por el desarrollo de una potencia de un binomio, se tiene que

$$(|x_0|+r)^k=|x_0|^k+k|x_0|^{k-1}r+\sum_{j=2}^{k}\binom{k}{j}|x_0|^{k-j}r^j$$

y, entonces,

$$k|x_0|^{k-1}\leqslant\frac{1}{r}(|x_0|+r)^k$$

y

$$\sum_{k=1}^{\infty}k|a_k||x_0|^{k-1}\leqslant\frac{1}{r}\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|(|x_0|+r)^k.$$

Tomando en cuenta que la serie de la derecha es convergente pues $|x_0|+r\in(-c,c)$, por el criterio de comparación, tenemos que la serie positiva de la izquierda deberá ser también convergente, con lo que se prueba el lema. $\triangleleft$

Nota Importante. *El lema anterior nos permite concluir que cada una de las series de potencias obtenidas tomando derivadas de orden superior, término* *a término, de una serie de potencias inicial, serán también absolutamente convergentes en el mismo intervalo* $(-c, c)$. *Es decir, las series*

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2}, \quad \sum_{k=3}^{\infty} k(k-1)(k-2)a_k x^{k-3}, \quad \cdots$$

son absolutamente convergentes en $(-c, c)$.

Apoyados en el lema 12.1 probaremos la proposición siguiente.

Proposición 12.3. Si la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ es absolutamente convergente para toda x en un intervalo $I = (-c, c)$, entonces la función f definida mediante $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ es derivable en I y su función derivada tiene la forma

$$\frac{df}{dx}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}, \quad x \in I.$$

Demostración. Para probar la proposición anterior, sean $x_0 \in I, h$ y r tales que $r > 0$, $x_0 + r \in I$ y $|h| < r$. Demostraremos que

$$\lim_{h\to 0} \left[\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^{k-1} \right] = 0. \tag{12.4}$$

Aplicando el teorema del valor medio, escribimos, para cada $k = 1, 2, 3, \ldots,$

$$\frac{(x_0+h)^k - x_0^k}{h} = k x_{k,h}^{k-1}$$

donde $x_{k,h} \in (x_0, x_0 + h)$. Sustituyendo esas estimaciones en (12.4), se tiene

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (x_{k,h}^{k-1} - x_0^{k-1}). \tag{12.5}$$

Aplicando nuevamente el teorema del valor medio, podemos escribir

$$(x_{k,h}^{k-1} - x_0^{k-1}) = (k-1) z_{k,h}^{k-2} (x_{k,h} - x_0),$$

donde $z_{k,h} \in (x_0, x_{k,h})$. Sustituyendo esta nueva estimación en (12.5), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^{k-1} &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z_{k,h}^{k-2} (x_{k,h} - x_0) \\ &\leqslant |h| \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k z_{k,h}^{k-2}. \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k||z_{k,h}|^{k-2} \leqslant \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)|a_k|(|x_0| + r)^{k-2}$$

y que la serie de la derecha es absolutamente convergente para $x = |x_0| + r \in I$, como consecuencia de la aplicación reiterada del lema 12.1, se tiene

$$\lim_{h \to 0} \left| \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} - \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^{k-1} \right| = 0,$$

lo que prueba que

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x_0^{k-1}. \triangleleft$$

Nota Importante. *La proposición 12.3 permite afirmar que cada función dada como serie de potencias tiene derivadas de todos los órdenes y esas funciones derivadas se obtienen derivando término a término la serie inicial.*

Proposición 12.4. Bajo las hipótesis de la proposición 12.3, la función $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ tiene por antiderivada en $(-c, c)$ a la función g dada por la serie de potencias

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1}, \quad x \text{ en } (-c, c).$$

Demostración. Si $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k||x|^k$ converge para x en $(-c, c)$, dado que para todo $k = 1, 2, 3, \ldots$ se tiene que

$$\left| \frac{1}{k+1} a_k x^k \right| \leqslant |a_k x^k|,$$

podemos afirmar, en virtud del criterio de comparación, que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k+1} a_k x^k \right|$$

es también convergente para x en $(-c, c)$. De aquí se deduce que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1} \right| = |x| \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k+1} a_k x^k \right|$$

también converge para cada x en $(-c, c)$. Como la serie inicial $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ se forma derivando término a término la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k+1} a_k x^{k+1}$, aplicando la proposición 12.3, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = f(x),$$

lo que demuestra que

$$\int \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k \, \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty} \int a_k x^k \, \mathrm{d}x. \triangleleft$$

Nota Importante. *(a) Las series de potencias también aparecen en la* *forma* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-x_0)^k$ *y lo que hemos dicho y mostrado se extiende de manera natural trasladando el origen* $x=0$ *al punto* $x=x_0$.

(b) A las funciones representables como series de potencias se les llama funciones analíticas. Estas funciones tienen derivadas de todos los órdenes y cada n*-suma parcial de la serie de potencias corresponde a su polinomio de Taylor de orden* n. *Una observación importante aquí es que no toda función que tenga derivadas de todos los órdenes es representable como serie de potencias. Enseguida daremos el ejemplo típico al respecto.*

Ejemplo 12.12. La función

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x>0\end{cases}$$

tiene derivadas de todos los órdenes en $x=0$, con valor cero, ya que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{-1/x^2}=\dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2}$ si $x>0$ y dado que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2}=0$, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x\leqslant 0\\ \dfrac{2}{x^3}\mathrm{e}^{-1/x^2} & \text{si } x>0.\end{cases}$$

Aplicando repetidamente un argumento análogo al anterior, se prueba que f tiene derivadas de todos los órdenes y éstas se anulan en cero. Lo anterior implica que el polinomio cero es el polinomio de Taylor de cualquier orden de esa función y si esa función fuera representable en serie de potencias, ésta debería ser la serie idénticamente cero, lo cual no es posible pues $f(x)\neq 0$ para toda $x>0$. Esta situación se presenta debido a que los residuos de Taylor no convergen a cero cuando el orden del polinomio crece. $\triangleleft$

Ejemplo 12.13. Las siguientes funciones elementales son funciones analíticas.

(a) $\mathrm{e}^x = 1+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k!}x^k$ para x en $(-\infty,\infty)$;

(b) $\operatorname{sen} x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}x^{2k-1}$ para x en $(-\infty,\infty)$;

(c) $\cos x = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{(2k)!}x^{2k}$ para x en $(-\infty,\infty)$.

(d) $\ln x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}(x-1)^k}{k}$ para x en $(0,2)$;

(e) $\operatorname{arcsen} x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)!(x)^{2k+1}}{(2^k n!)^2(2k+1)}$ para x en $(-1,1)$. $\triangleleft$

Ejercicios y problemas del capítulo

Convergencia de Series

12.6.1. Determine la convergencia de las series siguientes.
$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^3+1}{2k^3+3k+5}$; $(b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$; $(c)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k^3-4k+1}$; $(d)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{3k+2}$.

12.6.2. Encuentre la suma de las series siguientes.
$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$; $(b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{k!}$; $(c)\ \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1} \frac{2k+1}{2^k k!}$.

12.6.3. Escriba la expresión general de la serie cuyos primeros sumandos se escriben a continuación.

(a) $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}+\cdots$

(b) $\frac{3}{2^2}+\frac{5}{4\cdot 9}+\frac{7}{9\cdot 16}+\frac{9}{16\cdot 25}+\frac{11}{25\cdot 36}+\cdots$

(c) $\frac{4}{1\cdot 5}-\frac{4}{5\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 13}-\frac{4}{13\cdot 17}+\frac{4}{17\cdot 21}-\cdots$

12.6.4. Haciendo uso de la definición de convergencia de una serie, justifique en cada caso la convergencia o divergencia de las series siguientes.
$(a)\ 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}+\cdots$; $(b)\ 2+4+8+16+32+\cdots$.

12.6.5. Aplicando los criterios para convergencia, determine la convergencia o divergencia de las series siguientes.
$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^2+1}$; $(b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$; $(c) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\ln k}$; $(d) \sum_{k=1}^{\infty} k \operatorname{sen}(\frac{1}{k})$;
$(e) \sum_{k=1}^{\infty}(\sqrt{2})^k$; $(f)\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$; $(g) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(-100)^k}$; $(h) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

12.6.6. Determine si las series telescópicas siguientes convergen o divergen.
$(a) \sum_{k=1}^{\infty}(\arctan(k+1)-\arctan k)$; $(b)\ \sum_{k=1}^{\infty} \ln \frac{k+1}{k}$;
$(c) \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{k+1}}-\frac{1}{\sqrt{k+3}}\right)$; $(d) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+2k}$.

12.6.7. Escribiéndolas como series telescópicas, encuentre la suma de las series dadas a continuación.

$(a)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{3^k}$; $\quad (b)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(k+1)}{2^{k-1}}$; $\quad (c)\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(k+1)\sqrt{k}+k\sqrt{k+1}}$.

12.6.8. Examine la convergencia de las series siguientes comparándolas con series conocidas.

$(a)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k+1}$; $\quad (b)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k^4-k}}$.

12.6.9. Pruebe que si $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ converge y $a_k \geqslant 0$, entonces $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sen} a_k$ converge.

12.6.10. Determine la convergencia o divergencia de las series de términos positivos siguientes.

$(a)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{1+k\sqrt{k}}$; $\quad (b)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{k^2\mathrm{e}^k}$; $\quad (c)\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1+k!}{(k+1)!}$;

$(d)\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{3^k k!}{k^k}$; $\quad (e)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k k!}{k^k}$.

12.6.11. Determine la convergencia absoluta, la convergencia o la divergencia de las series siguientes.

$(a)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}$; $\quad (b)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-k}{k^2+1}$; $\quad (c)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{(-2)^k}$;

$(d)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k(k^2-1)}{(k^2+1)}$; $\quad (e)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\operatorname{sen}\frac{1}{k}$; $\quad (f)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{sen}\frac{1}{k}$.

12.6.12. Aplicando el criterio de la integral, establezca la convergencia o divergencia de las series siguientes.

$(a)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$; $\quad (b)\ \displaystyle\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2-n^2}$, donde n es un número natural;

$(c)\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k\ln k}$; $\quad (d)\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\frac{1}{k(\ln k)^p}$, con $p>1$ (y con $p\leqslant 1$).

12.6.13. *Evalúe las series

$(a)\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2013^k-2013^{-k}}$; $\quad (b)\ \displaystyle\sum_{k=1}^{n}k2^{k-1}$.

12.6.14. (a) *Pruebe que si para una serie de términos positivos $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ se tiene que $\displaystyle\lim_{k\to\infty}ka_k = L > 0$, entonces la serie no converge.

(b) *Demuestre que si una serie arbitraria $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es tal que $\lim_{k\to\infty} k^2 a_k = L$, entonces la serie converge.

12.6.15. *Sea $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ una serie de términos positivos.

(a) Aplicando la fórmula de Abel, pruebe la validez de la expresión siguiente para las sumas parciales de la serie:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k(a_k - a_{k+1}) + na_{n+1}.$$

(b) Supongamos ahora que la sucesión de términos positivos $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es convergente y que la sucesión de sus sumandos $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente. Pruebe que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} k(a_k - a_{k+1})$ es también convergente y que $\lim_{k\to\infty} ka_k = 0$.

12.6.16. *Encuentre la constante c_0 tal que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(ck)^k}$ converge para $c > c_0$ y diverge para $0 < c < c_0$.

12.6.17. *Dé un ejemplo de una serie alternante $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k a_{k+1}$, $a_k > 0$, que sea divergente con $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$. (Sugerencia: Considere la serie $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{16} + \frac{1}{5} - \cdots$.)

12.6.18. *Diga por qué la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{10^{k^2}}$ converge a un número irracional.

12.6.19. *Diga si cada uno de los enunciados siguientes es falso o verdadero.

(a) *Si $a_k > c > 0$ para cada k, entonces la serie $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ diverge.

(b) *Si $a_k < 0$ y $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge.

(c) *Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{a_k}$ diverge.

(d) *Si $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$ converge.

(e) *Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge.

(f) *Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ es absolutamente convergente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ es también absolutamente convergente.

(g) *Si $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge y $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k a_k$ converge absolutamente, entonces $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ converge absolutamente.

(h) *Toda serie se puede escribir como serie telescópica.

Series de Potencias

12.6.20. Considere la serie de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$. Aplicando el criterio del cociente de d'Alembert, si $\lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_{k+1}}{a_k}\right| = r$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es igual a $1/r$. Análogamente, aplicando el criterio de Cauchy, si $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = r$, entonces el radio de convergencia de la serie de potencias es igual a $1/r$. Haciendo uso de los criterios anteriores, calcule el radio de convergencia de las series:

$(a)\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^{2k}}{\sqrt{k+2}}$; $(b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(4x+1)^k}{k^k}$.

12.6.21. Encuentre la serie de Taylor de las funciones siguientes en el punto marcado a la derecha y determine el intervalo de convergencia de tales series.

(a) $f(x) = \mathrm{e}^x$ en el punto $x_0 = 3$; (b) $f(x) = \sqrt{2+x}$ en el punto $x_0 = 0$.

12.6.22. Diga para qué valores de x las series siguientes convergen.

$(a)\ \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{\sqrt{k+1}}$; $(b)\ \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^k$; $(c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\operatorname{sen}^k x}{k}$;

$(d)\ \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(2x+3)^k}{k^{\frac{1}{3}}4^k}$; $(e)\ \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{x^k}{2^k\ln k}$.

12.6.23. Diga, en cada uno de los casos siguientes, en qué intervalo es válida la representación para la función dada a la izquierda.

$(a)\ \dfrac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$; $(b)\ \ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}x^k$.

12.6.24. A partir de la representación de la función $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$ en el intervalo $(-1,1)$ mediante la serie de potencias

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k,$$

encuentre la representación de las funciones siguientes como series de potencias en x y señale el dominio de validez de esa representación.

(a) $g(x) = \dfrac{1}{2-x}$; (b) $g(x) = \dfrac{1}{(2-x)^2}$;

(c) $g(x) = \dfrac{1-x}{1+x}$; (d) $g(x) = \ln(2-x)$.

12.6.25. *Para cada una de las series de potencias siguientes, determine el intervalo de convergencia y su suma en los puntos de ese intervalo.

(a) $1 - 4x + 16x^2 - 64x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(4x)^k$;

(b) $1 \cdot 3 - 2 \cdot 4x + 3 \cdot 5x^2 - 4 \cdot 6x^3 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k(k+2)x^{k-1}$;

(c) $2 + 4x^2 + 6x^4 + 8x^6 + 10x^8 + \cdots = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} 2kx^{2(k-1)}$.

12.6.26. *Aplicando la derivada a una serie de potencias conveniente, evalúe la suma $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k2^{k-1}$.

12.6.27. (a) *Pruebe que $\ln n! \geqslant \displaystyle\int_1^n \ln t \, \mathrm{d}t = n \ln n - n + 1$.

(b) *¿Para qué valores de x la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k! x^k}{k^k}$ converge absolutamente?

12.6.28. *Supongamos que la serie de potencias $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k$ tiene como intervalo de convergencia a $(-2, 2)$, y sea n un entero positivo. Encuentre el intervalo de convergencia de las series siguientes.

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^n (x-1)^k$; (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k^n x^{kn}$; (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k (x+1)^{k^2}$.