Capítulo 11

Ecuaciones diferenciales elementales y aplicaciones

El gran impacto que ha tenido el cálculo diferencial e integral en las ciencias y la tecnología moderna se debe al desarrollo de la teoría de las ecuaciones diferenciales. El concepto de ecuación diferencial es el apropiado para la formulación de las leyes dinámicas que gobiernan los fenómenos naturales y el control de los procesos de la industria y la tecnología.

De manera análoga al concepto de ecuación algebraica, que se introduce en el ámbito de los números y las operaciones aritméticas, una ecuación diferencial es una expresión en términos de funciones y sus operaciones, que incluyen la toma de derivadas de cualquier orden. En el caso de las ecuaciones diferenciales, las incógnitas son funciones y el problema de encontrarlas o "despejarlas" es el objetivo de los métodos de solución o integración de esas ecuaciones.

Entre las ecuaciones diferenciales más importantes en las aplicaciones, están las ecuaciones de movimiento de Newton, la ecuación de Navier-Stokes para la dinámica de fluidos, las ecuaciones del electromagnetismo de Maxwell y muchas otras en las diferentes áreas de la ciencia.

En este capítulo, y como una introducción a la teoría de las ecuaciones diferenciales, se estudia la familia de las ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes de primero y segundo orden, es decir, que incluyen primeras y segundas derivadas, y se muestra cómo se aplican los métodos del cálculo desarrollados previamente para calcular sus soluciones. Se presentan varias aplicaciones al movimiento de los cuerpos en la vecindad de la superficie de la Tierra.

11.1 El concepto de ecuación diferencial

Las ecuaciones algebraicas, como las ecuaciones de segundo grado o los sistemas de ecuaciones lineales, que conocemos desde la escuela secundaria, son expresiones que incluyen operaciones algebraicas entre números e incógnitas igualadas al número cero. Por ejemplo, la ecuación de segundo grado

$$x^2 + ax + b = 0,$$

o el sistema de dos ecuaciones lineales no homogéneo en dos incógnitas y con coeficientes reales

$$\begin{cases} ax + by - c = 0 \\ dx + ey - f = 0. \end{cases}$$

Resolver estas ecuaciones, significa encontrar valores para las variables o incógnitas x, y de tal manera que al sustituirlos en las expresiones se obtenga una identidad.

Análogamente al caso algebraico, una ecuación diferencial es una expresión entre funciones e incógnitas relacionadas mediante operaciones propias de funciones, que incluye las de derivación de los distintos órdenes.

Por ejemplo, la expresión

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - (x^2+2)\cos x = 0, \quad x \in (a,b), \tag{11.1}$$

define una ecuación diferencial en (a,b) donde la incógnita es la función $y = y(x)$. Al orden máximo de derivación de la función incógnita se le llama *orden de la ecuación;* así, (11.1) es una ecuación diferencial de segundo orden.

Resolver la ecuación diferencial significa encontrar las funciones $y = y(x)$ definidas en (a,b) tales que al sustituirlas en la ecuación se obtenga una identidad entre los términos a la derecha y a la izquierda del signo de igualdad.

Ejemplo 11.1. La función

$$y(x) = x \operatorname{sen} x$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - (x^2+2)\cos x = 0$$

en $(0,1)$, ya que para cada $x \in (0,1)$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = \operatorname{sen} x + x\cos x$$

y

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(x) = 2\cos x - x \operatorname{sen} x,$$

y al sustituir en la ecuación diferencial obtenemos

$$(2\cos x - x\operatorname{sen} x) + x(\operatorname{sen} x + x\cos x) - (x^2+2)\cos x = 0. \triangleleft$$

11.2 La ecuación $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$

Sean a y f funciones continuas en un intervalo (a, b). A la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a(x)y = f(x) \tag{11.2}$$

se le llama *ecuación diferencial lineal no homogénea de primer orden.*

Para encontrar todas las soluciones de la ecuación (11.2), tomemos una antiderivada $g(x)$ de $a(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = a(x).$$

Multiplicando ambos lados de la ecuación por la función $\mathrm{e}^{g(x)}$, se tiene

$$\mathrm{e}^{g(x)}\left[\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a(x)y\right] = \mathrm{e}^{g(x)}f(x). \tag{11.3}$$

Observando que el lado izquierdo de (11.3) es la derivada del producto entre $\mathrm{e}^{g(x)}$ y $y(x)$, escribimos (11.3) en la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\mathrm{e}^{g(x)}y(x)) = \mathrm{e}^{g(x)}f(x).$$

Luego, tomando $x_0 \in (a, b)$ e integrando,

$$\mathrm{e}^{g(x)}y(x) = \mathrm{e}^{g(x_0)}y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{g(t)}f(t)\,\mathrm{d}t,$$

de donde se obtiene la solución general de la ecuación (11.2), en la forma

$$y(x) = \mathrm{e}^{g(x_0)-g(x)}y(x_0) + \int_{x_0}^{x} \mathrm{e}^{g(t)-g(x)}f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ejemplo 11.2. Considere la ecuación diferencial en $\mathbb{R}$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + (\cos x)y = \operatorname{sen} x \cos x.$$

Una antiderivada de $a(x) = \cos x$ es la función $g(x) = \operatorname{sen} x$. Luego, tomando $x_0 = 0$, la solución $y = y(x)$ de la ecuación es

$$y(x) = \mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x}y(0) + \int_0^x \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} x} \operatorname{sen} t \cos t\,\mathrm{d}t$$

e integrando por partes, se obtiene

$$y(x) = y(0)\mathrm{e}^{-\operatorname{sen} x} + \operatorname{sen} x - 1.$$

Note que el valor de la solución en $x = 0$ determina la solución. $\triangleleft$

11.3 La ecuación $y''(x) + by'(x) + ay(x) = f(x)$

Veamos ahora cómo los métodos desarrollados hasta aquí se aplican a la resolución de la *ecuación lineal no homogénea de segundo orden con coeficientes* *constantes*

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = f(x), \tag{11.4}$$

donde a, b son constantes reales y f es una función continua arbitraria.

El estudio de (11.4) lo iniciaremos con el caso homogéneo:

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = 0. \tag{11.5}$$

Las soluciones de la ecuación (11.5) tienen las propiedades siguientes, fácilmente verificables.

(i) La función $y = 0$ es solución de (11.5).

(ii) Si $y = y(x)$ es solución de (11.5), entonces la función $z(x) = y(x - x_0)$ también lo es.

(iii) Si y_1 y y_2 son dos soluciones de (11.5), entonces la combinación lineal

$$y(x) = \alpha y_1(x) + \beta y_2(x)$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ es también solución de (11.5).

(iv) Si $y = y(x)$ es solución de (11.5), también lo es la función $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

11.3.1 La ecuación $y''(x) - cy(x) = 0$

En este apartado, encontraremos las soluciones de la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) - cy(x) = 0, \tag{11.6}$$

donde c es una constante real.

Distinguiremos los tres casos siguientes:

(a) $c = 0$.

Las soluciones de la ecuación $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{dx^2}(x) = 0$, se obtienen directamente, y son de la forma

$$y(x) = \alpha x + \beta$$

para cualquier par $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(b) $c > 0$.

Las soluciones de la ecuación $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) = cy(x)$ se pueden encontrar ensayando con funciones de la forma $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ y observando que, al sustituirlas en la ecuación, se tiene la relación

$$r^2\mathrm{e}^{rx} = c\mathrm{e}^{rx},$$

la cual se satisfará si el número r tiene alguno de los valores siguientes

$$r_1 = \sqrt{c}, \qquad r_2 = -\sqrt{c}.$$

Por tanto, las funciones $y_1(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{c}x}$ y $y_2(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{c}x}$ son dos soluciones particulares y entonces cualquier combinación lineal de esas dos soluciones,

$$y(x) = \alpha\mathrm{e}^{\sqrt{c}x} + \beta\mathrm{e}^{-\sqrt{c}x}$$

con α y β constantes arbitrarias, también es solución.

(c) $c < 0$.

Ahora la ecuación se escribe en la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) = -|c|y(x)$$

y observamos que las funciones $y_1(x) = \operatorname{sen}\sqrt{|c|}x$ y $y_2(x) = \cos\sqrt{|c|}x$ son dos soluciones particulares y las combinaciones lineales

$$y(x) = \alpha \operatorname{sen}(\sqrt{|c|}x) + \beta\cos(\sqrt{|c|}x),$$

con α y β constantes arbitrarias, forman una familia de soluciones.

Enseguida mostraremos que las familias de soluciones que hemos encontrado para los distintos casos de la ecuación (11.6) agotan todas sus soluciones posibles. Para probar esta afirmación, demostraremos primero que si una solución $y = y(x)$ de la ecuación (11.6) es tal que en el punto x_0 se anula su valor y el de su derivada, es decir $y(x_0) = 0$ y $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$, entonces $y(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Lema 11.1. Sea $y = y(x)$ una función definida en $\mathbb{R}$ tal que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) = cy(x)$ con $c \in \mathbb{R}$ y además $y(x_0) = 0$ y $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$. Entonces $y(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Demostración. Sea $x \in [x_0, x_0 + a)$ con $0 < a < 1$ y $0 < a|c| < 1$. Por el teorema del valor medio, podemos escribir

$$y(x) - y(x_0) = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_1)(x - x_0) \tag{11.7}$$

donde $x_1 \in (x_0, x)$. Análogamente, aplicando el teorema del valor medio a la función $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ en el intervalo $[x_0, x_1]$, podemos escribir

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_1) - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x_2)(x_1 - x_0) \tag{11.8}$$

donde $x_2 \in (x_0, x_1)$. Combinando (11.7) y (11.8) se tiene

$$y(x) = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x_2)(x_1 - x_0)(x - x_0),$$

y considerando que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) = cy(x)$, se tiene que

$$y(x) = cy(x_2)(x_1 - x_0)(x - x_0). \tag{11.9}$$

Repitiendo ahora el argumento para el punto x_2, obtendremos

$$y(x_2) = cy(x_4)(x_3 - x_0)(x_2 - x_0) \tag{11.10}$$

con $x_3, x_4 \in [x_0, x_2)$ y, sustituyendo (11.10) en (11.9) tenemos

$$y(x) = c^2y(x_4)(x_3 - x_0)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)(x - x_0).$$

Repitiendo el argumento anterior k veces y tomando valor absoluto, arribaremos a la estimación

$$|y(x)| \leq Mc^ka^{2k}$$

donde M es cota de $y = y(x)$ en $[x_0, x_0 + a]$. Tomando límite cuando $k \to \infty$ se tiene que $y(x) = 0$ para $x \in [x_0, x_0 + a)$. Se sigue, por continuidad, que $y(x_0 + a) = 0$ y $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x_0 + a) = 0$. Podemos repetir el argumento anterior en el intervalo $[x_0 + a, x_0 + 2a)$ y concluir que el intervalo donde se anula la función $y = y(x)$ se extiende indefinidamente a la derecha de x_0. Por un argumento similar se extiende también indefinidamente a la izquierda de x_0, con lo cual se prueba que $y(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. $\triangleleft$

A partir del lema 11.1, se sigue que si dos soluciones de la ecuación (11.6) y sus derivadas toman el mismo valor en un punto, entonces coinciden en todos los puntos de $\mathbb{R}$, ya que su diferencia, al ser también solución y anularse junto con su derivada en un punto, se anulará en todo $\mathbb{R}$, lo cual significa que ambas soluciones coincidirán y serán entonces la misma. A este resultado se le conoce como el *teorema de unicidad de la solución* para el problema de condición inicial.

Tomando en cuenta el lema 11.1 y sus consecuencias sobre la unicidad de la solución, observamos que si se establece de antemano en un punto inicial x_0 el valor de una solución a la ecuación (11.6) y el de su derivada y se encuentra alguna solución que tome los mismos valores en x_0, entonces esa será la única solución con esas propiedades. Como las familias de soluciones que hemos encontrado para los distintos casos de la ecuación (11.6) dependen de dos coeficientes o parámetros, entonces, dados dos valores prescritos para la solución y su derivada en un punto, siempre podremos encontrar dentro de esas familias, una función con esos valores. Comprobemos esto con algunos ejemplos.

Ejemplo 11.3. La solución de la ecuación $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) = y(x)$ tal que $y(1) = 2$ y $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1) = -1$, se encuentra buscando en la familia de soluciones $y(x) = \alpha\mathrm{e}^x + \beta\mathrm{e}^{-x}$ aquella que satisfaga tales condiciones. Para ello, α y β deben satisfacer

$$\alpha\mathrm{e} + \beta\mathrm{e}^{-1} = 2 \quad \text{y} \quad \alpha\mathrm{e} - \beta\mathrm{e}^{-1} = -1,$$

es decir, $\alpha = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1}$ y $\beta = \frac{3}{2}\mathrm{e}$. Luego, la solución buscada es

$$y(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x-1} + \frac{3}{2}\mathrm{e}^{1-x}. \triangleleft$$

Ejemplo 11.4. La solución de la ecuación $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) = -4y(x)$ tal que $y(0) = 1$ y $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = -1$, se encuentra buscando en la familia de soluciones $y(x) = \alpha\cos 2x + \beta\,\mathrm{sen}\,2x$, aquella que satisfaga esas condiciones; es decir, α y β deben satisfacer

$$\alpha = 1, \qquad \beta = -\frac{1}{2}.$$

Entonces, la solución es la función $y(x) = \cos 2x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x$. $\triangleleft$

Ahora veamos que cualquier ecuación homogénea de segundo orden con coeficientes constantes es equivalente a alguna de las anteriores, en el sentido de que un cambio de variable la reduce a uno de estos casos. En concreto, si $y = y(x)$ es solución de la ecuación diferencial (11.5) y sustituimos la función

$$z(x) = y(x)\mathrm{e}^{\frac{b}{2}x}$$

en la ecuación (11.5), tendremos

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\big(\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}z(x)\big) + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}z(x)\big) + a\mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}z(x) = 0.$$

De aquí se obtiene que la ecuación diferencial para $z = z(x)$ es

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{b^2}{4} - a\right)z,$$

que es una ecuación de la forma (11.6) con $c = \dfrac{b^2}{4} - a$.

Ejemplo 11.5. Para la ecuación $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x} + 2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = 0$ tal que $y(2) = 0$

y $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(2) = 1$, se tiene que $c = \dfrac{b^2}{4} - a = -2$. Para encontrar la solución, resolvemos primero la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}(x) = -2z(x),$$

cuyas soluciones son de la forma

$$z(x) = \alpha \cos \sqrt{2}x + \beta \operatorname{sen} \sqrt{2}x$$

y dan lugar a la familia de soluciones de la ecuación inicial, que es de la forma

$$y(x) = \alpha \mathrm{e}^{-x} \cos \sqrt{2}x + \beta \mathrm{e}^{-x} \operatorname{sen} \sqrt{2}x.$$

Para calcular los valores de α y β, usamos las condiciones iniciales:

$$\begin{aligned} 0 &= y(2) = \alpha \mathrm{e}^{-2} \cos 2\sqrt{2} + \beta \mathrm{e}^{-2} \operatorname{sen} 2\sqrt{2} \\ 1 &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(2) = -\mathrm{e}^{-2}(\alpha - \beta\sqrt{2}) \cos 2\sqrt{2} - \mathrm{e}^{-2}(\beta + \alpha\sqrt{2}) \operatorname{sen} 2\sqrt{2}), \end{aligned}$$

de donde

$$\alpha = -\frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} 2\sqrt{2}, \qquad \beta = \frac{\mathrm{e}^2}{\sqrt{2}} \cos 2\sqrt{2}.$$

Así que la solución es

$$y(x) = \frac{\mathrm{e}^{2-x}}{\sqrt{2}} \operatorname{sen} (\sqrt{2}(x-2)). \triangleleft$$

Resumimos la discusión anterior en el teorema siguiente.

Teorema 11.1. La soluciones $y = y(x)$ de la ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea con coeficientes constantes $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + b\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = 0$ están definidas para $x \in \mathbb{R}$ y son:

$$y(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\left[\alpha \mathrm{e}^{\frac{\sqrt{b^2-4a}}{2}x} + \beta \mathrm{e}^{\frac{-\sqrt{b^2-4a}}{2}x}\right] & \text{si } \; b^2 - 4a > 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\big(\alpha + \beta x\big) & \text{si } \; b^2 - 4a = 0 \\ \mathrm{e}^{-\frac{b}{2}x}\left[\alpha \cos\left(\sqrt{a - \frac{b^2}{4}}x\right) + \beta \operatorname{sen}\left(\sqrt{a - \frac{b^2}{4}}x\right)\right] & \text{si } \; b^2 - 4a < 0, \end{cases}$$

con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Nota Importante. *(a) Si $y_1 = y_1(x)$ y $y_2 = y_2(x)$ son soluciones de la ecuación homogénea (11.5), a la función*

$$W_{y_1,y_2}(x) = y_1(x)\frac{dy_2}{dx}(x) - y_2(x)\frac{dy_1}{dx}(x)$$

se le llama wronskiano[1] *de y_1 y y_2, y tiene la propiedad de que*

$$\frac{dW}{dx} = -bW,$$

[1] Por J. M. Höené de Wronski (1778-1853), matemático polaco de ascendencia checa.

es decir, $W(x) = W(0)e^{-bx}$*, de donde se deduce que* $W(x) \neq 0$ *para toda* $x \in \mathbb{R}$ *si* $W(0) \neq 0$.

(b) Si $y_3 = y_3(x)$ *y* $y_4 = y_4(x)$ *es otro par de soluciones de (11.5), entonces* $W_{y_3,y_4} = cW_{y_1,y_2}$ *para alguna* $c \in \mathbb{R}$.

11.3.2 Método de variación de constantes

Para encontrar todas las soluciones de la ecuación de segundo orden no homogénea

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = f(x), \tag{11.11}$$

hagamos primero la observación siguiente: si $y_1 = y_1(x)$ y $y_2 = y_2(x)$ son dos soluciones de (11.11), entonces su diferencia $y_1 - y_2$ es solución de la ecuación homogénea (11.5). Tomando en cuenta esto, bastará conocer una solución particular $y_p = y_p(x)$ de la ecuación no homogénea para conocer todas sus soluciones, las cuales serán de la forma

$$y = y_p + \text{solución general de la ecuación homogénea.}$$

Esta observación reduce el problema de encontrar todas las soluciones de la ecuación (11.11), al cálculo de sólo una solución particular de dicha ecuación. Para encontrar una solución particular de (11.11) consideraremos el *método de variación de constantes*,[2] que consiste en construir una solución particular para la ecuación no homogénea (11.11) a partir de las soluciones de la ecuación homogénea (11.5). Si denotamos por $y_1 = y_1(x)$ y $y_2 = y_2(x)$ un par de soluciones de la ecuación lineal homogénea cuyas combinaciones lineales generan todas las soluciones de esa ecuación y ahora buscamos una solución particular de la ecuación no homogénea (11.11) de la forma

$$y_p(x) = z_1(x)y_1(x) + z_2(x)y_2(x) = \sum_{i=1}^{2} z_i(x)y_i(x) \tag{11.12}$$

donde $z_1 = z_1(x)$ y $z_2 = z_2(x)$ son dos funciones a determinar, al sustituir (11.12) en (11.11), tendremos que

$$f(x) = \frac{\mathrm{d}^2y_p}{\mathrm{d}x^2}(x) + b\frac{\mathrm{d}y_p}{\mathrm{d}x}(x) + ay_p,$$

lo cual da lugar, para las funciones z_1 y z_2, a la expresión

$$f(x) = \sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}(z_i(x)y_i(x)) + b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}z_i(x)y_i(x) + az_i(x)y_i(x)\right). \tag{11.13}$$

[2] A este método también se le llama *método de variación de parámetros* o *método de Lagrange*, por Joseph-Louis Lagrange (1736-1813), matemático italo-francés mencionado en el capítulo primero.

Al tomar en cuenta que

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_i}{\mathrm{d}x^2}(x) + b\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}(x) + ay_i(x) = 0$$

para cada $i = 1, 2$, la ecuación (11.13) se simplifica en la forma

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}x^2}(x)y_i(x) + b\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}x}(x)y_i(x) + 2\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}(x)\right) = f(x). \qquad (11.14)$$

Como z_1 y z_2 son dos funciones a determinar, podemos imponer la condición de que

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}(x)y_1(x) + \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}(x)y_2(x) = 0, \qquad (11.15)$$

en cuyo caso se tendrá también que

$$\sum_{i=1}^{2}\left(\frac{\mathrm{d}^2 z_i}{\mathrm{d}x^2}(x)y_i(x) + \frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x}(x)\right) = 0$$

y la expresión (11.14) se reduce a

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}(x) + \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}(x)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}(x) = f(x),$$

que, junto con la ecuación (11.15) constituye, para cada valor $x \in \mathbb{R}$, un sistema lineal no homogéneo de dos ecuaciones algebraicas para las incógnitas $\frac{dz_1}{\mathrm{d}x}$ y $\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}$ y cuyas soluciones son

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{-f(x)y_2(x)}{y_1(x)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}(x) - y_2(x)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}(x)}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{f(x)y_1(x)}{y_1(x)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}(x) - y_2(x)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}(x)}.$$

El denominador $y_1(x)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}(x) - y_2(x)\frac{\mathrm{d}y_1}{dx}(x)$ es el wronskiano $W_{y_1,y_2}(x)$ y es distinto de cero para toda $x \in \mathbb{R}$. Integrando las expresiones para $\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}$ y $\frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}$, se tiene

$$z_1(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{-f(t)y_2(t)}{y_1(t)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}(t) - y_2(t)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x}\frac{-f(t)y_2(t)}{W_{y_1,y_2}(t)}\,\mathrm{d}t,$$

$$z_2(x) = \int_{x_0}^{x} \frac{f(t)y_1(t)}{y_1(t)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}(t) - y_2(t)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x}\frac{f(t)y_1(t)}{W_{y_1,y_2}(t)}\,\mathrm{d}t.$$

Para resumir estos cálculos, enunciamos el teorema siguiente.

Teorema 11.2. Si $y_1 = y_1(y)$ y $y_2 = y_2(x)$ son dos soluciones de la ecuación diferencial (11.11) y $W_{y_1,y_2}(x_0) \neq 0$ entonces la función

$$y_p = \left[\int_{x_0}^{x} \frac{-f(t)y_2(t)}{W_{y_1,y_2}(t)}\,\mathrm{d}t\right] y_1(x) + \left[\int_{x_0}^{x} \frac{f(t)y_1(t)}{W_{y_1,y_2}(t)}\,\mathrm{d}t\right] y_2(x)$$

es una solución particular de la ecuación no homogénea (11.11).

Ejemplo 11.6. Encontremos todas las soluciones de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = f(x), \tag{11.16}$$

cuando $b^2 - 4a > 0$. En este caso, las soluciones de la ecuación homogénea son de la forma $\alpha \mathrm{e}^{r_1 x} + \beta \mathrm{e}^{r_2 x}$ con

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2},$$

y una solución particular $y_p = y_p(x)$ de la ecuación no homogénea es

$$y_p(x) = z_1(x)\mathrm{e}^{r_1 x} + z_2(x)\mathrm{e}^{r_2 x}$$

con

$$z_1(x) = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4a}} \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{-r_1 t} dt, \quad z_2(x) = \frac{-1}{\sqrt{b^2 - 4a}} \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{-r_2 t} dt. \triangleleft$$

Con base en lo anterior, enunciamos el teorema siguiente.

Teorema 11.3. Las soluciones $y = y(x)$ de la ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes constantes y no homogénea (11.16) toman, en los distintos casos, la forma siguiente:

(a) Si $b^2 - 4a > 0$,

$$y(x) = \alpha \mathrm{e}^{r_1 x} + \beta \mathrm{e}^{r_2 x} + \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4a}} \int_{x_0}^{x} f(t)[\mathrm{e}^{r_1(x-t)} - \mathrm{e}^{r_2(x-t)}]\,\mathrm{d}t,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a}}{2}, \qquad r_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a}}{2}.$$

(b) Si $b^2 - 4a = 0$,

$$y(x) = \mathrm{e}^{\frac{-b}{2}x}\big[\alpha + \beta x\big] - \int_{x_0}^{x} f(t)(t - x)\mathrm{e}^{\frac{b}{2}(t-x)}\,\mathrm{d}t,$$

donde $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(c) Si $b^2 - 4a < 0$,

$$y(x) = \mathrm{e}^{\frac{-b}{2}x}\big[\alpha \cos qx + \beta \operatorname{sen} qx\big] + \frac{1}{q} \int_{x_0}^{x} f(t)\mathrm{e}^{\frac{b}{2}(t-x)} \operatorname{sen}(q(x - t))\,\mathrm{d}t,$$

donde $q = \dfrac{1}{2}\sqrt{|b^2 - 4a|}$.

Ejemplo 11.7. Resuelva la ecuación diferencial $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = \mathrm{e}^{-x}$.

Solución. La ecuación homogénea asociada es $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} - 2y = 0$. Dado que $b^2 - 4a = 9 > 0$, las soluciones $w = w(x)$ de la ecuación homogénea son $w(x) = \alpha\mathrm{e}^{2x} + \beta\mathrm{e}^{-x}$. Calculemos ahora la solución particular de la forma

$$y_p(x) = z_1(x)\mathrm{e}^{2x} + z_2(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

Las derivadas de las funciones z_1 y z_2 satisfacen el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{e}^{2x} + \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{e}^{-x} &= 0 \\ 2\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{e}^{2x} - \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}(x)\mathrm{e}^{-x} &= \mathrm{e}^{-x}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}z_1}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-3x}, \qquad \frac{\mathrm{d}z_2}{\mathrm{d}x}(x) = -\frac{1}{3}.$$

Entonces

$$z_1(x) = -\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-3x} \qquad z_2(x) = -\frac{1}{3}x.$$

La solución particular $y_p = y_p(x)$ es

$$y_p(x) = -\frac{1}{9}\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{-x}.$$

Finalmente, las soluciones $y = y(x)$ de la ecuación son de la forma

$$y(x) = \alpha\mathrm{e}^{2x} + \beta\mathrm{e}^{-x} - \frac{1}{3}x\mathrm{e}^{-x}. \ \triangleleft$$

11.4 Leyes del movimiento de Newton

Entre las más importantes aplicaciones del cálculo diferencial está la descripción matemática del movimiento de los cuerpos materiales sometidos a la acción de fuerzas externas. El mismo concepto de fuerza pudo ser definido identificando su acción sobre los cuerpos físicos en cada instante como proporcional a la variación que experimenta su velocidad con respecto al tiempo (aceleración) como consecuencia de la presencia de dichas fuerzas.

En términos generales, se supone que el movimiento de las partículas tiene lugar en el marco de un sistema de referencia fijo, con respecto al cual se realizan las mediciones de las posiciones de los cuerpos o partículas, relativas al fluir del tiempo, que se considera independiente de todo observador.

Isaac Newton[3] formuló las leyes que gobiernan el movimiento de los cuerpos en los términos siguientes:

[3]Isaac Newton (1642-1727), físico y matemático inglés mencionado en el capítulo primero.

Primera (*ley de inercia*): los cuerpos mantienen su estado de reposo o de velocidad constante en ausencia de fuerzas externas.

Segunda (*ley de movimiento*): si $y = y(t)$ representa la función de posición de un cuerpo durante un intervalo de tiempo (a, b), entonces la fuerza $F(t, y(t))$ que experimenta en el tiempo t, cuado se halla en la posición $y(t)$, es proporcional a la segunda derivada $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t)$ de la función de posición en el tiempo t, es decir,

$$F(t, y(t)) = m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t).$$

La constante de proporcionalidad m se conoce como la *masa* del cuerpo y depende de las propiedades de la materia que forma ese cuerpo.

A continuación mostraremos algunos ejemplos donde se aplican las leyes del movimiento de Newton.

1. *Caída bajo la acción de la gravedad.* Un cuerpo situado en una vecindad de la superficie de la Tierra, experimenta una fuerza de magnitud constante W igual a su peso y dirigida perpendicularmente hacia el suelo. A tal fuerza se le denomina *fuerza de gravedad.*

   Si $y = y(t)$ denota la posición de un cuerpo en el tiempo t medida sobre la vertical, la segunda ley de movimiento de Newton se expresa mediante la ecuación diferencial

   $$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) = -W,$$

   donde m es la masa del cuerpo y $\frac{W}{m} = g = 9.8$ m/seg^2. Esto último significa que la aceleración de los cuerpos en caída libre es constante e igual a $-g$. A la constante g se le llama *aceleración debida a la fuerza de gravedad.*

   Resolviendo la ecuación diferencial, se tiene que la función de posición $y = y(t)$ es

   $$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)t + y(0),$$

   donde $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0)$ y $y(0)$ son la velocidad y la posición del cuerpo en el tiempo $t = 0$ sobre la vertical.

   Ejemplo 11.8. Si un cuerpo se arroja desde una altura de 100 metros con una velocidad inicial hacia arriba de 20 m/seg, calcule el tiempo y la velocidad con que golpeará el suelo.

Solución. De acuerdo a la segunda ley de movimiento de Newton, si denotamos por $y(t)$ la posición del cuerpo en el tiempo t, tendremos

$$y(t) = -4.9t^2 + 20t + 100$$

y entonces el cuerpo golpeará el suelo en el tiempo t_0 tal que $y(t_0) = 0$, es decir, cuando

$$-4.9t_0^2 + 20t_0 + 100 = 0,$$

o

$$t_0 = \frac{20}{9.8}(1 + \sqrt{5.9}).$$

La velocidad que llevará el cuerpo al chocar será de

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t_0) = -\sqrt{5.9}.$$

El signo negativo significa que la velocidad es en dirección contraria al sentido positivo en que se miden las alturas sobre la Tierra. ◁

2. *Caída bajo la acción de la gravedad con fricción del aire.* Si se toma en cuenta el efecto de la presencia del aire sobre la caída de un cuerpo, experimentalmente se ha observado que el aire opone una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad que lleva el cuerpo y en sentido contrario a esa velocidad. Esta nueva fuerza, llamada fuerza de fricción, modifica la ley de caída libre, de tal manera que la ecuación de movimiento toma ahora la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) + \frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = -g, \tag{11.17}$$

donde $k > 0$ es una constante.

Aplicando el teorema 11.3, observamos que las soluciones de la ecuación diferencial (11.17) son de la forma

$$y(t) = \alpha \mathrm{e}^{-kt/m} - \frac{gm}{k}t + \beta, \tag{11.18}$$

donde las constantes α, β están determinadas por la posición y la velocidad del cuerpo en el tiempo $t = 0$,

$$\begin{aligned} \alpha &= -\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{gm}{k}\right)\frac{m}{k}, \\ \beta &= y(0) + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{gm}{k}\right)\frac{m}{k}. \end{aligned}$$

Note que la acción de la fuerza de fricción hace que, a la larga, la velocidad de caída sea constante e igual $-\dfrac{gm}{k}$.

3. *Movimiento bajo la fuerza de un resorte.* Consideramos, sobre una mesa lisa, sin fricción, un resorte que tiene fijo uno de sus extremos. Sujetemos un cuerpo de masa m al extremo libre del resorte como se muestra en la figura 11.1 Experimentalmente se ha determinado que la fuerza que ejerce

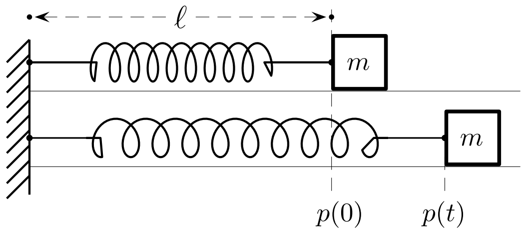

Figura 11.1:

el resorte sobre el cuerpo en un tiempo t, es proporcional y en sentido contrario a la deformación (estiramiento o contracción) que muestra el resorte con respecto a su longitud normal, en un instante dado. La constante de proporcionalidad, llamada *constante de restitución,* es un número positivo k que sólo depende de las características materiales del resorte y no cambia con respecto al tiempo.

El problema del movimiento bajo la acción del resorte consiste en determinar para un cuerpo, que supondremos de masa m, su posición como función del tiempo, conocidas la posición inicial $p(0)$ y la velocidad inicial $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(0)$ de ese cuerpo.

En virtud de la segunda ley de movimiento de Newton, si la posición $p = p(t)$ del cuerpo es medida desde el punto de cero deformación del resorte, tal como se muestra en la figura 11.1, la función $p = p(t)$ debe satisfacer, en cada tiempo, la relación siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\omega^2 p(t), \tag{11.19}$$

donde

$$\omega^2 = \frac{k}{m}.$$

Las soluciones de la ecuación (11.19), de acuerdo al teorema 11.3, tienen la forma

$$p(t) = a \operatorname{sen} \omega t + b \cos \omega t,$$

donde

$$a = \frac{1}{\omega}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(0), \qquad b = p(0).$$

La fórmula para la posición se puede escribir en la forma

$$p(t) = \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(0)\right)^2 + \omega^2 p^2(0)}\,\mathrm{sen}\,(\omega t + \phi),$$

con

$$\phi = \mathrm{arcsen}\frac{p(0)}{\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(0)\right)^2 + \omega^2 p^2(0)}}.$$

A la constante

$$A \overset{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{\omega}\sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(0)\right)^2 + \omega^2 p^2(0)}$$

se le llama *amplitud del movimiento* y a ϕ, *fase.* Observe que bajo la fuerza del resorte, el cuerpo describe un movimiento periódico con periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ y amplitud A. En la figura 11.2 se muestra la gráfica de la función $p = p(t)$.

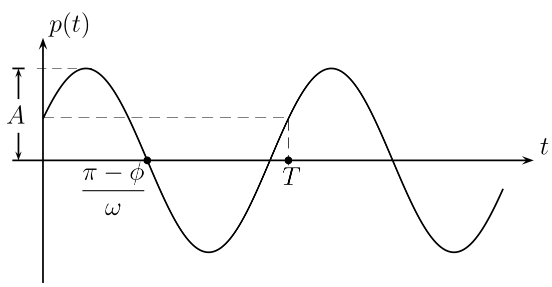

Figura 11.2: La función posición $p = p(t)$

4. *Movimiento con fricción bajo la fuerza de un resorte y ante la presencia de una fuerza externa.* Consideremos ahora el movimiento de un cuerpo sometido a la fuerza de un resorte, en un medio que ofrece una fuerza de fricción $F = F(t)$, proporcional a la velocidad del cuerpo, o sea,

$$F(t) = -\rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t),$$

y ante la presencia adicional de una fuerza externa $f = f(t)$ que depende del tiempo. Supondremos, además, que $\rho^2 < 4\omega^2$, ya que en otro caso el movimiento del cuerpo no es oscilatorio.

Con las condiciones anteriores, la ecuación de movimiento toma la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2p}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\omega^2 p(t) - \rho\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t) + f(t),$$

donde $p = p(t)$ representa la posición del cuerpo medida desde la posición de cero deformación del resorte. Aplicando el teorema 11.3, tenemos que la posición del cuerpo está dada por

$$p(t) = \alpha \mathrm{e}^{-\rho t/2} \cos qt + \beta \mathrm{e}^{-\rho t/2} \operatorname{sen} qt + \frac{1}{q} \int_0^t f(s) \mathrm{e}^{-\rho(s-t)/2} \operatorname{sen}(q(t-s)) ds,$$

donde

$$q = \frac{1}{2}\sqrt{\rho^2 - 4\omega^2}.$$

Como casos particulares importantes, se presentan los siguientes.

(a) $\rho = 0$ y $f\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = f(t)$, es decir, el movimiento es sin fricción y la fuerza externa es una fuerza periódica con la misma frecuencia que la de las soluciones del resorte libre. En esta situación la función de posición es de la forma

$$p(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \operatorname{sen}(\omega(t-s)) ds,$$

y si consideramos que la fuerza externa es periódica y de la forma

$$f(s) = A \cos \omega s,$$

entonces todas las soluciones se escriben

$$p(t) = \alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t + \frac{A}{\omega}\left[\frac{t}{2} \operatorname{sen} \omega t + \frac{1}{2\omega} \cos \omega t\right].$$

En particular, la solución con $p(0) = 0$ y $\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(0) = 1$, es

$$p(t) = \frac{1}{\omega}\left(\frac{At}{2} + 1\right) \operatorname{sen} \omega t. \tag{11.20}$$

Note que cuando el tiempo crece, el desplazamiento del cuerpo crece sin límite y el resorte terminará por romperse. En la figura 11.3 se muestra este comportamiento.

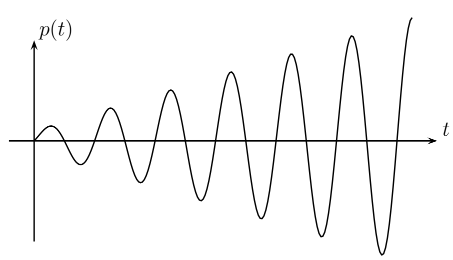

Figura 11.3: Gráfica de la función (11.20)

(b) $f(t) = 0$, es decir no existe fuerza externa y a la fuerza del resorte sólo se suma la fuerza de fricción. En este caso, la ecuación de movimiento es

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}t^2}(t) = -\omega^2 p(t) - \rho \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t),$$

cuyas soluciones son de la forma

$$p(t) = \mathrm{e}^{-\rho t/2}\big[\alpha \cos qt + \beta \operatorname{sen} qt\big], \tag{11.21}$$

donde

$$q = \frac{1}{2}\sqrt{\rho^2 - 4\omega^2}.$$

Note que en este último caso, el cuerpo oscila con una amplitud que decrece exponencialmente y, así, cuando el tiempo crece, el cuerpo tiende a la posición $p = 0$. En la figura 11.4 se muestra la gráfica de la función (11.21).

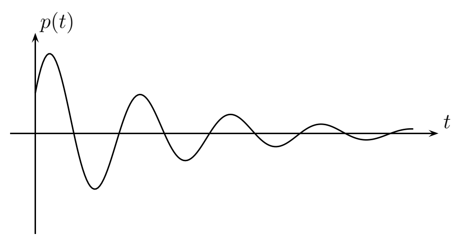

Figura 11.4: Gráfica de la función (11.21)

Ejercicios y problemas del capítulo

Ecuaciones de primero y segundo orden

11.4.1. Dada una ecuación diferencial de la forma
$$a(x)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x)+b(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)+y(x)=0,$$
encuentre funciones $a=a(x)$ y $b=b(x)$ tales que $y_1(x)=x$ y $y_2(x)=x^2$ sean soluciones de la ecuación.

11.4.2. (a) Pruebe que si $y=y(x)$ es una solución de la ecuación
$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)=2xy(x)+2x\sqrt{y(x)},\quad x>0,$$
entonces $z=\sqrt{y}$ es solución de la ecuación
$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x)=xz(x)+x,\quad x>0.$$

(b) Resolviendo la ecuación para $z=z(x)$, encuentre la solución $y=y(x)$ de la primera ecuación tal que $y(1)=1$.

11.4.3. (a) Resuelva la ecuación $y(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)=x$.

(b) Encuentre las soluciones $y=y(x)$ de la ecuación anterior tales que

(i) $y(2)=1$; (ii) $y(2)=-1$; (iii) $y(-2)=-1$.

(c) Dibuje la gráfica de las soluciones del punto 11.4.3.

11.4.4. Encuentre la función $y=y(x)$ tal que $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x)-3\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x)+2y(x)=x$ y $y(1)=2$ y $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(1)=0$.

11.4.5. Encuentre la función f tal que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)+2xf(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ y además $f(0)=1$.

11.4.6. Multiplicando a ambos lados de las ecuaciones indicadas por una función apropiada, de tal manera que el lado izquierdo se exprese como la derivada de un producto donde uno de los factores es la función incógnita, encuentre todas las soluciones de las ecuaciones de primer orden siguientes.

(a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\mathrm{e}^{x}y=3\mathrm{e}^{x}$; (b) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2xy=x\mathrm{e}^{-x^2}$;

(c) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-(\tan x)y=\mathrm{e}^{\operatorname{sen} x}$ para $x\in(0,\frac{\pi}{2})$;

(d) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=f(x)$, para $x\in\mathbb{R}$, donde $f(x)=\begin{cases}1-|x| & \text{si} \quad |x|\leqslant 1\\ 0 & \text{si} \quad |x|>1.\end{cases}$

11.4.7. Considere la ecuación de Bernoulli $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + a(x)y(x) = f(x)y^k(x)$, donde k es una constante. Si $y = y(x)$ es solución de la ecuación de Bernoulli, pruebe que la función $z = y^{1-k}$ es solución de $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(x) + (1-k)a(x)z(x) = (1-k)f(x)$. Con la información anterior, encuentre todas las soluciones de la ecuación de Bernoulli $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) - 2xy(x) = xy^2(x)$.

11.4.8. Si $y = y(x)$ es solución de la ecuación $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -y$, diga de qué ecuación diferencial es solución la función $z = \frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2$.

11.4.9. Muestre que si $y = y(x)$ es solución de la ecuación $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = 0$, entonces la función $z(x) = \mathrm{e}^{\frac{b}{2}x}y(x)$ es solución de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} = \left(\frac{b^2}{4} - a\right)z.$$

11.4.10. Encuentre la solución $y = y(x)$ de la ecuación $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + 4y(x) = 1$ tal que $y(0) = 2$ y $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = -1$.

11.4.11. Encuentre todas las soluciones de las ecuaciones diferenciales de segundo orden siguientes:

(*a*) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + 4y(x) = \cos x$; (*b*) $6\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + 5\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) - 6y(x) = x$;

(*c*) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + 5y(x) = 3\mathrm{e}^{-x} + 2x^2$.

11.4.12. Halle las soluciones $y = y(x)$ de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) - 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + 2y(x) = 0$$

que satisfagan las condiciones siguientes:

(*a*) $y(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = 0$; (*b*) $y(0) = 1$, $y(1) = -1$;

(*c*) $y(0) = 1$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. (d) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 1$.

11.4.13. Una ecuación diferencial de la forma

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + a(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + b(x)y(x) = 0 \tag{11.22}$$

donde $a = a(x)$ y $b = b(x)$ son funciones continuas en un intervalo I, se denomina *ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables.* Encuentre la solución $y = y(x)$ a la ecuación diferencial con coeficientes variables

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) = 0$$

tal que $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(0) = 1$ y $y(0) = -1$.

11.4.14. (a) Demuestre que la solución $y = y(t)$ de la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}(t) + \omega^2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t) = F_0 \cos\gamma t$$

tal que

$$y(0) = 0, \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = 0,$$

es

$$y(t) = \frac{F_0}{\omega^2 - \gamma^2}(\cos\gamma t - \cos\omega t).$$

(b) Calcule, para cada t, el valor $\lim_{\gamma\to\omega} y(t)$.

11.4.15. *Encuentre las funciones que satisfacen las siguientes ecuaciones diferenciales y toman el valor señalado a la derecha.

(a) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + |x-2|y(x) = 1, \quad y(2) = 1;$

(b) $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(x) + y(x) = |2x-1|, \quad y(1) = 0.$

11.4.16. *Encuentre la curva $y = f(x)$ que pasa por el punto $(1, 1)$ y la pendiente de su recta normal en cada punto $(x, f(x))$ es igual a $\frac{x}{f(x)}$.

11.4.17. *Sea f una función cuya función derivada satisface $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = f(1-x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$ y $f(0) = 1$. Encuentre $f(1)$.

11.4.18. (a) *Sea $y_1 = y_1(x)$ una solución de la ecuación (11.22) con $y_1(x) \neq 0$ para $x \in I$. Demuestre que una función y_2 de la forma

$$y_2(x) = u(x)y_1(x)$$

será otra solución de (11.22), si la función $v(x) = \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}(x)$ satisface la ecuación de primer orden

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}(x) + \delta(x)v(x) = 0,$$

donde

$$\delta(x) = a(x) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\ln y_1(x)).$$

En tal caso, la función

$$y_2(x) = Ay_1(x)\int_{x_0}^{x} \exp\left(- \int_{x_0}^{s} \left[a(t) + 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ln y_1(t))\right] \mathrm{d}t\right) \mathrm{d}s,$$

donde A es una constante, es otra solución de la ecuación (11.22). Además, y_1 y y_2 son linealmente independientes.

(b) *Verifique que la función $y_1(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ es solución de la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(x) + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)y(x) = 0.$$

(c) Aplicando el resultado obtenido en (a), encuentre otra solución de la ecuación.

Aplicaciones elementales

11.4.19. Un tanque con 50000 litros de agua tiene disueltos 2500 gramos de sal. Para disminuir la salinidad del agua, el responsable empieza a bombear agua pura dentro del tanque a razón de 200 litros por minuto y, simultáneamente, le extrae 200 litros por minuto del agua salina. ¿En cuánto tiempo se habrá eliminado de esta manera el 99.5% de la sal que había en el tanque?

11.4.20. Un cuerpo de 2 kilogramos de peso está suspendido de un resorte cuya constante es $\frac{3}{10}$Kg/m. El sistema se sumerge en un líquido que opone una fuerza de amortiguamiento numéricamente igual a la velocidad instantánea del cuerpo. A partir de $t = 0$, se aplica sobre el sistema una fuerza exterior $F(t) = \mathrm{e}^{-t}$. Determine la ecuación de movimiento del cuerpo si éste se suelta a partir del reposo desde un punto que está a 1 metro debajo del punto de equilibrio.

11.4.21. *Ley de acción de masas.*

(a) Dos sustancias químicas A y B se combinan para formar una sustancia química C. La rapidez o velocidad de la reacción es proporcional al producto de las cantidades que en cada instante quedan de A y B (es decir que no se han convertido todavía en C). Inicialmente hay 40 gramos de A y 50 gramos de B y por cada gramo de B se requieren 2 gramos de A para formar C. Se observa que se forman 10 gramos de C en 5 minutos ¿Cuánto se forma en 20 minutos? ¿Cuál es la cantidad límite de C después de un tiempo largo? ¿Cuánto queda de las substancias A y B después de un tiempo largo?

(b) Resuelva el problema anterior si inicialmente hay 100 gramos de la sustancia A. ¿Cuánto demora en formarse la mitad de la sustancia química C?

(c) Obtenga la solución de la ecuación $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = k(\alpha - y)(\beta - y)$ que rige la dinámica de las reacciones químicas, en los dos casos posibles, $\alpha = \beta$ y $\alpha \neq \beta$.

11.4.22. (a) Un objeto de masa m cae cerca de la superficie de la tierra y es desacelerado por la fricción de la atmósfera, la cual opone una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad del cuerpo, de tal manera que, de acuerdo a la Ley de Newton, su función de velocidad $v = v(t)$ satisface la ecuación

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = mg - kv,$$

donde g es la aceleración proporcionada por la fuerza de gravedad. Suponiendo que el objeto cae desde el reposo, es decir con velocidad inicial cero, encuentre la velocidad $v(t)$ para $t > 0$ y encuentre el límite de $v(t)$ cuando $t \to \infty$.

(b) Repita el ejercicio 11.4.22 suponiendo ahora que la resistencia del aire es proporcional al cuadrado de la velocidad.