

Capítulo 10

Aplicaciones de la integral definida

En este capítulo presentamos algunas de las aplicaciones elementales del cálculo integral a la geometría, la física y la ingeniería. En estos ejemplos se ilustra cómo los métodos del cálculo integral dan sentido preciso a las técnicas de agotamiento para el cálculo de sumas o resultantes de efectos infinitesimales.

10.1 Cálculo de áreas, volúmenes y longitudes

10.1.1 Áreas de regiones delimitadas por curvas suaves

Para $f_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $f_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, dos funciones continuas tales que

$$f_1(x) \leq f_2(x) \text{ para } x \in [a, b],$$

consideremos el problema del cálculo del área de la región \mathcal{A} del plano delimitada por las gráficas de f_1 y f_2 y definida mediante el conjunto

$$\mathcal{A} = \{(x, y) \text{ tales que } a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\},$$

el cual se muestra en la figura 10.1.

Este problema es equivalente al cálculo del área de la región delimitada por la gráfica de la función no negativa g dada por

$$g(x) = f_2(x) - f_1(x), \quad x \in [a, b],$$

y el intervalo $[a, b]$ del eje de las abscisas. Con base en las propiedades de la integral definida, vemos que el área de la región \mathcal{A} se calcula con la fórmula

$$\text{Área de } \mathcal{A} = \int_a^b g(x) dx = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx.$$

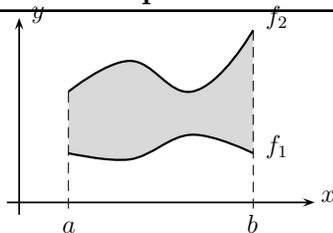


Figura 10.1: Área delimitada por las gráficas de las funciones f_1 y f_2 y las rectas $x = a$ y $x = b$

Ejemplo 10.1. Calculemos el área de la región \mathcal{A} del plano delimitada por la curva $y = 3 - x^2$ y la recta $y = -x + 1$.

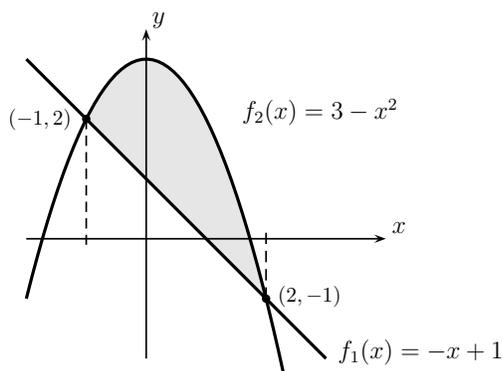


Figura 10.2: La región \mathcal{A} del ejemplo 10.1

La región \mathcal{A} , como se muestra en la figura 10.2, está delimitada por las funciones $f_1(x) = -x + 1$ y $f_2(x) = 3 - x^2$ sobre el intervalo $[-1, 2]$, y por tanto, su área es

$$\text{Área de } \mathcal{A} = \int_{-1}^2 (-x^2 + x + 2) dx = \frac{9}{2}. \triangleleft$$

NOTA IMPORTANTE. Para calcular el área de regiones más generales se puede utilizar el procedimiento anterior descomponiendo la región original en partes delimitadas por gráficas de dos curvas y rectas paralelas al eje de las ordenadas, calculando cada una como en el caso anterior, y sumando después las áreas de esas regiones.

A veces conviene interpretar las fronteras de la región cuya área se desea calcular, mediante gráficas de funciones de la variable y e integrar sobre intervalos en el eje de las ordenadas.

Ejemplo 10.2. El área de la región \mathcal{B} delimitada por el eje de las ordenadas y las curvas $y = \operatorname{sen} x$ y $y = \cos x$,

$$\mathcal{B} = \left\{ (x, y) \text{ con } x \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right], \quad \operatorname{sen} x \leq y \leq \cos x \right\}$$

(ver figura 10.3), se puede expresar como la suma del área de la región bajo la gráfica de la función $h_1(y) = \operatorname{arcsen} y$ sobre el intervalo $\left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right]$ del eje de las ordenadas y el área de la región bajo la gráfica de la función $h_1(y) = \operatorname{arccos} y$ sobre el intervalo $\left[\frac{\sqrt{2}}{2}, 1 \right]$ del eje de las ordenadas.

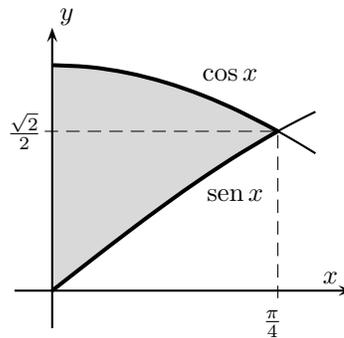


Figura 10.3: La región \mathcal{B} del ejemplo 10.2

Utilizando esta descomposición, se obtiene

$$\text{Área de } \mathcal{B} = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \operatorname{arcsen} y \, dy + \int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 \operatorname{arccos} y \, dy = \sqrt{2} - 1.$$

Por otro lado, esa misma región \mathcal{B} se puede ver como delimitada por las gráficas de las funciones $f_1(x) = \cos x$ y $f_2(x) = \operatorname{sen} x$ sobre el intervalo $\left[0, \frac{\pi}{4} \right]$ y para su área se tiene

$$\text{Área de } \mathcal{B} = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos x - \operatorname{sen} x) \, dx = (\operatorname{sen} x + \cos x) \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} - 1. \triangleleft$$

10.1.2 Volúmenes de sólidos de revolución

En este apartado mostraremos cómo se usa la integral definida para el cálculo del volumen de sólidos de revolución en dos casos importantes.

Primer caso: sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y consideremos el sólido de revolución S que se genera al girar alrededor del eje de las abscisas la región delimitada por la gráfica de f sobre el intervalo $[a, b]$. (Vea la figura 10.4.)

Específicamente, el sólido de revolución S es el conjunto

$$S = \{(x, y, z) \text{ tales que } y^2 + z^2 \leq (f(x))^2 \text{ con } a \leq x \leq b\}.$$

Para calcular el volumen del sólido S observamos que cada uno de los subin-

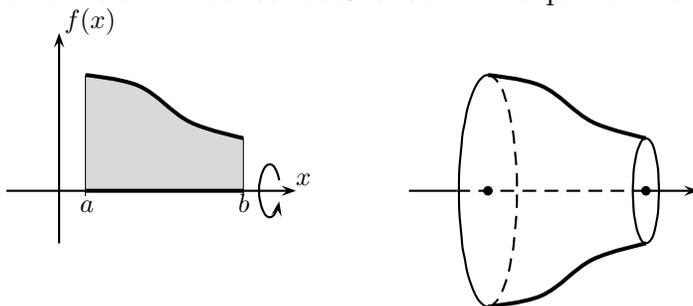


Figura 10.4: Sólido de revolución

tervalos definidos por una partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ de $[a, b]$ genera, al girar alrededor del eje de las abscisas, un cilindro de altura Δx_i y radio $|f(x_i^*)|$. (Vea la figura 10.5.)

El volumen de la unión de tales cilindros,

$$V(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\}) = \pi \sum_{i=1}^k f^2(x_i^*) \Delta x_i, \quad (10.1)$$

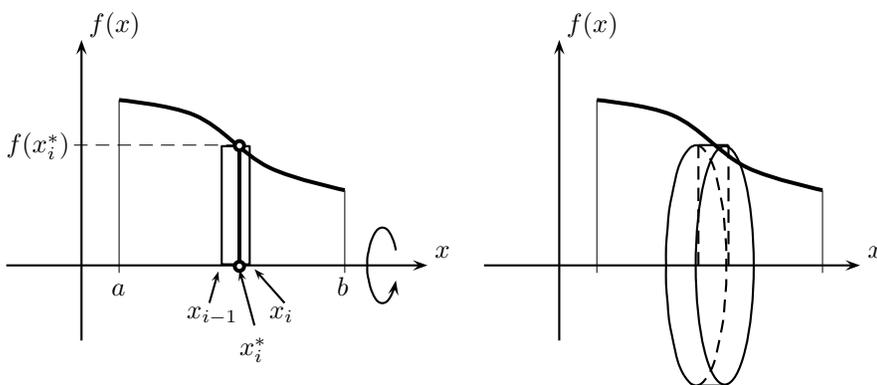


Figura 10.5: Cálculo del volumen de un sólido de revolución

aproxima al volumen de S y corresponde a la suma de Riemann de la función $\pi f^2(x)$ asociada a la partición \mathcal{P} . En el límite, cuando $k \rightarrow \infty$, las sumas (10.1)

convergen al número $\int_a^b \pi f^2(x) dx$, que es el volumen del sólido de revolución S . Es decir,

$$V = \text{Volumen de } S = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (10.2)$$

Ejemplo 10.3. El volumen del elipsoide de revolución

$$E = \left\{ (x, y, z) \text{ tales que } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

es generado al girar la gráfica de la función

$$f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

y el cálculo del volumen nos arroja la expresión

$$V = \pi b^2 \int_{-a}^a \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi b^2 a.^1 \triangleleft$$

Segundo caso: Para sólidos de revolución generados por la rotación de la gráfica de una función continua $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a \geq 0$, alrededor del eje de las ordenadas, como se muestra en la figura 10.6, el cálculo de su volumen puede realizarse de manera análoga.

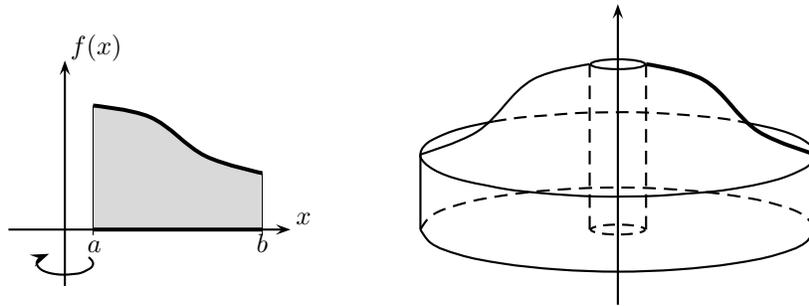


Figura 10.6: Sólido de revolución

De manera específica, cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ de una partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ de $[a, b]$ genera, al girar alrededor del eje de las ordenadas, un anillo cilíndrico de espesor Δx_i y altura $|f(x_i^*)|$, donde $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, como se muestra en la figura 10.7.

¹Nótese que si $a = b$, E es una esfera y V su volumen.

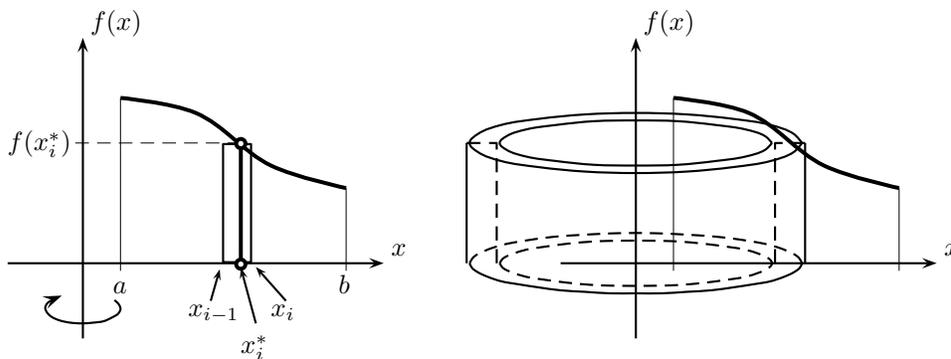


Figura 10.7: Cálculo del volumen de un sólido de revolución

La suma de los volúmenes de estos anillos cilíndricos es

$$V(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\}) = \pi \sum_{i=1}^k |f(x_i^*)|(x_{i+1}^2 - x_i^2) = \pi \sum_{i=1}^k (x_{i+1} + x_i)|f(x_i^*)|\Delta x_i. \quad (10.3)$$

En el límite, cuando $k \rightarrow \infty$, la suma (10.3) converge al número

$$V = \text{Volumen de } S = 2\pi \int_a^b x|f(x)| dx, \quad (10.4)$$

que es el volumen exacto del sólido de revolución S .

Ejemplo 10.4. Consideremos el sólido que se genera al rotar alrededor del eje de las ordenadas la gráfica de la curva $f(x) = 2x^2 - x^3$ con $x \in [0, 2]$. Aplicando la fórmula (10.4) obtenemos

$$V = 2\pi \int_0^2 x|f(x)| dx = 2\pi \int_0^2 (2x^3 - x^4) dx = \frac{16}{5}\pi. \triangleleft$$

10.1.3 Longitudes de curvas

El cálculo de longitudes de curvas en el plano cartesiano es otra aplicación importante de la integral definida. Si consideramos la curva Γ dada por la ecuación

$$y = f(x) \text{ para } x \in [a, b],$$

donde f es una función con derivada continua, podemos calcular la longitud de Γ aproximándola por curvas poligonales, es decir, formadas por segmentos de recta, cuya longitud es directamente calculable mediante la fórmula de la distancia entre dos puntos del plano cartesiano. Esto puede realizarse tomando una partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ de $[a, b]$ y construyendo la

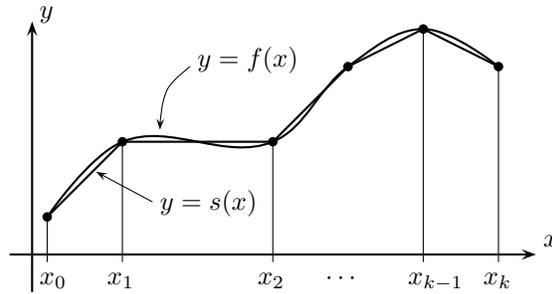


Figura 10.8: Aproximación de la longitud de arco

curva poligonal s que pasa por los puntos $(x_i, f(x_i))$ para $i = 1, 2, 3, \dots, k$, de la gráfica de Γ , como se muestra en la figura 10.8.

La longitud del segmento s_i determinado por los puntos $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$ y $(x_i, f(x_i))$, es igual a

$$\text{longitud de } s_i = \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \quad (10.5)$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función f en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, podemos escribir

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{df}{dx}(x_i^*) \Delta x_i, \quad (10.6)$$

donde $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$. Sustituyendo (10.6) en (10.5) y sumando se obtiene

$$\text{longitud de } s = \sum_{i=1}^k s_i = \sum_{i=1}^k \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x_i^*)\right)^2} \Delta x_i,$$

que es la suma de Riemann de la función $\sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2}$ correspondiente a la partición \mathcal{P} y a la elección de puntos intermedios $\{x_i^*\}$. Tomando el límite de esas sumas cuando $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$, obtenemos

$$\text{longitud de } \Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2} dx. \quad (10.7)$$

Ejemplo 10.5. La longitud de la curva plana Γ , cuya ecuación es $y = x^3$, $x \in [a, b]$, es

$$\text{longitud de } \Gamma = \int_a^b \sqrt{1 + 9x^4} dx. \triangleleft$$

NOTA IMPORTANTE. Frecuentemente, y aún en aplicaciones del cálculo a problemas sencillos, la integración de funciones elementales es un problema difícil. Más aún, se ha demostrado que muchas funciones elementales no poseen antiderivadas que se puedan expresar en términos de un conjunto finito de funciones elementales. Por ejemplo, al calcular la longitud de la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

se obtiene, aplicando la fórmula (10.7) a $f(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, que

$$\begin{aligned} \text{longitud de la elipse} &= 4 \int_0^a \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2} \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx \\ &= 4a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \sen^2 \theta} d\theta. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Sin embargo, la antiderivada de la función $g(\theta) = \sqrt{1 + \left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) \sen^2 \theta}$ no es expresable en términos de un conjunto finito de funciones elementales. A las integrales de la forma (10.8) se les llama integrales elípticas. Para calcularlas se deben usar otros métodos (numéricos, por ejemplo).

10.2 Área de superficies de revolución

Antes de abordar el problema del cálculo del área de una superficie de revolución, recordemos que el área lateral de un cono circular recto de radio r y altura h se puede calcular aproximándola por una suma de áreas de triángulos de base $r\Delta\theta$ y altura $\sqrt{h^2 + r^2}$, como en la figura 10.9, de tal manera que

$$\text{Área del cono} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \sqrt{h^2 + r^2} r d\theta = \pi r \sqrt{h^2 + r^2}. \quad (10.9)$$

A partir de la fórmula (10.9), deducimos que el área lateral de un cono recto truncado de base mayor de radio R y base menor de radio r y altura h , como el que se muestra en la figura 10.10, es

$$\text{Área del cono truncado recto} = \pi(R + r) \sqrt{h^2 + (R - r)^2}. \quad (10.10)$$

Con la fórmula (10.10) podemos calcular el área externa de un sólido aproximando su área lateral por una suma de áreas laterales de conos truncados

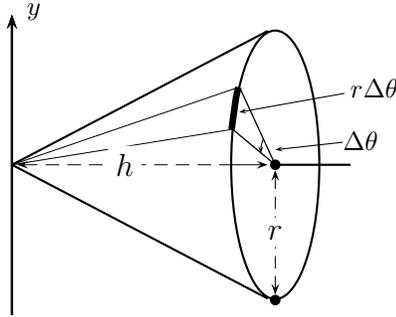


Figura 10.9: Un cono circular recto

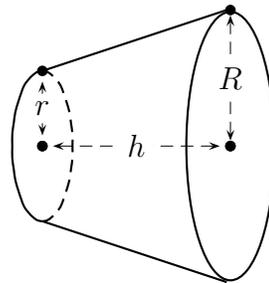


Figura 10.10: Un cono truncado recto

cuyas paredes aproximan la superficie exterior del sólido. Más explícitamente, consideremos la superficie de revolución generada al girar alrededor del eje de las abscisas la gráfica de la función no negativa f sobre el intervalo $[a, b]$, como se muestra en la figura 10.11.

Para cada partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ de $[a, b]$ consideremos la curva poligonal s que une los puntos $(x_i, f(x_i))$, con $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Al rotar la curva s , cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ genera un cono circular truncado cuyas bases tienen por radios $R = f(x_i)$ y $r = f(x_{i-1})$ y altura $h = x_i - x_{i-1}$, como se ve en la figura 10.11.

Aplicando la fórmula (10.10) podemos calcular el área de los conos truncados generados por la partición \mathcal{P} :

$$\begin{aligned} &\text{Suma} \\ \text{de áreas laterales de conos} &= \pi \sum_{i=1}^k (f(x_i) + f(x_{i-1})) \sqrt{\Delta x_i^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}. \end{aligned} \tag{10.11}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función f en cada subintervalo

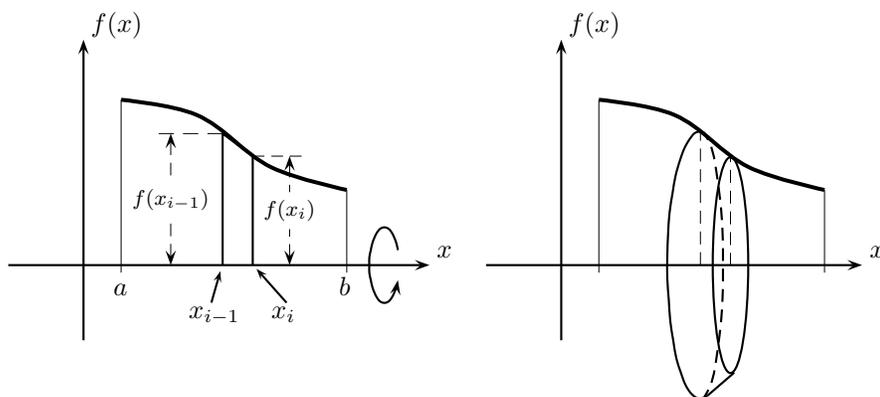


Figura 10.11: Cálculo del área de una superficie de revolución

$[x_{i-1}, x_i]$, podemos escribir

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = \frac{df}{dx}(x_i^*) \Delta x_i \quad (10.12)$$

para algún $x_i^* \in (x_{i-1}, x_i)$. Sustituyendo (10.12) en (10.11), tendremos,

suma
de áreas laterales = $\pi \sum_{i=1}^k (f(x_i) + f(x_{i-1})) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x_i^*)\right)^2} \Delta x_i$,
de conos

la cual es una suma de Riemann de la función

$$\ell(x) = 2\pi f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2},$$

correspondiente a la partición \mathcal{P} y a la elección de puntos intermedios x_i^* , $i = 1, 2, 3, \dots, k$. Al tomar particiones de $[a, b]$ con norma tendiente a cero, la suma de áreas laterales de los conos truncados converge a la integral de la función $\ell(x)$; es decir,

área de la
superficie de revolución = $2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}(x)\right)^2} dx$. (10.13)

Ejemplo 10.6. El área de la esfera corresponde al área de la superficie de revolución generada al rotar la gráfica de la función

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}, \quad x \in [-r, r]$$

alrededor del eje de las abscisas. Aplicando la fórmula (10.13) se tiene:

$$\begin{aligned} \text{área de la esfera} &= 2\pi \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx \\ \text{de radio } r &= 2\pi \int_{-r}^r r dx = 4\pi r^2. \triangleleft \end{aligned}$$

10.3 Centros de masa y presión de fluidos

En este apartado presentaremos algunas aplicaciones de la integral al cálculo de centros de masa (o centroides) de varillas y regiones planas.

10.3.1 Centroides de varillas y regiones planas

Consideremos una varilla de longitud L de densidad variable, de tal manera que la masa del material que forma la varilla por unidad de longitud es una función $\rho(x)$, donde $x \in [0, L]$. Si colocamos la varilla sobre un pivote ubicado en el punto x_M , como se muestra en la figura 10.12, y consideramos la acción de la fuerza de gravedad sobre cada uno de sus puntos, la varilla tenderá a rotar en la dirección de las manecillas del reloj por efecto de la fuerza de palanca generada por el peso de los puntos a la derecha del pivote y en sentido contrario por la fuerza de palanca de los puntos a la izquierda de x_M .

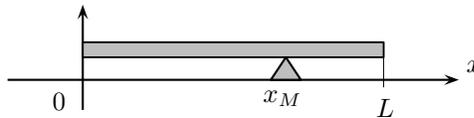


Figura 10.12: Centroide de una varilla

La fuerza de palanca o “torca” ejercida por cada masa puntual de la varilla es igual al producto de la distancia de ese punto al pivote, multiplicado por el peso del material concentrado en ese punto. La resultante de la suma de las torcas ejercidas por los puntos a la derecha e izquierda del pivote, tiene un efecto final sobre la varilla, haciéndola girar en el sentido correspondiente al signo de la torca resultante. Se define el *centro de masa de la varilla* (o *centroide*) como aquel punto-pivote x_M con respecto al cual la torca resultante ejercida por todos los puntos de la varilla es cero.

Para el cálculo de la torca resultante respecto a un punto-pivote x_M , se recurre al método de agotamiento, considerando a la varilla como formada por un conjunto finito de segmentos dispuestos a lo largo de la varilla y donde

cada uno de ellos tiene densidad constante e igual al valor de la función ρ en el punto x del segmento, elegido arbitrariamente. Bajo esa aproximación, la suma de las torcas ejercidas por esos segmentos tenderá, cuando la longitud de los segmentos es cada vez más pequeña, a la torca de la varilla alrededor del punto-pivote x_M . Para realizar esta construcción, tomamos una partición $\mathcal{P} = \{0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_k = L\}$ de $[0, L]$ y consideramos la suma

$$T(\rho, \mathcal{P}, \{x_i^*\}) = \sum_{i=1}^k \rho(x_i^*)(x_i^* - x_M)\Delta x_i, \quad (10.14)$$

donde x_i^* es un punto arbitrario de $[x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, 3, \dots, k$. La expresión (10.14) es la suma de Riemann para la función $\rho(x)(x - x_M)$ correspondiente a la partición \mathcal{P} y la elección de puntos $\{x_i^*\}$, y por tanto, para cada elección del punto pivote x_M , el valor de la integral $\int_0^L \rho(x)(x - x_M) dx$ corresponde a la torca ejercida por la varilla alrededor de ese punto. Luego, el centro de masa buscado corresponderá al punto x_M tal que

$$\int_0^L \rho(x)(x - x_M) dx = 0,$$

o explícitamente,

$$x_M = \frac{\int_0^L \rho(x)x dx}{\int_0^L \rho(x) dx}. \quad (10.15)$$

Ejemplo 10.7. La determinación del centro de masa de una varilla de longitud L y función de densidad lineal $\rho(x) = ax + b$ con $a, b > 0$ y $x \in [0, L]$, se obtiene directamente de la fórmula (10.15) y se sitúa a una distancia x_M del extremo izquierdo dada por

$$x_M = \frac{\int_0^L (ax + b)x dx}{\int_0^L (ax + b) dx} = \frac{\frac{1}{3}aL^2 + \frac{1}{2}bL}{\frac{1}{2}aL + b}.$$

Se deduce inmediatamente que el centro de masa de una varilla de densidad constante (es decir, con $a = 0$) se localiza en el punto medio de la varilla. \triangleleft

Enseguida, veamos cómo obtener el centro de masa, o *centroide*, de una superficie S delimitada por curvas suaves y hecha de un material de densidad constante. Aquí también el centroide se caracteriza por ser aquel punto en el plano donde la resultante de las torcas medidas con respecto a ese punto como pivote tienen resultante cero, de tal manera de que si se sostiene la superficie con un pivote en ese punto, ésta permanecerá en equilibrio.

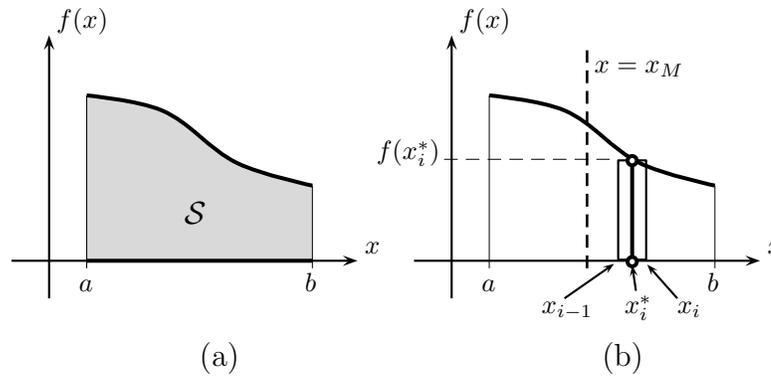


Figura 10.13: Cálculo del centroide de una región delimitada por una curva

Supongamos que S está dada por la región bajo la gráfica de una función f sobre un intervalo $[a, b]$, como se muestra en la figura 10.13(a).

Para determinar las coordenadas del centroide, primero buscaremos la recta vertical de la forma $x = x_M$, con respecto a la cual la torca ejercida por los puntos de la superficie, tanto a la derecha como a la izquierda de dicha recta, es cero. Esto significa que la superficie se mantendrá en equilibrio y no rotará alrededor del eje definido por la recta perpendicular al eje de las abscisas con ecuación $x = x_M$. Para calcular la torca total alrededor de la recta pivote, tomamos particiones $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$ de $[a, b]$ y consideramos la torca ejercida por cada uno de los rectángulos de base $[x_{i-1}, x_i]$ y altura $|f(x_i^*)|$, con x_i^* elegido arbitrariamente en el subintervalo, obteniendo así las sumas de la forma

$$T(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\}) = \sum_{i=1}^k \rho |f(x_i^*)| (x_i^* - x_M) \Delta x_i,$$

que corresponden a las sumas de Riemann para la función

$$h(x) = \rho |f(x)| (x - x_M).$$

Tomando el límite de tales sumas cuando las particiones tienen norma tendiente a cero, obtenemos que la posición de la recta $x = x_M$ con respecto a la cual la torca total es cero, debe satisfacer la relación

$$\int_a^b \rho |f(x)| (x - x_M) dx = 0;$$

es decir,

$$x_M = \frac{\int_a^b \rho |f(x)| x dx}{\int_a^b \rho |f(x)| dx} = \frac{\int_a^b |f(x)| x dx}{\int_a^b |f(x)| dx}.$$

Para el cálculo de la ordenada y_M del centroide consideremos, para la partición $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_k = b\}$, las franjas verticales bajo la gráfica de f sobre cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$. La longitud de cada franja es, aproximadamente, $f(x_i^*)$, con $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ y tienen su centroide en el punto $(x_i^*, f(x_i^*)/2)$. Consideremos ahora el conjunto S de puntos $(x_i^*, f(x_i^*)/2)$ para $i = 1, 2, \dots, k$ con una masa concentrada en cada uno de ellos igual a $\rho|f(x_i^*)|\Delta x_i$. Calculemos ahora la torca que hace el conjunto S con respecto a una recta horizontal $y = y_M$, la cual toma la forma

$$\sum_{i=1}^k \rho \left(\frac{1}{2} f(x_i^*) - y_M \right) |f(x_i^*)| \Delta x_i.$$

Tomando particiones cada vez más finas, tenemos que la torca total del conjunto bajo la gráfica de f es

$$\int_a^b \rho \left(\frac{1}{2} f(x) - y_M \right) |f(x)| dx,$$

misma que se anulará si

$$y_M = \frac{\int_a^b \rho f(x) |f(x)| dx}{2 \int_a^b \rho |f(x)| dx} = \frac{\int_a^b f(x) |f(x)| dx}{2 \int_a^b |f(x)| dx}. \quad (10.16)$$

Finalmente, tomando en cuenta que la masa total M de la superficie está dada por $M = \int_a^b \rho |f(x)| dx$, concluimos que las coordenadas de su centroide son

$$x_M = \frac{1}{M} \int_a^b \rho x |f(x)| dx, \quad y_M = \frac{1}{2M} \int_a^b \rho f(x) |f(x)| dx. \quad (10.17)$$

Ejemplo 10.8. Calcule las coordenadas del centro de masa de la región delimitada por las gráficas de dos funciones $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Solución. Un argumento análogo al anterior para el cálculo de la abcisa x_M del centro de masa nos remite a la fórmula

$$x_M = \frac{\int_a^b x |f(x) - g(x)| dx}{\int_a^b |f(x) - g(x)| dx},$$

mientras que para la ordenada y_M se tiene

$$y_M = \frac{\int_a^b x |f(x) + g(x)| |f(x) - g(x)| dx}{2 \int_a^b |f(x) - g(x)| dx}. \triangleleft$$

Ejemplo 10.9. (*Teorema de Pappus*²) En el caso de un sólido de revolución generado al girar la gráfica de una función no negativa $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ alrededor del eje de las abscisas, sabemos que su volumen está dado por la fórmula

$$V = \pi \int_a^b f^2(x) dx. \quad (10.18)$$

Por otro lado, sustituyendo (10.18) en la fórmula (10.16) para la ordenada y_M del centroide de la región delimitada por la gráfica de f y el eje de las abscisas se obtiene la relación

$$2\pi y_M \int_a^b f(x) dx = \pi \int_a^b f^2(x) dx,$$

la cual verifica el llamado *teorema de Pappus*, que establece que el volumen de un sólido de revolución generado al rotar una región plana R alrededor de una recta a la cual no intersecta, es igual al área de la región R que lo genera, multiplicado por la distancia que recorre el centroide de R al efectuar la rotación. \triangleleft

10.3.2 Presión de líquidos sobre superficies

Como consecuencia de su peso y de su naturaleza deformable, los líquidos se “recargan” sobre las superficies con las que están en contacto y ejercen una determinada presión. En cada punto de una superficie y sobre cada sección de ella suficientemente pequeña que contiene a ese punto, la presión (o fuerza ejercida por unidad de área) que ejerce el líquido es la misma en cualquier dirección y su magnitud es igual al peso de la columna de líquido sobre esa unidad de área. A una profundidad de h unidades, la presión ejercida por el líquido es

$$p(h) = \rho gh,$$

donde g es la aceleración producida por la fuerza de gravedad y ρ es la densidad del líquido. A la ley anterior se le conoce como *principio de Pascal*³.

Veamos ahora cómo se aplica la integral definida para el cálculo de la presión ejercida por un líquido sobre superficies de distinta geometría.

Ejemplo 10.10. Consideremos un cilindro de radio r que descansa en el fondo de un estanque de h metros de profundidad con $2r < h$, como se muestra en la figura 10.14(a). Nos interesa calcular la presión que ejerce el agua sobre cada una de sus tapaderas.

Para calcular la presión, situaremos un par de ejes de coordenadas de tal manera que la tapa en cuestión esté dada por el conjunto

²Pappus (290-350, aprox.), quien vivió en Alejandría.

³Por Blas Pascal (1623-1662), matemático francés, su descubridor.

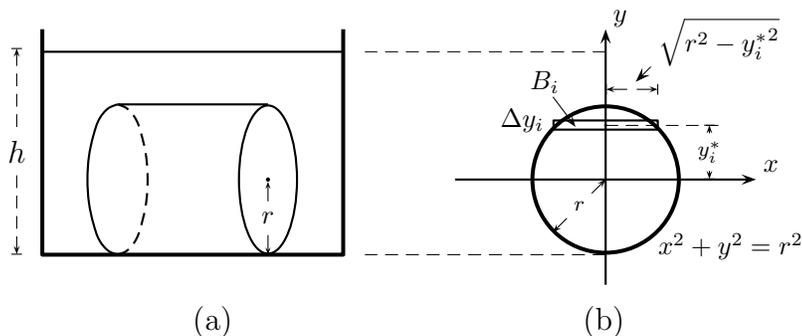


Figura 10.14: Presión sobre la tapa de un tanque

$$\{(x, y) \text{ con } x^2 + y^2 \leq r^2\},$$

como se indica en la figura 10.14(b). Tomemos una partición de la forma $\mathcal{P} = \{-r = y_0 < y_1 < \dots < y_k = r\}$ en el intervalo $[-r, r]$ sobre el eje de las ordenadas. Cada subintervalo de la partición $[y_{i-1}, y_i]$ da lugar a una banda horizontal B_i cuya área es, aproximadamente, $2\sqrt{r^2 - y_i^{*2}}\Delta y_i$, donde $y_i^* \in [y_{i-1}, y_i]$. Por el principio de Pascal, sobre la banda B_i el agua, cuya densidad es $\rho = 1$, ejerce una presión constante con valor aproximado

$$2g\sqrt{r^2 - y_i^{*2}}(h - r - y_i^*)\Delta y_i.$$

Sumando las presiones ejercidas sobre cada una de las bandas B_i para $i = 1, 2, 3, \dots, k$, se tiene

$$2g \sum_{i=1}^k \sqrt{r^2 - y_i^{*2}}(h - r - y_i^*)\Delta y_i. \quad (10.19)$$

Cuando $|\mathcal{P}| \rightarrow 0$ las sumas de Riemann (10.19) tienden a

$$P = 2g \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2}(h - r - y) dy, \quad (10.20)$$

que es el valor exacto de la presión del agua sobre cada tapa del tanque. ◁

Ejemplo 10.11. Consideremos el problema de calcular la presión que un líquido ejerce sobre las paredes del recipiente que lo contiene. Supongamos que el recipiente está lleno de agua ($\rho = 1$) y que tiene la forma de una superficie de revolución generada al rotar la gráfica de la función no negativa f , definida en $[c, d]$, alrededor del eje de las ordenadas, como se muestra en la figura 10.15.

Aproximemos la pared del recipiente con elementos de superficie, como en el caso del cálculo del área de una superficie de revolución. Aplicando el

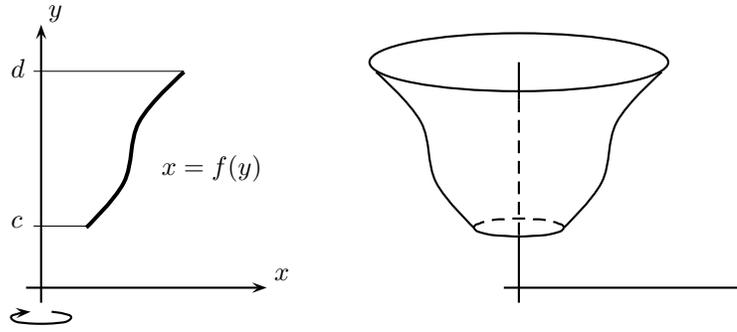


Figura 10.15: Presión sobre las paredes de un recipiente

principio de Pascal se obtiene que la presión total es

$$P = 2\pi g \int_c^d (d - y)f(y) \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dy}(y)\right)^2} dy. \quad (10.21)$$

En caso de que el agua sólo alcance una altura $k < d$, la integral en (10.21) se calcula únicamente en el intervalo $[c, k]$.

Como aplicaciones directas de (10.21), presentamos los casos siguientes.

1. Si $f(y) = r$ entonces el recipiente es un cilindro de altura $h = d - c$ y la presión sobre las paredes del cilindro es

$$P = 2\pi g r \int_c^d (d - y) dy = \pi g r h.$$

2. Si el recipiente es un cono recto de radio r y altura h con vértice en el suelo, entonces la función que lo genera por rotación es $f(y) = \frac{r}{h}y$ y la presión total sobre las paredes es

$$P = 2\pi g \int_0^h (h - y) \frac{r}{h^2} y \sqrt{r^2 + h^2} dy = \frac{1}{3} \pi g r h \sqrt{r^2 + h^2}.$$

3. Si el recipiente es esférico de radio r , entonces $f(y) = \sqrt{r^2 - y^2}$ y la presión sobre las paredes es

$$P = 2\pi g \int_{-r}^r (r - y)r dy = 4\pi g r^3. \triangleleft$$

Ejercicios y problemas del capítulo

Cálculo de áreas y volúmenes

- 10.3.1.** Calcule el área de la región delimitada por la curva $y^2 = x^2 - x^4$.
- 10.3.2.** Encuentre el área de la región A del primer cuadrante $x \geq 0$, $y \geq 0$, delimitada por la gráfica de la función $f(x) = \arccos x$ por arriba y por la gráfica de la función $g(x) = \arcsen x$ por abajo.
- 10.3.3.** Determine el valor positivo de a para que la parábola $y = x^2 + 1$ biseque el área del rectángulo de vértices $(0, 0)$, $(a, 0)$, $(0, a^2 + 1)$ y $(a, a^2 + 1)$.
- 10.3.4.** Calcule el área de la región delimitada por la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- 10.3.5.** Calcule el área de la región comprendida entre las parábolas $-x^2 + 2 = y$ y $y = 2x^2 - 3$.
- 10.3.6.** Encuentre el área de la región en el plano xy formada de los puntos (x, y) tales que $x^6 - x^2 + y^2 \leq 0$.
- 10.3.7.** Demuestre que la longitud L de la circunferencia de radio r es igual a $2\pi r$.
- 10.3.8.** Calcule el área del elipsoide de revolución de eje mayor a y eje menor b .
- 10.3.9.** Calcule el volumen del tetraedro cuyos vértices son $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.
- 10.3.10.** Calcule el volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar sobre el eje de las ordenadas la gráfica de la función $f(x) = x^2$ sobre el intervalo $[0, 1]$.
- 10.3.11.** El triángulo de vértices $(1003, 0)$, $(1004, 3)$ y $(1005, 1)$ en el plano x, y se hace girar alrededor del eje de las ordenadas. Encuentre el volumen del sólido generado.
- 10.3.12.** Calcule el área A de la superficie de revolución generada al girar el círculo $x^2 + y^2 = r^2$ alrededor de la recta $y = r$.
- 10.3.13.** Aplicando la definición de la integral definida, determine el área A de la figura acotada por $y = |x - 1|$ y $y = 3 - |x|$.
- 10.3.14.** El volumen del agua de un tazón se evapora a una razón que es proporcional al área de la superficie del agua expuesta al sol. Muestre que la profundidad del agua disminuye a una velocidad constante sin importar la forma del tazón.
- 10.3.15.** Sea la curva $y = f(x)$, donde $f(x) \geq 0$ para $x \geq 0$, y considere el sólido de revolución generado al girarla alrededor del eje de las abscisas. Si para toda $b \geq 0$ el volumen generado por la parte de la curva que va de $x = 0$ a $x = b$ es igual a b^2 , halle la función f .

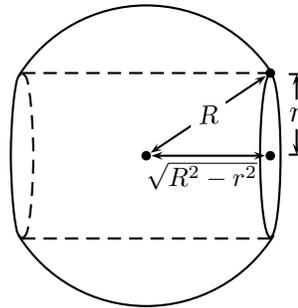


Figura 10.16:

10.3.16. (a) Se perfora un agujero de radio r a través de una esfera de radio $R > r$ (vea la figura 10.16). Calcule el volumen de la parte restante de la esfera.

(b) ¿Qué radio debe tener el agujero para remover la mitad de la esfera?

10.3.17. *Discuta acerca de la posibilidad de calcular directamente el área de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ o de la astroide $x^{2/3} + y^{2/3} = \rho^{2/3}$.

10.3.18. *Una esfera de radio R se intersecta con una esfera de radio $r < R$ y centro sobre la superficie de la primera esfera. Calcule el volumen del sólido que determina la intersección de las dos esferas. En la figura 10.17 se muestra de manera esquemática la intersección de las esferas en cuestión con el plano xy .

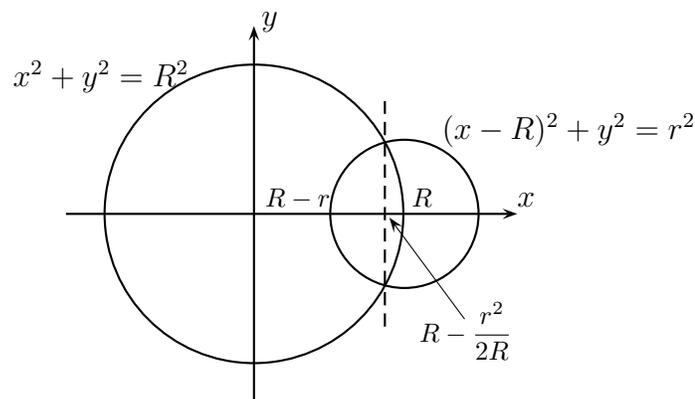


Figura 10.17:

10.3.19. (a) *Encuentre la fórmula, expresada en términos de una integral, para el cálculo del volumen removido al perforar un cilindro de radio R con un agujero de radio $r < R$, realizado en dirección perpendicular al eje del cilindro.

- (b) *Utilizando la fórmula del inciso (a), calcule el volumen removido cuando $r = R$.

10.3.20. (a) *Se tiene un tanque horizontal de forma cilíndrica, de longitud l y sección transversal circular de radio r ; el tanque contiene gasolina hasta una altura h , medida desde suelo. Encuentre la fórmula para el volumen V de gasolina que contiene como función $V(h)$ de la altura h .

- (b) *Calcule el volumen $V(h)$ como función de la altura en el caso de que la sección transversal sea una elipse de semieje mayor a y semieje menor b .

10.3.21. *Supongamos que el tanque del problema 10.3.20 no es horizontal, sino que se encuentra inclinado de modo que su eje central forma un ángulo θ con el nivel del suelo. Encuentre una fórmula para el volumen V como función de la altura h del nivel de gasolina.

Cálculo de centroides y centros de masa

10.3.22. Sea S la región delimitada por las curvas $y = x^m$ y $y = x^n$ para $x \in [0, 1]$, donde m, n son enteros con $0 \leq n < m$.

- (a) Dibuje la región S .
- (b) Calcule las coordenadas del centroide de S .
- (c) Determine para qué valores de n y m el centroide no está contenido en S .

10.3.23. En cada caso, encuentre la masa y el centro de masa:

- (a) Una región A del plano con densidad $\rho(x)$ (es decir, constante a lo largo de puntos con la misma ordenada), formada por los puntos (x, y) tales que

$$A = \{(x, y) \text{ con } a \leq x \leq b \text{ y } f(x) \leq y \leq g(x)\},$$

donde f y g son funciones continuas definidas en $[a, b]$.

- (b) Una región semicircular A dada por

$$A = \{(x, y) \text{ con } x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ y } 0 \leq y\},$$

donde la densidad $\rho(s) = ks$ es función de la distancia s del punto al origen (es decir, es lineal radialmente).

- (c) Un cono circular recto de radio r y altura h . La densidad del material en cada punto es proporcional a la altura z en que se encuentra, medida desde la base del cono; es decir, $\rho(z) = kz$.

10.3.24. Calcule el centroide de los conjuntos siguientes.

- (a) El sector circular

$$S = \{(x, y) \text{ con } x^2 + y^2 \leq a^2 \text{ y } 0 \leq y \leq x\}.$$

- (b) El cuadrilátero con vértices $(0, 0)$, $(3, 1)$, $(4, 0)$ y $(2, -2)$.

- (c) La región en el primer cuadrante delimitada por el arco de un cuarto de circunferencia

$$x^2 + y^2 = r^2 \text{ con } 0 \leq x \leq r, \quad y \geq 0.$$

- (d) El cono sólido circular recto de radio r y altura h .

Cálculo de la presión hidrostática

10.3.25. Una alberca de 20 metros de largo y 8 metros de ancho tiene su fondo inclinado de tal manera que la profundidad de la alberca en un extremo es de 1 metro y en el extremo opuesto es de 3 metros. Encuentre la fuerza total del agua sobre el fondo cuando la alberca está llena.

10.3.26. La superficie de una cortina de una presa está inclinada y forma un ángulo de 30 grados con la horizontal; tiene la forma de un trapecioide isósceles de 50 metros en el coronamiento y 25 metros de ancho en el fondo, con una altura inclinada de 35 metros medidos sobre la pared. Calcule la presión del líquido sobre la cortina cuando la presa está llena.

10.3.27. Cada uno de los extremos de un depósito horizontal de aceite es una elipse cuyo eje mayor tiene 12 metros y 6 metros su eje vertical. Calcule la presión del aceite sobre los extremos cuando se encuentra lleno a la mitad de su capacidad, si el aceite pesa 2 Kg por litro.