Capítulo 9

La integral definida

El otro concepto central del cálculo de funciones reales es el concepto de integral de una función sobre un intervalo. El proceso de integración permite "integrar o sumar" las variaciones infinitesimales de una función a lo largo de un intervalo para obtener la variación neta de la función en ese intervalo. En el caso particular del movimiento de una partícula, hace posible calcular el desplazamiento neto de la partícula en un intervalo de tiempo, a partir de las velocidades instantáneas mostradas durante ese intervalo.

Desde un enfoque geométrico, el valor de la integral de una función en un intervalo es igual al área de la región delimitada por su gráfica y el eje de las abscisas, considerando con signo negativo el área de la región que queda por debajo del eje. La relación entre los dos enfoques anteriores la proporciona el llamado "teorema fundamental del cálculo", al establecer que las operaciones de derivación e integración de funciones son procesos inversos.

Para introducir aquí la noción de integral de una función, se aplica el método de agotamiento para el cálculo del área bajo la gráfica de la función sobre un intervalo. Dicho método aproxima el área de un conjunto irregular mediante sumas de áreas de rectángulos, de tal manera que en el "límite" se alcanza el área exacta del conjunto en cuestión.

Primeramente introduciremos el concepto de integral para las funciones continuas no negativas definidas en un intervalo cerrado y acotado, y luego haremos algunas generalizaciones a funciones continuas por segmentos y a intervalos no acotados; para ello utilizaremos fuertemente las propiedades básicas de las funciones continuas definidas en intervalos cerrados que quedaron establecidas al final del capítulo cuarto.

9.1 La definición de integral definida

Una *partición* $\mathcal{P}$ de un intervalo cerrado $[a, b]$ es un conjunto finito de puntos de $[a, b]$ que contiene a los extremos del intervalo.

Cada partición admite dos orientaciones: una *orientación positiva,* dada por el orden que le impone el orden de los números reales, cuyo elemento inicial es el extremo izquierdo del intervalo $[a, b]$, y que denotamos

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

y otra *orientación negativa,* que es contraria a la impuesta por el orden en los números reales y cuyo elemento inicial es el extremo derecho del intervalo $[a, b]$, y que denotamos

$$b = y_0 > y_1 > \cdots > y_n = a,$$

donde $y_0 = x_n = b, y_1 = x_{n-1}, \ldots, y_n = x_0 = a$.

Una partición que consiste de $n + 1$ puntos divide al intervalo $[a, b]$ en n subintervalos $[x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, \ldots, n$, de longitudes

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}.$$

A la longitud máxima de los subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ se le llama *norma de la partición* $\mathcal{P}$, y se denota por $|\mathcal{P}|$.

Al conjunto de las particiones de $[a, b]$ lo denotaremos $\Omega([a, b])$.

Una partición $\mathcal{Q}$ de $[a, b]$ se dice un *refinamiento* de la partición $\mathcal{P}$ si $\mathcal{P} \subset \mathcal{Q}$.

Definición 9.1. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función real, continua, no negativa; sea $\mathcal{P}$ una partición de $[a, b]$ compuesta por los puntos $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$, y sea x_i^* un punto arbitrario en $[x_{i-1}, x_i]$ para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Al número

$$S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\}) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)(x_i - x_{i-1})$$

se le llama *suma de Riemann correspondiente a la partición* $\mathcal{P}$ *y a la elección de puntos intermedios* $\{x_i^*\}_{i=1}^{k}$.

Como casos particulares y muy importantes de sumas de Riemann se tienen aquellas en las que los puntos intermedios x_i^* se toman de tal manera que $x_i^* = x_i^{\max}$, donde

$$f(x_i^{\max}) = \max\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

o $x_i^* = x_i^{\min}$, donde

$$f(x_i^{\min}) = \min\{f(x),\ x \in [x_{i-1}, x_i]\},$$

es decir, $x_i^{\max}$ ($x_i^{\min}$) es aquel punto en $[x_{i-1}, x_i]$ en el que la función f alcanza su valor máximo (mínimo). A las sumas de Riemann correspondientes a esas elecciones de los puntos en cada subintervalo, se les llama *suma superior de Darboux*[1]*-Riemann* y *suma inferior de Darboux-Riemann correspondientes a la partición* $\mathcal{P}$ y se denotan, respectivamente, por

$$\bar{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i^{\max})(x_i - x_{i-1})$$

y

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) = \sum_{i=1}^{k} f(x_i^{\min})(x_i - x_{i-1}).$$

Ejemplo 9.1. Supongamos que la gráfica de la función $y = f(x)$, el intervalo $[a, b]$ y la partición $\mathcal{P} = \{x_0 = a, x_1, x_2, x_3, x_4 = b\}$ son los que se muestran en la figura 9.1

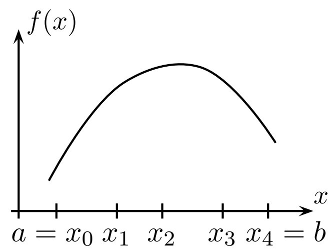


Figura 9.1: Una partición de $[a, b]$

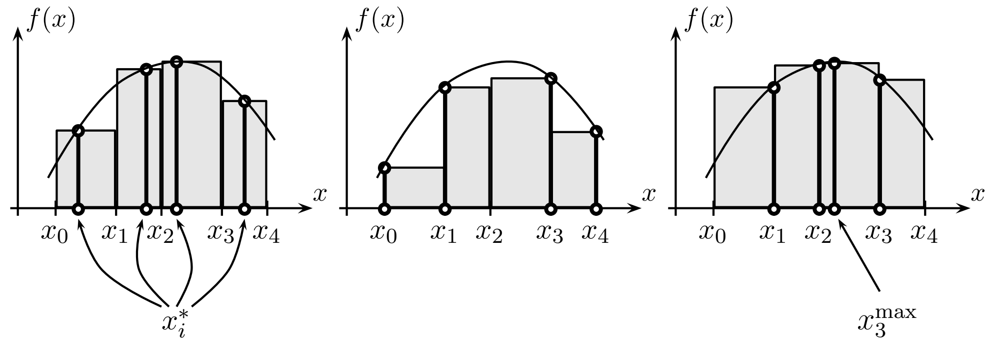
Supongamos que tomamos los puntos intermedios $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, con $i = 1, 2, 3, 4$, como se muestra en la figura 9.2(a). Entonces las sumas de Riemann $S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\})$, $\underline{S}(f, \mathcal{P})$ y $\overline{S}(f, \mathcal{P})$, corresponden a las regiones sombreadas en las figuras 9.2(a), (b) y (c), respectivamente.

Nótese que, en este caso particular, se tiene $x_1^{\min} = x_0, x_2^{\min} = x_1$, $x_3^{\min} = x_3$ y $x_4^{\min} = x_4$, mientras que $x_1^{\max} = x_1$, $x_2^{\max} = x_2$ y $x_4^{\max} = x_3$. Por otra parte, $x_3^{\max}$ está señalado en la figura 9.2(c). ◁

Puesto que para cualquier elección de $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$ se cumple que

$$f(x_i^{\min}) \leqslant f(x_i^*) \leqslant f(x_i^{\max}),$$

[1]Jean Gaston Darboux (1842-1917), matemático francés, hizo importantes contribuciones a la geometría diferencial y al análisis.



(a) $S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\})$ (b) $\underline{S}(f, \mathcal{P})$ (c) $\overline{S}(f, \mathcal{P})$

Figura 9.2: Sumas de Darboux-Riemann

entonces, para cada $\mathcal{P} \in \Omega([a, b])$, se tiene

$$\underline{S}(f, \mathcal{P}) \leqslant S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\}) \leqslant \overline{S}(f, \mathcal{P}).$$

Nota Importante.

(a) *Si f es una función no-negativa, es decir $f(x) \geqslant 0$ para toda $x \in [a, b]$, entonces la suma superior de Darboux-Riemann correspondiente a la partición $\mathcal{P}$, es la suma de las áreas de los rectángulos cuyas bases son los segmentos $[x_{i-1}, x_i]$ y cuya altura es la máxima ordenada de los puntos de la gráfica de f sobre el segmento $[x_{i-1}, x_i]$ para $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. En ese caso, la región bajo la curva está contenida en la unión de rectángulos y su área será menor o igual a la suma de las áreas de éstos. Una situación análoga se tiene con la suma inferior de Darboux-Riemann asociada a la partición $\mathcal{P}$, donde el conjunto bajo la gráfica contiene a la unión de rectángulos cuyas áreas dan la suma inferior. También es de observarse que para cualquier elección de los puntos $x_i^* \in [x_{i-1}, x_i]$, la suma de Riemann $S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\})$ es un número entre las sumas inferior y superior de Darboux-Riemann.*

(b) *Si la función f toma tanto valores positivos como negativos en $[a, b]$, la contribución a cada suma de los subintervalos sobre los que f toma valores negativos, será también un número negativo y entonces, en el cálculo de la suma de Riemann, la suma del área de los rectángulos que quedan por abajo del eje de las abscisas se resta del área de los rectángulos que quedan por arriba de ese eje. Vea la figura 9.3.*

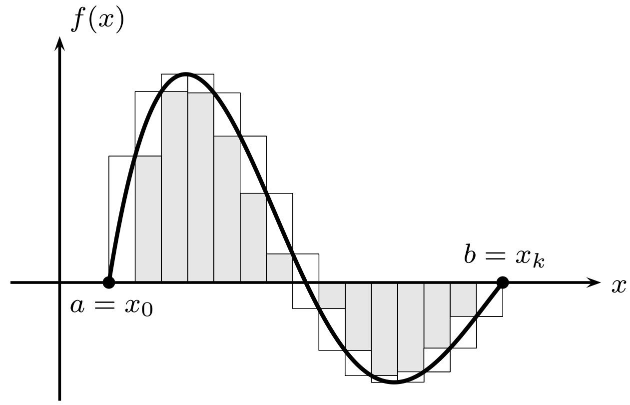


Figura 9.3: Sumas superiores e inferiores de Darboux-Riemann

Para mostrar cómo tiene lugar el proceso de aproximación a medida que se toman particiones de $[a,b]$ cada vez más finas, probaremos primero el lema siguiente.

Lema 9.1. Sean $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \Omega([a,b])$ y sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces

(a) $\overline{S}(f,\mathcal{P}) \geqslant \underline{S}(f,\mathcal{P})$; (b) $\overline{S}(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leqslant \overline{S}(f,\mathcal{P})$; (c) $\underline{S}(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \geqslant \underline{S}(f,\mathcal{P})$;

(d) $\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)(b-a) \geqslant \overline{S}(f,\mathcal{P}) \geqslant \underline{S}(f,\mathcal{P}) \geqslant \inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)(b-a)$;

(e) $\overline{S}(f,\mathcal{P}) \geqslant \underline{S}(f,\mathcal{Q})$; (f) $\inf\limits_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f,\mathcal{T}) \geqslant \sup\limits_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \underline{S}(f,\mathcal{T})$.

Demostración. Sean las particiones $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_2 < \cdots < x_k = b\}$ y $\mathcal{Q} = \{a = z_0 < z_1 < \cdots < z_r = b\}$. Como $f(x_i^{\max}) \geqslant f(x_i^{\min})$ para cada $i = 1,2,3,\ldots,k$, se tiene la validez del inciso (a).

Para probar (b), basta observar que al considerar la partición $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$, si el subintervalo $[x_{i-1},x_i]$ de $\mathcal{P}$ contiene varios elementos z_k de $\mathcal{Q}$ en la forma $x_{i-1} \leqslant z_j < z_{j+1} < \cdots z_s \leqslant x_i$, da lugar en $\overline{S}(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q})$ a varios sumandos que corresponden al área de los rectángulos asociados a $\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}$ cuyas bases están contenidas en $[x_{i-1},x_i]$ y cuyas alturas $\sup_{x\in[z_{s-1},z_s]} f(x)$ son menores o iguales que $\sup_{x\in[x_{i-1},x_i]} f(x)$. Puesto que, en general, $\sup_M f(x) \leqslant \sup_N f(x)$ si $M \subset N$, entonces $\overline{S}(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \leqslant \overline{S}(f,\mathcal{P})$, lo cual prueba (b).

La prueba de (c) es análoga a la prueba de (b) si observamos que

$$\inf_M f(x) \geqslant \inf_N f(x) \quad \text{cuando} \quad M \subset N.$$

La validez del inciso (d) es evidente, y (e) se sigue de observar que

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}) \geqslant \overline{S}(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \geqslant \underline{S}(f,\mathcal{P}\cup\mathcal{Q}) \geqslant \underline{S}(f,\mathcal{Q}).$$

La afirmación del inciso (f) es consecuencia directa de la validez de (e). $\lhd$

NOTA IMPORTANTE. *Los incisos (a) y (e) en el lema anterior implican que cada suma superior de Darboux-Riemann es cota superior para el conjunto de todas las sumas inferiores de Darboux-Riemann posibles y, análogamente, cada suma inferior de Darboux-Riemann es cota inferior de todas las sumas superiores de Darboux-Riemann posibles. Por otro lado, los incisos (b) y (c) significan que al ir refinando cada vez más una partición mediante la incorporación de nuevos puntos, se genera una sucesión creciente de sumas inferiores y una sucesión decreciente de sumas superiores. El punto clave aquí es que a medida que se toman particiones con norma cada vez más pequeña, las sumas de Riemann convergen todas a un mismo número, lo cual motiva la definición siguiente.*

Definición 9.2. Para cada función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, se define la *integral de f en el intervalo* $[a, b]$ como el número real $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ dado por

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S(f, \mathcal{P}_n, \{x_i^{n*}\})$$

donde

$$\mathcal{P}_n = \left\{a = x_0^n < x_2^n < \cdots < x_{k(n)}^n = b\right\} \text{ para } n = 1, 2, 3, \ldots$$

es una sucesión de particiones de $[a, b]$ cuya norma $|\mathcal{P}_n|$ tiende a cero y $\{x_i^{n*}\}$ es una elección arbitraria de puntos $x_i^{n*} \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$ para cada $i = 1, 2, 3, \ldots, k(n)$ y $n = 1, 2, 3, \ldots$

NOTA IMPORTANTE.

(a) *El símbolo $\int$ es una deformación del símbolo $\sum$. La expresión $f(x)\,dx$ denota el área de un rectángulo de base un incremento infinitesimal dx de la variable x y altura $f(x)$. Los extremos inferior a y superior b en el signo $\int_a^b$ denotan el sentido en que se recorre el intervalo $[a, b]$.*

(b) *Para que la definición de integral definida sea válida, debemos probar que si f es una función continua, entonces todas las sucesiones de sumas de Riemann correspondientes a particiones cuya norma tiende a cero, tienen un mismo límite. Para probar ese hecho, demostraremos en la proposición 9.1, que si la función f es continua, entonces el infimum de las sumas superiores de Darboux-Riemann coincide con el supremum de las sumas inferiores y, por tanto, cualquier sucesión de sumas de Riemann correspondientes a particiones con norma que tiende a cero convergen a* *un mismo número real. Ese número es la integral definida de f en $[a, b]$ y corresponde, si f es no-negativa, al valor del área del conjunto bajo la gráfica de la función sobre $[a, b]$.*

Proposición 9.1. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces

$$\inf_{\mathcal{P}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}\in\Omega([a,b])} \underline{S}(f, \mathcal{P}).$$

Más aún, si $\mathcal{P}_n = \{a = x_0^n < x_2^n < \ldots < x_k^n = b\}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, es una sucesión de particiones de $[a, b]$ cuya norma $|\mathcal{P}_n|$ tiende a cero, entonces se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} S(f, \mathcal{P}_n, \{x_i^{n*}\}) = \inf_{\mathcal{P}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f, \mathcal{P}) = \sup_{\mathcal{P}\in\Omega([a,b])} \underline{S}(f, \mathcal{P}),$$

donde $\{x_i^{n*}\}$ es una elección arbitraria de puntos $x_i^{n*} \in [x_{i-1}^n, x_i^n]$, mientras que $S(f, \mathcal{P}_n, \{x_i^*\})$ es la suma de Riemann asociada a $\mathcal{P}_n$ y a la elección $\{x_i^{n*}\}$.

Demostración. Al ser f continua en $[a, b]$, en virtud del teorema 4.6, es uniformemente continua, es decir, para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si x y $y \in [a, b]$ y $|x - y| \leqslant \delta$ entonces

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Por tanto, si $\mathcal{P}$ es una partición tal que los subintervalos en los cuales divide a $[a, b]$ son de longitud menor o igual a δ, se tiene que en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ se cumple

$$f(x_i^{\max}) - f(x_i^{\min}) \leqslant \frac{\varepsilon}{b - a}.$$

Consecuentemente, las sumas superiores e inferiores respectivas satisfacen

$$\overline{S}(f, \mathcal{P}) - \underline{S}(f, \mathcal{P}) \leqslant \varepsilon.$$

Esto muestra que para cada número $\varepsilon > 0$, toda partición $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ tal que $|\mathcal{P}| < \delta$, es tal que las suma superior e inferior de Darboux-Riemann respectivas difieren entre sí en menos que ε. Teniendo en cuenta la estimación anterior, podemos escribir

$$\inf_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f, \mathcal{T}) \leqslant \overline{S}(f, \mathcal{P}) \leqslant \underline{S}(f, \mathcal{P}) + \varepsilon \leqslant \sup_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \underline{S}(f, \mathcal{T}) + \varepsilon,$$

y por tanto,

$$\inf_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f, \mathcal{T}) \leqslant \sup_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \underline{S}(f, \mathcal{T}) + \varepsilon.$$

Como ε es un número positivo arbitrario, concluimos que

$$\inf_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f,\mathcal{T}) \leqslant \sup_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \underline{S}(f,\mathcal{T}),$$

y esto, junto con el inciso (f) del lema 9.1, implica que

$$\inf_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f,\mathcal{T}) = \sup_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \underline{S}(f,\mathcal{T}).$$

Sea ahora una sucesión $\mathcal{P}_n$ de particiones con $|\mathcal{P}_n| \to 0$. Dado $\varepsilon > 0$ existe N tal que $|\mathcal{P}_n| < \delta$ si $n > N$ y entonces podemos escribir

$$\inf_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f,\mathcal{T}) \leqslant \overline{S}(f,\mathcal{P}_n) \leqslant \underline{S}(f,\mathcal{P}_n) + \varepsilon, \quad \text{para} \quad n > N$$

y, por tanto,

$$\inf_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f,\mathcal{T}) \leqslant \overline{S}(f,\mathcal{P}_n) \leqslant \sup_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \underline{S}(f,\mathcal{T}) + \varepsilon, \quad \text{para} \quad n > N.$$

Luego, hemos probado que $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{S}(f,\mathcal{P}_n) = \sup\limits_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \underline{S}(f,\mathcal{T})$.

Análogamente, se tiene $\lim\limits_{n\to\infty} \underline{S}(f,\mathcal{P}_n) = \inf\limits_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f,\mathcal{T})$.

Finalmente, puesto que para cualquier elección de puntos $\{x_i^{n*}\}$ se tiene

$$\overline{S}(f,\mathcal{P}_n) \geqslant S(f,\mathcal{P}_n,\{x_i^{n*}\}) \geqslant \underline{S}(f,\mathcal{P}_n),$$

haciendo $n \to \infty$ se obtiene,

$$\lim_{n\to\infty} S(f,\mathcal{P}_n,\{x_i^{n*}\}) = \sup_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \underline{S}(f,\mathcal{T}) = \inf_{\mathcal{T}\in\Omega([a,b])} \overline{S}(f,\mathcal{T}),$$

con lo cual hemos demostrado que todas las sucesiones de sumas de Riemann correspondientes a particiones con normas que tienden a cero, tienen un mismo límite, que se denomina *integral definida de* f *en* $[a,b]$. ◁

Nota Importante. *Al cambiar la orientación de una partición $\mathcal{P}$, la suma de Riemann cambia de signo al invertirse los extremos inicial y final de cada subintervalo. Para señalar la orientación que se ha dado a las particiones que se han utilizado para calcular la integral, escribiremos siempre en la parte inferior del signo $\int f(x)\,dx$ el extremo inicial del intervalo de integración y en la parte superior el extremo final, definidos éstos de acuerdo a la orientación dada a las particiones. Tomando en cuenta lo anterior, tenemos la relación*

$$\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Ejemplo 9.2. A partir de la definición, calculemos la integral de la función $f(x) = cx$ en el intervalo $[a, b]$.

Tomemos la sucesión particular de particiones de $[a, b]$ con norma que tiende a cero dada mediante $\mathcal{P}_n = a < a + h < a + 2h < \cdots < a + nh = b$, donde $h = \dfrac{b-a}{n}$. En este caso, los intervalos en que se divide $[a, b]$ tienen por extremo derecho a $x_i = a + ih$, con $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Elijamos ahora los puntos intermedios $x_i^* = a + ih - \dfrac{h}{2} \in [x_{i-1}, x_i]$ y calculemos las sumas de Riemann correspondientes, obteniendo

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}_n, \{x_i^*\}) &= \sum_{i=1}^{n} c\left(a + ih - \frac{h}{2}\right)h = ca(b-a) + \frac{c(b-a)^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\left(i - \frac{1}{2}\right) \\ &= ca(b-a) + \frac{c(b-a)^2}{n^2}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2}\right) = \frac{1}{2}c(b^2 - a^2), \end{aligned}$$

y tomando límite cuando $n \to \infty$ tendremos

$$\int_a^b cx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}c(b^2 - a^2). \triangleleft$$

9.1.1 Propiedades de la integral definida

En la siguiente proposición enlistamos las propiedades principales de la integral definida.

Proposición 9.2. Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$. Entonces

1. Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$,
$$\int_a^b (\lambda f + g)(x) \, \mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x + \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{(Linealidad)}$$
2. Para cada $c \in (a, b)$,
$$\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_a^c f(x) \, \mathrm{d}x + \int_c^b f(x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{(Aditividad del intervalo)}$$
3. $\displaystyle \inf_{x \in [a,b]} f(x)(b-a) \leqslant \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \leqslant \sup_{x \in [a,b]} f(x)(b-a)$
4. Si $f(x) \geqslant g(x)$ en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \geqslant \int_a^b g(x) \, \mathrm{d}x$.
5. $\displaystyle \left| \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x \right| \leqslant \int_a^b \left| f(x) \right| \mathrm{d}x$

Demostración. Para probar 1, basta observar que para cada sucesión de particiones $\mathcal{P}_n$ de $[a,b]$ con norma que tiende a cero y cada elección de puntos intermedios $\{x_i^{n*}\}$, se cumple que

$$S(\lambda f+g,\mathcal{P}_n,\{x_i^{n*}\})=\lambda S(f,\mathcal{P}_n,\{x_i^{n*}\})+S(g,\mathcal{P}_n,\{x_i^{n*}\}),$$

y tomando en cuenta la convergencia de las sucesiones de la derecha, se tendrá

$$\int_a^b(\lambda f+g)(x)\,\mathrm{d}x=\lambda\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Para la prueba de 2, obsérvese que si $\mathcal{P}_n$ y $\mathcal{R}_n$ son sucesiones de particiones de $[a,c]$ y $[c,b]$, respectivamente, con normas que tienden a cero entonces su unión $\mathcal{P}_n\cup\mathcal{R}_n$ define una sucesión de particiones de $[a,b]$ tales que para cualquier elección de puntos intermedios se tiene

$$S(f,\mathcal{P}_n\cup\mathcal{R}_n,\{x_i^{n*}\})=S(f,\mathcal{P}_n,\{x_i^{n*}\})+S(f,\mathcal{R}_n,\{x_i^{n*}\}).$$

Al tomar límite cuando $n\to\infty$, de las sucesiones anteriores se obtiene

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

con lo que se prueba el punto 2.

La demostración del punto 3 es consecuencia de la siguiente estimación para cada partición $\mathcal{P}$ de $[a,b]$:

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x)(b-a)\geqslant S(f,\mathcal{P}_n,\{x_i^{n*}\})\geqslant\inf_{x\in[a,b]} f(x)(b-a).$$

La demostración del punto 4 se tiene al observar que si $k:[a,b]\to R$ es una función continua con $k(x)\geqslant 0$ para $x\in[a,b]$, entonces

$$\inf_{x\in[a,b]} k(x)(b-a)\geqslant 0,$$

y, de lo probado en el punto 3, se sigue que $\int_a^b k(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$. Tomando en cuenta lo anterior, si $f(x)\geqslant g(x)$ en $[a,b]$, se tiene $(f-g)(x)\geqslant 0$ y entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0.$$

Finalmente, la prueba del punto 5 se sigue directamente del punto 3 y de considerar que si f es continua, también lo es $|f|$ y

$$-|f(x)|\leqslant f(x)\leqslant|f(x)|;$$

luego,

$$-\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x,$$

lo cual implica que

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x. \lhd$$

Corolario 9.1. *(Teorema del valor medio para integrales)* Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Entonces existe $c\in[a,b]$ tal que

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a).$$

Demostración. Del punto 3 de la proposición anterior, tenemos que

$$\inf_{x\in[a,b]} f(x) \leqslant \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sup_{x\in[a,b]} f(x).$$

Tomando ahora en cuenta que toda función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$, alcanza cada valor intermedio entre su valor máximo y su valor mínimo, y como $\dfrac{1}{(b-a)}\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ es un valor entre esos valores extremos de la función, entonces existe $c\in[a,b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{(b-a)}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

con lo cual se prueba el corolario. $\lhd$

Corolario 9.2. *(Segundo teorema del valor medio para integrales)* Sean f y g funciones continuas en $[a,b]$ y $f(x)\geqslant 0$ para toda $x\in[a,b]$. Entonces existe $c\in(a,b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(c)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración. A partir de la estimación

$$f(x)\min_{x\in[a,b]} g(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant f(x)\max_{x\in[a,b]} g(x),$$

podemos escribir

$$\min_{x\in[a,b]} g(x)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \max_{x\in[a,b]} g(x)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Enseguida, por el teorema del valor intermedio para funciones continuas, existirá $c \in (a, b)$ tal que

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(c)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \triangleleft$$

9.2 El teorema fundamental del cálculo

Aparentemente, el cálculo de una integral definida es un proceso difícil de implementar, pues se requiere tomar en cuenta el comportamiento de la función a lo largo de todo el intervalo de integración. Sin embargo, cuando se conoce una primitiva o antiderivada de la función, el cálculo de la integral en el intervalo se reduce a una mera valuación de esa primitiva en sus extremos, tal como lo mostramos en la proposición siguiente.

Proposición 9.3. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua y sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una antiderivada o primitiva de f, es decir $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$. Entonces

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{dg}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = g(b) - g(a).$$

Demostración. Sea $\mathcal{P} = \{a = x_0 < x_2 < \cdots < x_k = b\}$ una partición y tomemos en cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ un punto intermedio x_i^* tal que

$$g(x_i) - g(x_{i-1}) = \frac{dg}{\mathrm{d}x}(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

La existencia de tal punto lo asegura el teorema de valor medio aplicado a la función g en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Luego, evaluando la suma de Riemann correspondiente, se tiene

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\}) &= \sum_{i=1}^{k} \frac{dg}{\mathrm{d}x}(x_i^*)(x_i - x_{i-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{k} (g(x_i) - g(x_{i-1})) = g(b) - g(a), \end{aligned}$$

lo cual muestra que $S(f, \mathcal{P}, \{x_i^*\})$ es un número que no depende de la partición $\mathcal{P}$. Luego, el límite de la sumas de Riemann correspondientes a una sucesión de particiones $\mathcal{P}_n$ con norma que tiende a cero y donde los puntos intermedios x_i^* se eligen como se hizo arriba, será el número $g(b) - g(a)$ y por tanto se tendrá

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = g(b) - g(a). \triangleleft$$

Nota Importante. *Hemos probado que si una función continua tiene una primitiva, entonces la integral de la primera sobre cada intervalo cerrado es igual a la diferencia de valores de la primitiva en sus extremos. Tomando en cuenta que dos primitivas en un intervalo difieren por una constante, el valor de la diferencia de valores $g(b) - g(a)$ es independiente de la primitiva que se utilice.*

El resultado anterior es la primera parte del llamado *teorema fundamental del cálculo.*[2] La parte restante afirma que cada función continua tiene una antiderivada o primitiva.

Proposición 9.4. Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, la función

$$g : [a, b] \to \mathbb{R},$$

definida mediante la expresión

$$g(x) = \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s,$$

es una primitiva de f.

Demostración. Mostremos primero que g es derivable.

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\int_a^{x} f(s)\,\mathrm{d}s + \int_x^{x+h} f(s)\,\mathrm{d}s - \int_a^x f(s)\,\mathrm{d}s \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(s)\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

Aplicando el teorema de valor medio para integrales, tenemos que

$$\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(s)\,\mathrm{d}s = f(x_h), \text{ con } x_h \in [x, x+h]$$

Tomando límite cuando $h \to 0$ y considerando que f es continua en x, obtenemos

$$\lim_{h\to 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \lim_{h\to 0} f(x_h) = f(x).$$

[2]La idea original de este teorema se debe a Isaac Barrow (1630-1677), matemático inglés mencionado en el capítulo primero.

Esto prueba que la función g es derivable y $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$. Luego, g es una primitiva de f en $[a, b]$. ◁

Nota Importante.

(a) *El teorema fundamental del cálculo establece que las operaciones de derivación e integración son procesos recíprocos en el sentido siguiente:*

$$\int_a^x \frac{df}{dx}(s)\, ds = f(x) - f(a), \qquad \frac{d\left(\displaystyle\int_a^x f(s)\, ds\right)}{dx}(x) = f(x).$$

(b) *El teorema fundamental del cálculo proporciona un método para el cálculo de integrales definidas de funciones continuas, remitiendo al problema del cálculo de primitivas o antiderivadas.*

Ejemplo 9.3. Utilizando el teorema fundamental del cálculo, podemos evaluar la integral definida $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + x)\,\mathrm{d}x$, si observamos que una antiderivada de la función $\operatorname{sen} x + x$ es la función $g(x) = -\cos x + \dfrac{1}{2}x^2$. Luego,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x + x)\,\mathrm{d}x = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - g(0) = \frac{1}{8}\pi^2 + 1. \ \triangleleft$$

Ejemplo 9.4. Si en un tanque vacío de 5000 metros cúbicos de capacidad se vierte agua a una razón de $\dfrac{t}{100}\dfrac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{seg}}$, ¿en cuánto tiempo se llena el tanque?

Solución. Si denotamos por $V(t)$ la función que en el tiempo t es igual al volumen de agua en el tanque, se tiene como dato que

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{t}{100},$$

y por tanto, aplicando el teorema fundamental del cálculo, tenemos

$$V(t) = \int_0^t \frac{s}{100}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{200}t^2.$$

El tanque se llenará en el tiempo T tal que

$$V(T) = 5000 = \frac{1}{200}T^2,$$

es decir,

$$T = 1000 \text{ segundos.} \ \triangleleft$$

9.3 Integrales impropias

En este apartado presentamos los conceptos de integral impropia y de integral para funciones seccionalmente continuas. En el primer caso, se trata de extender el concepto de integral a intervalos abiertos o no acotados, mientras que en el último, se trata de definir la integral para funciones que contienen un número finito de puntos de discontinuidad.

Definición 9.3. *Una función continua f definida en un intervalo de la forma $[a,\infty)$ se dice integrable si para cada sucesión $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ que tiende a ∞ se tiene que la sucesión de integrales definidas $\left\{\int_a^{b_i} f(x)\,dx\right\}_{i=1}^{\infty}$ converge a un límite común $L \in \mathbb{R}$. Al número L se le llama integral impropia de f en $[a,\infty)$ y se denota con $\int_a^{\infty} f(x)\,dx$; es decir,*

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^{x} f(s)\,ds.$$

Nota Importante. *Cuando decimos que la sucesión $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiende a ∞, entendemos que para cada natural M existe una etiqueta N tal que $b_i \geqslant M$ para todo $i \geqslant N$.*

Ejemplo 9.5. La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ no tiene integral impropia en $[0,\infty)$ ya que si tomamos la sucesión $\{2\pi k\}_{k=1}^{\infty}$, que tiende a ∞, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi k} \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = 0,$$

pero si tomamos la sucesión $\left\{2\pi k + \frac{\pi}{2}\right\}_{k=1}^{\infty}$, que también tiende a ∞, tenemos

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^{2\pi k+\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen} x \,\mathrm{d}x = 1. \triangleleft$$

Ejemplo 9.6. La integral impropia $\int_1^{\infty} x^{-p}\,\mathrm{d}x$, donde p es un número entero, es convergente para $p > 1$ y divergente para $p \leqslant 1$. La afirmación para $p > 1$ se deduce directamente del cálculo

$$\int_1^{\infty} x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p} \lim_{t\to\infty} (t^{-p+1} - 1) = \frac{-1}{1-p},$$

mientras que si $p = 1$, se tiene

$$\int_1^{\infty} x^{-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^{t} x^{-1}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \ln t \to \infty,$$

y si $p < 1$,

$$\int_1^\infty x^{-p}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty}\int_1^t x^{-p}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1-p}\lim_{t\to\infty}(t^{-p+1}-1) \to \infty. \triangleleft$$

Análogamente, se define la *integral impropia de una función continua f en* $(-\infty, b]$ como el límite común, si existe, de las sucesiones de la forma $\left\{\int_{a_i}^b f(x)\,\mathrm{d}x\right\}_{i=1}^\infty$ para toda sucesión $\{a_i\}_{i=1}^\infty$ que tiende a $-\infty$. La integral impropia de f en $(-\infty, b]$ se denota con $\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x$; es decir,

$$\int_{-\infty}^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{x\to-\infty}\int_x^b f(s)\,\mathrm{d}s.$$

Finalmente, diremos que una función f, continua en $(-\infty, \infty)$, tiene *integral impropia en* $(-\infty, \infty)$, si para algún número real a, la función f posee integrales impropias en $(-\infty, a]$ y en $[a, \infty)$. A la suma de tales integrales se le llama la *integral impropia de f en* $(-\infty, \infty)$ y se denota con $\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$; es decir,

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^a f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^\infty f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nota Importante.

(a) *La definición de integral impropia en toda la recta* $(-\infty, \infty)$, *no depende del valor* a.

(b) *A las integrales impropias de funciones en intervalos no acotados se les denomina "integrales impropias de primera clase". Cuando una integral impropia existe, también se dice que la integral impropia converge y en caso contrario se dice que la integral impropia diverge.*

De manera similar al caso de intervalos no acotados, si f es una función continua definida en un intervalo de la forma $[a, b)$, se dice que tiene *integral impropia en* $[a, b)$ si para toda sucesión de números reales $\{b_i\}_{i=1}^\infty$ con términos $a < b_i < b$ y tal que $\lim_{i\to\infty} b_i = b$, se tiene que la sucesión de integrales definidas $\left\{\int_a^{b_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right\}_{i=1}^\infty$ converge a un valor L, independiente de la sucesión

$\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ que se tome. Al número L se le llama *integral impropia de f en $[a,b)$* y se denota con $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; es decir,

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b_i\to b}\int_a^{b_i} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Para el caso de funciones continuas sobre intervalos de la forma $(a,b]$, la definición de integral impropia es similar. Finalmente si f es una función continua en un intervalo abierto de la forma (a,b), se dice que tiene *integral impropia en (a,b)* si para algún $c\in(a,b)$ las integrales impropias $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existen y en tal caso se define la *integral impropia de f en (a,b)* como la suma

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Por su utilidad para probar la existencia de integrales impropias, damos aquí el siguiente criterio de comparación.

Proposición 9.5. *(Criterio de comparación)* Sean f y g dos funciones no-negativas definidas en $(-\infty,\infty)$ y tales que $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ para toda $x\in(-\infty,\infty)$. Entonces, si g tiene integral impropia en $(-\infty,\infty)$, también la tiene la función f y se cumple que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Demostración. Basta mostrar que bajo las hipótesis anteriores la función f tiene integral impropia en $[0,\infty)$. Tomemos una sucesión $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ que tienda a ∞. Por la no-negatividad de las funciones y la condición $0\leqslant f(x)\leqslant g(x)$ se sigue que

$$\int_0^{b_i} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{b_i} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Como las dos sucesiones $\left\{\displaystyle\int_0^{b_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right\}_{i=1}^{\infty}$ y $\left\{\displaystyle\int_0^{b_i} g(x)\,\mathrm{d}x\right\}_{i=1}^{\infty}$ son positivas y la segunda convergente, digamos, a un número L, se tiene que la sucesión $\left\{\displaystyle\int_0^{b_i} f(x)\,\mathrm{d}x\right\}_{i=1}^{\infty}$ será convergente (ver ejercicio 4.6.21), y

$$\int_0^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^{\infty} g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Análogamente se muestra que $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-\infty}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x$ y, en consecuencia, la proposición queda probada. $\triangleleft$

9.4 Integración de funciones continuas por secciones

La integral definida que hemos presentado es válida solamente para funciones continuas en un intervalo cerrado y acotado. Concluimos este capítulo presentando la generalización de ese concepto a la familia de *funciones seccionalmente continuas,* que son aquellas funciones que tienen un número finito de puntos de discontinuidad. En este caso, el dominio de definición se puede escribir como unión de un número finito de intervalos abiertos ajenos, cuyos extremos los ocupan los puntos de discontinuidad.

Ejemplo 9.7. La función $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ con

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2} & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{si } x \in (1, 2] \\ x - 2 & \text{si } x \in (2, 3] \end{cases}$$

es una función seccionalmente continua cuyos puntos de discontinuidad son $x = 1$ y $x = 2$. $\triangleleft$

Definición 9.4. Una función seccionalmente continua f se dice integrable en un dominio si posee integral impropia en cada uno de los intervalos abiertos en que sus discontinuidades dividen a ese dominio. A la suma de tales integrales se le llama la *integral de la función seccionalmente continua.*

Ejemplo 9.8. La función $f : (0, 2] \to \mathbb{R}$, con

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ x - 1 & \text{si } 1 < x \leqslant 2, \end{cases}$$

es seccionalmente continua y sólo posee una discontinuidad en $x = 1$; su integral se calcula como sigue:

$$\begin{aligned} \int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \int_1^2 (x - 1)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{c \to 0^+} \int_c^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x + \left(\frac{x^2}{2} - x\right)\Bigg|_1^2 \\ &= \lim_{c \to 0^+} 2\sqrt{x}\Big|_c^1 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}. \ \triangleleft \end{aligned}$$

Ejercicios y problemas del capítulo

La integral de Riemann de funciones continuas

9.4.1. Evalúe el limite $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} \cos\left(\frac{k}{n}\right)$.

9.4.2. Calcule los límites siguientes:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^3\right]$;

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{4n}{n}\right)^3\right]$;

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^5 + 2^5 + 3^5 + \cdots + n^5}{n^6}$;

(d) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 + \left(\frac{n+2}{n}\right)^3 + \cdots + \left(\frac{2n}{n}\right)^3\right]$.

9.4.3. Evalúe la integral definida $\int_0^{\frac{\sqrt{2}-1}{2}} \frac{1}{(2x+1)\sqrt{x^2+x}}\,\mathrm{d}x$.

9.4.4. Haciendo uso de las propiedades de la integral definida, resuelva los problemas siguientes:

(a) Sea f una función continua tal que $\int_1^3 f(x)\,\mathrm{d}x = 3$, $\int_2^5 f(x)\,\mathrm{d}x = -2$.

Calcule $\int_3^5 f(x)\,\mathrm{d}x$ y $\int_2^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

(b) Demuestre que $\sqrt{3} \leqslant \frac{1}{2}\int_1^3 \sqrt{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{11}$.

(c) Demuestre que $\left|\int_0^{\pi} \operatorname{sen}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \pi$.

(d) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y con derivada continua tal que

$\int_0^1 f(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\mathrm{d}x = 0$ y $\int_0^1 f^2(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\mathrm{d}x = 18$.

Calcule $\int_0^1 f^4(x)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x)\right)\mathrm{d}x$.

9.4.5. Calcule el área de las regiones siguientes.

(a) $S = \{(x, y) \text{ tales que } x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant \mathrm{e}^x\}$;

(b) $S = \left\{(x, y) \text{ tales que } x \geqslant 0,\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}\right\}$;

(c) $S = \left\{(x, y) \text{ tales que } 3 < x \leqslant 7,\ 0 \leqslant y \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{x-3}}\right\}$.

9.4.6. Calcule las integrales definidas propuestas enseguida.

(a) $\displaystyle\int_0^2 |t^2 - t|\,\mathrm{d}t$; (b) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 + \operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} x \tan^2 x\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} x \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x$, donde $\operatorname{sgn} x = \dfrac{x}{|x|}$ si $x \neq 0$ y $\operatorname{sgn} 0 = 0$.

9.4.7. Pruebe las fórmulas importantes siguientes:

(a) $$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \operatorname{sen} nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mx \cos nx\,\mathrm{d}x = 0 \text{ si } m, n \in \mathbb{N},\ n \neq m.$$

(b) $$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen}^2 mx\,\mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,\mathrm{d}x = \pi \text{ para cada } m \in \mathbb{N}.$$

(c) $$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n} x\,\mathrm{d}x = \frac{(2n)!}{2^{2n} n! n!}\frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^{2n+1} x\,\mathrm{d}x = \frac{2^{2n} n! n!}{(2n+1)!}.$$

9.4.8. Una función continua satisface la identidad $f(2x) = 3f(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Si $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 1$, ¿cuál es el valor de la integral $\displaystyle\int_0^2 f(x)\,\mathrm{d}x$?

9.4.9. Calcule el área de la región bajo la curva $y = \dfrac{4}{2x+1} - \dfrac{2}{x+2}$, arriba del eje de las abscisas y a la derecha de $x = 1$.

9.4.10. (a) *Pruebe que $\displaystyle\int_0^1 \frac{t^4(1-t)^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{22}{7} - \pi$.

(b) *Evalúe $\displaystyle\int_0^1 t^4(1-t)^4\,\mathrm{d}t$ y deduzca que $\dfrac{22}{7} - \dfrac{1}{630} < \pi < \dfrac{22}{7} - \dfrac{1}{1260}$.

9.4.11. *Sea f continua, estrictamente creciente y tal que $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$. Sea g la función inversa de f. Muestre que

$$\int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

9.4.12. (a) *Pruebe el siguiente teorema del valor medio para integrales. Sean f y g dos funciones con f continua y g no decreciente y con segunda derivada continua en $[a,b]$, entonces

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^c f(x)dx + g(b)\int_c^b f(x)dx$$

para algún $c \in (a,b)$.

(b) *Aplicando el teorema de (a), pruebe que $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_a^b \frac{\operatorname{sen} nx}{x}\,\mathrm{d}x = 0.$

Para ello utilice el método de integración por partes y el segundo teorema del valor medio para integrales.

9.4.13. *Sea $\theta_n = \arctan n$. Pruebe que para $n = 1, 2, \ldots$

$$\theta_{n+1} - \theta_n < \frac{1}{n^2+n}.$$

9.4.14. (a) *Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua. Muestre que

$$\int_0^\pi x f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) *Evalúe la integral $\displaystyle\int_0^\pi \frac{x \operatorname{sen} x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

9.4.15. *Pruebe que existe $\lambda \in (0,1)$ tal que $\displaystyle\int_0^\pi x^\lambda \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x = 3.$

9.4.16. *Considere la función $f(x) = \displaystyle\int_0^\pi \cos t \cos(x-t)\,\mathrm{d}t$. Calcule el valor mínimo de f.

Teorema fundamental del Cálculo

9.4.17. Un automóvil, durante un recorrido de 30 minutos, registra en su velocímetro que la velocidad instantánea $v(t)$ en el tiempo t, medida en kilometros por hora, es igual a $v(t) = t^2 + 1$. ¿Cuál es el desplazamiento neto del automóvil durante ese intervalo de tiempo?

9.4.18. Sea f una función continua, y sean g y h funciones derivables. Deduzca las fórmulas de derivación siguientes:

(a) $\displaystyle\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^{g(x)} f(s)\,\mathrm{d}s = f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x);$

(b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\displaystyle\int_{h(x)}^{g(x)} f(s)\,\mathrm{d}s = f(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) - f(h(x))\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x);$

(c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\displaystyle\int_0^b f(sx)\,\mathrm{d}s\right)(1) = -\int_0^b f(s)\,\mathrm{d}s + bf(b).$

9.4.19. *Sea $f : (p,q) \to \mathbb{R}$ una función con derivadas hasta de orden k en el intervalo (p,q) y sea $a \in (p,q)$. Por el teorema fundamental del cálculo, para cada $c \in (p,q)$ podemos escribir

$$f(a) - f(c) = \int_c^a \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s)ds.$$

(a) Escriba esta integral utilizando dos veces la fórmula de integración por partes para obtener

$$\begin{aligned} f(a) - f(c) &= (s-a)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(s)|_c^a - \int_c^a (s-a)\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(s)\,\mathrm{d}s \\ &= (a-c)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) + \frac{1}{2}(a-c)^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c) + \frac{1}{2}\int_c^a (s-a)^2\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(s)\,\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

Como esto vale para dos puntos a, c arbitrarios de (p,q), podemos escribir en lugar de a el valor x y en lugar de c el valor a para obtener

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a) + \frac{1}{2}(x-a)^2\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(a) + \frac{1}{2}\int_a^x (s-x)^2\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(s)\,\mathrm{d}s.$$

Al término

$$R_a(x) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\int_a^x (s-x)^2\frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(s)\,\mathrm{d}s$$

se le llama el *residuo de Taylor de orden tres en forma integral.*

(b) Deduzca la forma integral del residuo de Taylor de orden n.

9.4.20. *Sea $f(x) = \displaystyle\int_x^{x+\pi} |t \operatorname{sen} t|\,\mathrm{d}t.$

(a) Evalúe $f(0)$ y $f(-\pi)$. (b) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$.

(c) Muestre que f es creciente en $[0,\infty)$ y decreciente en $(-\infty,-\pi]$.

(d) ¿Cuál es el valor mínimo de f?

9.4.21. (a) *Sea la función

$$g(x) = \int_0^x (x-t)f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Muestre que $\dfrac{\mathrm{d}^2 g}{\mathrm{d}x^2}(x) = f(x).$

(b) *Sea

$$G(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^{n-1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Evalúe $\dfrac{\mathrm{d}^n G}{\mathrm{d}x^n}(x)$.

9.4.22. *Sea $a > 0$. Encuentre el valor de a para el cual la integral

$$\int_a^{a^2} \frac{1}{x+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$$

toma el valor mínimo posible.

Integrales impropias

9.4.23. Calcule las integrales impropias siguientes.
(a) $\displaystyle\int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-tx} \operatorname{sen} x\ \mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{1-x}}\right) \mathrm{d}x$.

9.4.24. Utilizando el criterio de comparación:

(a) Pruebe que la función e^{-x^2} tiene integral impropia en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

(b) Pruebe que la función $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x+x^3}}$ tiene integral impropia en el intervalo $[0, \infty)$.

9.4.25. Calcule las integrales impropias siguientes:

(a) $\displaystyle\int_0^1 x \ln x\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_0^{\infty} x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$; (c) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \tan x\,\mathrm{d}x$;

(d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-|x|}\,\mathrm{d}x$; (e) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{4x^2+4x+5}$; (f) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2\theta \sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta$.

9.4.26. Calcule la integral impropia $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x}\operatorname{sen} x}{x}\,\mathrm{d}x$.

9.4.27. En cada caso, evalúe la integral dada
(a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 2x \operatorname{sen} 3x\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2 - 2x\cos\alpha + 1}\,\mathrm{d}x$.

9.4.28. Evalúe $L = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\displaystyle\int_0^x \cos t^2\,\mathrm{d}t}{x}$.