Capítulo 8

La integral indefinida

En la presencia de fenómenos de cambio o movimiento, es a veces más viable conocer o deducir la ley de cambio a la que obedece la variación relativa de las variables involucradas, que encontrar la función misma que las relaciona. Es decir, a veces se conoce la derivada de la función o relaciones que satisfacen las derivadas, pero no se conoce la función misma. Por ejemplo, en el caso del movimiento de un automóvil, es a menudo más fácil estimar la velocidad o la aceleración durante un cierto intervalo de tiempo, que la función de posición del vehículo en cada instante. Una idea de la velocidad se puede tener, por ejemplo, observando el velocímetro desde dentro del mismo vehículo. Algo similar se tiene en el caso del movimiento que muestran los cuerpos ante la presencia de una fuerza externa y que se manifiesta, según las leyes del movimiento de Newton, mediante variaciones de la velocidad del cuerpo con respecto al tiempo en forma proporcional a la magnitud y dirección de la fuerza actuante. En este caso, el problema consiste en deducir la posición del cuerpo con respecto al tiempo a partir del comportamiento de su aceleracion o segunda derivada.

Al problema de determinar la forma y los valores de una función a partir del conocimiento de su derivada o de relaciones entre sus derivadas se le llama el problema de integración y es el problema fundamental de la teoría de las ecuaciones diferenciales. En este sentido, el problema de integración es el problema inverso al de derivación o de cálculo de derivadas.

En este capítulo se inicia el estudio de los problemas de integración a partir del concepto de antiderivada o integral indefinida y se muestra cómo las distintas reglas de derivación dan lugar a métodos de integración que permiten resolver problemas como los arriba citados.

8.1 Antiderivadas e integrales indefinidas

Sea una función g definida y continua en un intervalo abierto (o cerrado) I. Decimos que una función derivable f es una *antiderivada* o *primitiva de g* en el intervalo I si

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = g(x), \; x \in I. \tag{8.1}$$

Si g es una función definida en un intervalo abierto o cerrado I, a la familia de sus antiderivadas o primitivas en I se le denomina la *integral indefinida de g en I*, y se denota por el símbolo

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Es de notar que si f es una antiderivada de g, también lo es cualquier función de la forma $f + c$ para cada número real c. Más aún, todas las antiderivadas de g son de esa forma ya que si se tiene otra antiderivada de g, digamos h, su diferencia $h - f$ tiene derivada cero y es, entonces, una función constante; por tanto h difiere de f en esa constante. Es decir, para conocer todas las antiderivadas de una función basta conocer una y todas las demás se obtendrán de ella sumándole un número real.

Nota Importante. *Conociendo una antiderivada particular de una función, cualquier otra queda determinada por su valor en un punto dado, ya que con esa informacion se puede encontrar la constante que hay que sumarle a la antiderivada conocida.*

Ejemplo 8.1. Determinemos la antiderivada f de la función $g(x) = 3x^2 + x$ tal que $f(1) = 3$.

Solución. En este caso, la antiderivada f es un elemento de la integral indefinida

$$\int (3x^2 + x)\,\mathrm{d}x = \left\{ x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c \right\}.$$

Para fijar el valor de c que corresponde al elemento f de esa familia tal que $f(1) = 3$, se hace $f(1) = \dfrac{3}{2} + c = 3$, de donde, $c = \dfrac{3}{2}$ y entonces $f(x) = x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{3}{2}$. ◁

A continuación presentamos la integral indefinida de algunas funciones e-lementales.

Función g	Integral indefinida $\int g(x)\,\mathrm{d}x$
a	$ax + c$
$a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$	$a_0x + \frac{1}{2}a_1x^2 + \cdots + \frac{1}{n+1}a_nx^{n+1} + c$
$(x+b)^{\frac{m}{n}} \quad b \in \mathbb{R}, \quad m, n$ enteros	$\frac{n}{m+n}(x+b)^{\frac{m+n}{n}} + c$
$\operatorname{sen}(bx) \quad b \in \mathbb{R}$	$-\frac{1}{b}\cos(bx) + c$
$\cos(bx) \quad b \in \mathbb{R}$	$\frac{1}{b}\operatorname{sen}(bx) + c$

Ejemplo 8.2. La función $g : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ con $g(x) = 1/x$ tiene por integral indefinida en $(-\infty, 0)$ (o en $(0, \infty)$) a las funciones $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + c$. $\triangleleft$

Ejemplo 8.3. La integral indefinida de $g(x) = |3x - 5|$, es la familia de funciones

$$\int |3x - 5|\,\mathrm{d}x = f(x) + c,$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 5x - \dfrac{3}{2}x^2 & \text{si } x < \dfrac{5}{3} \\[2ex] \dfrac{3}{2}x^2 - 5x + \dfrac{25}{3} & \text{si } x \geq \dfrac{5}{3}. \end{cases}$$

La antiderivada o función primitiva h de $g(x) = |3x - 5|$ en $\mathbb{R}$ tal que $h(1) = 2$, es

$$h(x) = \begin{cases} 5x - \dfrac{3}{2}x^2 - \dfrac{3}{2} & \text{si } x < \dfrac{5}{3} \\[2ex] \dfrac{3}{2}x^2 - 5x + \dfrac{41}{6} & \text{si } x \geq \dfrac{5}{3}. \end{cases} \triangleleft$$

8.2 Métodos de integración

Dado que los procesos de derivación y de cálculo de antiderivadas son operaciones inversas, cada regla o fórmula de derivación da lugar a una regla o método para el cálculo de antiderivadas de funciones continuas. A estos métodos se les conoce como *métodos de integración.*

Antes de desarrollar los métodos de integración inducidos por las reglas de derivación para productos y composición de funciones, que merecen una atención más detallada, enunciamos primeramente un par de propiedades que son consecuencia directa de las reglas de derivación de suma y producto de funciones por un escalar (**??**) y (**??**), respectivamente.

1. Si f es una antiderivada de una función g y $\lambda \in \mathbb{R}$ entonces λf es una antiderivada de la función λg. Es decir
$$\int \lambda g(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int g(x)\,\mathrm{d}x.$$
2. Si f_1 es una antiderivada de g_1 y f_2 es una antiderivada de g_2, entonces $f_1 + f_2$ es una antiderivada de $g_1 + g_2$, es decir,
$$\int (g_1(x) + g_2(x))\,\mathrm{d}x = \int g_1(x)\,\mathrm{d}x + \int g_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

8.2.1 Integración por partes

La fórmula de Leibniz para la derivación de un producto de funciones (fórmula (**??**)) da lugar a un método de integración para productos de funciones llamado *método de integración por partes.*[1] Este método se aplica al cálculo de antiderivadas de productos de dos funciones cuando se conocen las antiderivadas de una de ellas. Aplicando la fórmula de Leibniz para la derivación del producto de funciones es posible reducir el problema inicial a la búsqueda de una antiderivada para el producto de otro par de funciones que en muchos de los casos resulta más fácil de resolver que el problema inicial. El método en cuestión se puede enunciar en los términos siguientes.

Proposición 8.1. *(Integración por partes)* Sean p y q funciones derivables. Entonces
$$\int p(x)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}(x)\,\mathrm{d}x = p(x)q(x) - \int \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x)\,q(x)\,\mathrm{d}x + c.$$

Demostración. Derivando el producto $(pq)(x) = p(x)q(x)$, tenemos
$$\frac{\mathrm{d}(pq)}{\mathrm{d}x}(x) = p(x)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}(x) + q(x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x).$$
Entonces,
$$p(x)q(x) = \int p(x)\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}(x) + \int q(x)\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x) + c,$$

[1]Este método fue desarrollado por Brook Taylor (1685-1731), matemático anglo-canadiense.

de donde se sigue el resultado. ◁ Nota Importante. *Como se observa en el enunciado anterior, el producto inicial para el cual se busca una antiderivada, se reescribe como el producto de una función multiplicada por la derivada de otra; luego, aplicando la fórmula de Leibniz se transforma el cálculo de la antiderivada del producto inicial en el cálculo de una antiderivada para el producto de la derivada del primer factor por la antiderivada conocida del segundo. Si de alguna forma se encuentra una antiderivada para este último producto, se tendrá una antiderivada para el producto inicial sumando a esa antiderivada el producto del primer factor por la antiderivada del segundo.*

Ejemplo 8.4. Calculemos la integral indefinida de las funciones:
(a) $g(x) = x \operatorname{sen} x$; (b) $g(x) = \cos^2 x$; (c) $g(x) = e^{ax}\cos bx$, con $a \neq 0$ y $b \neq 0$.

(a) Haciendo $p(x) = x$ y $q(x) = -\cos x$, tenemos $x \operatorname{sen} x = p(x)\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}(x)$ y aplicando la fórmula de integración por partes, se obtiene

$$\begin{aligned}\int (x \operatorname{sen} x)\,\mathrm{d}x &= \int p(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}q(x)\,\mathrm{d}x\\ &= -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x\\ &= -x\cos x + \operatorname{sen} x + c.\end{aligned}$$

(b) Haciendo $p(x) = \cos x$ y $q(x) = \operatorname{sen} x$, se tiene $\cos^2 x = p(x)\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}(x)$ y aplicando la fórmula de integración por partes obtenemos

$$\begin{aligned}\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x &= \int \cos x\frac{\mathrm{d}\operatorname{sen} x}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x\\ &= \cos x \operatorname{sen} x + \int \operatorname{sen}^2 x\,\mathrm{d}x =\\ &= \cos x \operatorname{sen} x + \int (1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

de donde

$$\int \cos^2 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(\cos x \operatorname{sen} x + x) + c.$$

(c) Haciendo $p(x) = \mathrm{e}^{ax}$ y $q(x) = \dfrac{1}{b}\operatorname{sen} bx$, y aplicando la fórmula de integración por partes, se tiene

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \int p(x)\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}(x)\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen} bx - \frac{a}{b}\int \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen} bx\,\mathrm{d}x. \tag{8.2}$$

Calculamos ahora $\int \mathrm{e}^{ax} \operatorname{sen} bx \, \mathrm{d}x$ aplicando nuevamente el método de integración por partes y haciendo

$$u(x) = \mathrm{e}^{ax} \quad \text{y} \quad v(x) = -\frac{1}{b} \cos bx;$$

así,

$$\int \mathrm{e}^{ax} \operatorname{sen} bx \, \mathrm{d}x = \int u(x) \frac{dv}{\mathrm{d}x}(x) \, \mathrm{d}x = -\frac{1}{b} \mathrm{e}^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x. \tag{8.3}$$

Sustituyendo (8.3) en (8.2),

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \mathrm{e}^{ax} \operatorname{sen} bx - \frac{a}{b} \left[-\frac{1}{b} \mathrm{e}^{ax} \cos bx + \frac{a}{b} \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x \right],$$

y agrupando términos, se tiene

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int \mathrm{e}^{ax} \cos bx \, \mathrm{d}x = \frac{1}{b} \mathrm{e}^{ax} \operatorname{sen} bx + \frac{a}{b^2} (\mathrm{e}^{ax} \cos bx).$$

Finalmente,

$$\int \mathrm{e}^{ax} \cos bx = \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2 + b^2} \Big(b \operatorname{sen} bx + a \cos bx \Big) + c. \triangleleft$$

8.2.2 Integración por sustitución o cambio de variable

La regla de la cadena o de derivación de una composición de funciones da lugar al *método de integración por sustitución,* que se aplica al cálculo de antiderivadas de funciones que se presentan como la composición de dos funciones. El método consiste en expresar la función inicial como la composición de una primera función con una segunda función de otra variable y multiplicada esa composición por la derivada de la primera. Aplicando la regla de la cadena, el problema del cálculo de una antiderivada para la función inicial se transforma en el cálculo de una antiderivada para la función de la nueva variable; entonces se obtiene una antiderivada para la función inicial mediante la composición de la primera función con una antiderivada de la función de la nueva variable. En lenguaje técnico, el método se puede presentar en los términos siguientes.

Proposición 8.2. *(Integración por sustitución)* Sean g y h dos funciones derivables tales que $g : (a, b) \to (c, d)$ y $h : (c, d) \to \mathbb{R}$, y sea f una antiderivada de h. Entonces

$$\int h(g(x)) \left(\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) \right) \mathrm{d}x = \left(\int h(y) \, \mathrm{d}y \right) \circ g(x) = f(g(x)) + c.$$

Demostración. Efectivamente, si derivamos la función $f \circ g$ usando la regla de la cadena y consideramos que

$$\int h(y)\,\mathrm{d}y = f(y) + c \text{ para } y \in I,$$

obtendremos

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(g(x)) + c) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}y}(g(x)) \cdot \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = h(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x),$$

lo que prueba la fórmula de integración por sustitución. $\triangleleft$

Nota Importante. *El método de integración por sustitución también se puede presentar en la forma*

$$\int h(y)\,dy = \left(\int h(g(x))\big(\frac{dg}{dx}(x)\big)\,dx\right) \circ (g^{-1}(y))$$

donde se supone que g tiene derivada distinta de cero. En este caso, cuando se presenta el problema de calcular una antiderivada de una función de la forma $h(g(x))\dfrac{dg}{dx}(x)$, se hace el cambio de variable

$$y = g(x), \qquad dy = \frac{dg}{dx}(x)\,dx,$$

para escribir directamente

$$\int h(g(x))\left(\frac{dg}{dx}\right) dx = \left(\int h(y)\,dy\right) \circ g(x),$$

y reducir así el cálculo a la integral indefinida $\displaystyle\int h(y)\,dy$.

Ejemplo 8.5. Para calcular la integral indefinida de la función

$$p(x) = (x+1)\,\mathrm{sen}\,(x^2 + 2x),$$

observamos la presencia de la composición de la función $\mathrm{sen}\,y$ con la función $g(x) = (x^2 + 2x)$. Luego, haciendo la sustitución

$$y = x^2 + 2x, \qquad \mathrm{d}y = (2x+2)\,\mathrm{d}x,$$

podemos escribir

$$\int p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \mathrm{sen}\,(g(x))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\int \mathrm{sen}\,y\,\mathrm{d}y\right) \circ (g(x)) =$$
$$= -\frac{1}{2}\cos(g(x)) + c = -\frac{1}{2}\cos(x^2 + 2x) + c,$$

ya que la función $-\cos y$ es una antiderivada de $\mathrm{sen}\,y$. $\triangleleft$

Ejemplo 8.6. La integral indefinida $\int \operatorname{sen} x \cos^m x \, \mathrm{d}x$ se obtiene haciendo la sustitución

$$y = \cos x, \qquad \mathrm{d}y = -\operatorname{sen} x \, \mathrm{d}x,$$

y escribiendo

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen} x \cos^m x \, \mathrm{d}x &= -\Big(\int y^m \, \mathrm{d}y\Big) \circ (g(x)) \\ &= \Big(-\frac{y^{m+1}}{m+1}\Big) \circ (\cos x) \\ &= -\frac{1}{m+1} \cos^{m+1} x + c. \lhd\end{aligned}$$

Ejemplo 8.7. La función f tal que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \operatorname{arcsen}(x) \quad \text{y} \quad f(0) = 2$$

se determina aplicando primero el método de integración por partes en la forma

$$\begin{aligned}\int (\operatorname{arcsen} x) \, \mathrm{d}x &= \int (\operatorname{arcsen} x) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} \, \mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{arcsen} x - \int \Big(x \frac{\mathrm{d} \operatorname{arcsen} x}{\mathrm{d}x}\Big) \mathrm{d}x \\ &= x \operatorname{arcsen} x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x\end{aligned}$$

y calculando la integral indefinida del último término mediante la sustitución

$$y = 1 - x^2, \qquad \mathrm{d}y = -2x \, \mathrm{d}x,$$

para obtener

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \, \mathrm{d}x &= \Big(-\frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{y}} \, \mathrm{d}y\Big) \circ (1 - x^2) = \\ &= -\sqrt{1-x^2} + c.\end{aligned}$$

Luego, la integral indefinida de $\operatorname{arcsen}(x)$ es

$$\int (\operatorname{arcsen} x) \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + c.$$

Finalmente, tomando la constante $c = 1$ tendremos la solución de la ecuación diferencial, $f(x) = x\operatorname{arcsen} x + \sqrt{1-x^2} + 1$. $\lhd$

Nota Importante. *Si f es una antiderivada o primitiva de g y z es una antiderivada o primitiva de f entonces $\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}(x) = g(x)$; esto muestra cómo determinar, mediante el cálculo reiterado de antiderivadas, las funciones que tienen como segunda derivada una función previamente dada.*

Ejemplo 8.8. El cálculo de la función z tal que

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}x^2}(x) = x + \operatorname{sen} x \quad \text{con} \quad z(0) = 1 \text{ y } \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}(0) = 1,$$

se obtiene encontrando primeramente la integral indefinida de $g(x) = x + \operatorname{sen} x$,

$$\int g(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x^2 - \cos x + c$$

donde c es una constante y, enseguida, la integral indefinida de la antiderivada anterior, para obtener

$$z(x) = \int \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{6}x^3 - \operatorname{sen} x + cx + b,$$

con b constante. Al requerir que $z(0) = 1$ y $\frac{dz}{\mathrm{d}x}(0) = 1$, se obtiene

$$z(0) = b = 1$$

y

$$\frac{dz}{\mathrm{d}x}(0) = -\cos 0 + c = 1.$$

Entonces la función buscada es

$$z(x) = \frac{1}{6}x^3 - \operatorname{sen} x + 2x + 1. \triangleleft$$

8.2.3 Integración por sustitución trigonométrica

Para la familia de funciones de la forma $h(\sqrt{1-x^2})$, $h(\sqrt{1+x^2})$ o $h(\sqrt{x^2-1})$ donde h es una función continua, el método de sustitución, o de cambio de variable, nos permite remitir el cálculo de su integral indefinida a la integral de una función trigonométrica. Presentamos a continuación esos casos.

Primer caso. Sea h una función continua. Para calcular la integral indefinida de la forma $\int h(\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x$, se hace la sustitución

$$\theta(x) = \operatorname{arcsen} x, \quad x \in (-1, 1),$$

y se reescribe la integral indefinida en la forma

$$\int h(\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x = \int h(\cos\theta(x))\,\mathrm{d}x. \tag{8.4}$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{d\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\cos\theta(x)},$$

escribimos la integral indefinida en el lado derecho de (8.4) en la forma

$$\int h(\cos\theta(x))\,\mathrm{d}x = \int h(\cos\theta(x))\cos\theta(x)\frac{d\theta}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x.$$

Aplicando la fórmula de integración por sustitución, obtenemos

$$\int h(\sqrt{1-x^2})\,\mathrm{d}x = \left(\int h(\cos\theta)\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\circ(\,\mathrm{arcsen}\,x). \tag{8.5}$$

Ejemplo 8.9. Mediante sustitución trigonométrica, obtenga la integral indefinida

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Solución. Aplicando la fórmula (8.5) se tiene

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left(\int \frac{\cos^2\theta}{\mathrm{sen}^{\,2}\theta}d\theta\right)\circ(\,\mathrm{arcsen}\,x) = -\cot(\mathrm{arcsen}\,x) - \mathrm{arcsen}\,x + c$$

y, entonces,

$$\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \mathrm{arcsen}\,x + c. \triangleleft$$

Segundo caso. Sea h una función continua. Para calcular una integral indefinida de la forma $\int h(\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x$, se hace la sustitución

$$\theta(x) = \arctan x, \quad x\in(-\infty,\infty),$$

y se reescribe la integral indefinida en la forma

$$\int h(\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x = \int h\left(\sqrt{1+\tan^2\theta(x)}\right)\mathrm{d}x = \int h(\sec\theta(x))\,\mathrm{d}x.$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{d\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{1+x^2} = \cos^2\theta(x),$$

escribimos la última integral indefinida en la forma

$$\int h(\sec\theta(x))\,\mathrm{d}x = \int h(\sec\theta(x))\sec^2\theta(x)\frac{d\theta}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x,$$

y aplicando la fórmula de integración por sustitución se tiene

$$\int h(\sqrt{1+x^2})\,\mathrm{d}x = \left(\int h(\sec\theta)\sec^2\theta d\theta\right)\circ(\arctan x). \tag{8.6}$$

Ejemplo 8.10. Calcular la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x.$

Solución. Hacemos la sustitución

$$y = \frac{x}{2}, \qquad \mathrm{d}y = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x$$

y reescribimos la integral en la forma

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{1}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2\sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x\right)\circ\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

Entonces, la antiderivada que debemos calcular es

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int h(\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x, \qquad \text{con} \qquad h(y) = \frac{1}{y(y^2-1)}.$$

Aplicando la fórmula (8.6) obtenemos

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \int h(\sqrt{x^2+1})\,\mathrm{d}x &= \left(\int \frac{\sec^2\theta}{\tan^2\theta\sec\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)\circ(\arctan x)\\ &= \left(\int \frac{\cos\theta}{\operatorname{sen}^2\theta}\,\mathrm{d}\theta\right)\circ(\arctan x) = -\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}\circ(\arctan x)\\ &= -\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} + c,\end{aligned}$$

por lo que, finalmente,

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\left(\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}x\right)\circ\left(\frac{x}{2}\right) = -\frac{\sqrt{4+x^2}}{4x} + c. \triangleleft$$

Tercer caso. Sea h una función continua. Para calcular la integral indefinida de la forma $\int h(\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x$, se hace la sustitución

$$\theta(x) = \operatorname{arcsec} x, \quad x \in (-1,1),$$

y se reescribe la integral indefinida en la forma

$$\int h(\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x = \int h(\tan\theta(x))\,\mathrm{d}x.$$

Tomando en cuenta que

$$\frac{d\theta}{\mathrm{d}x} = \frac{d \operatorname{arcsec} x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} = \frac{1}{\sec\theta(x)\tan\theta(x)},$$

escribimos la última integral indefinida en la forma

$$\int h(\tan\theta(x))\,\mathrm{d}x = \int h(\tan\theta(x))\sec\theta(x)\tan\theta(x)\frac{d\theta}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x$$

y, aplicando la fórmula de integración por sustitución, se tiene

$$\int h(\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x = \left(\int h(\tan\theta)\sec\theta\tan\theta d\theta\right)\circ(\operatorname{arcsec} x). \tag{8.7}$$

Ejemplo 8.11. Calcule la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x$ con $a>0$.

Solución. Hacemos la sustitución

$$y = \frac{1}{a}x, \qquad \mathrm{d}y = \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x,$$

y encontramos que

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{a\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}}\,\mathrm{d}x = \left(\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x\right)\circ\left(\frac{x}{a}\right).$$

Enseguida nos remitimos al cálculo de la integral indefinida $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x$, que es de la forma

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x = \int h(\sqrt{x^2-1})\,\mathrm{d}x \quad \text{con} \quad h(y) = \frac{1}{y}.$$

Aplicando la fórmula (8.7) se tiene

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\,\mathrm{d}x &= \left(\int \sec\theta\,\mathrm{d}\theta\right)\circ(\operatorname{arcsec} x)\\ &= \ln|\sec\theta+\tan\theta|\circ(\operatorname{arcsec} x)\\ &= \ln|x+\sqrt{x^2-1}|,\end{aligned}$$

y, finalmente,

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,\mathrm{d}x = \ln|x+\sqrt{x^2-a^2}| - \ln a + c. \triangleleft$$

8.2.4 Integración de funciones racionales

En esta subsección presentamos el llamado *método de fracciones parciales* para el cálculo de la integral indefinida de funciones racionales. Una función racional es una función de la forma

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)},$$

donde p y q son polinomios. La función racional r, puede reescribirse, después de aplicar el algoritmo de la división para polinomios, en la forma $r = w + s/t$, donde w, s y t son polinomios y el grado de s es menor que el grado de t. Lo anterior nos permite reducir el cálculo de la integral indefinida de funciones racionales a aquellas para las que el grado del polinomio del numerador es estrictamente menor que el grado del polinomio del denominador.

Los teoremas siguientes sobre polinomios y funciones racionales son dos resultados importantes de álgebra, que permiten resolver el problema del cálculo de antiderivadas de funciones racionales.

Teorema 8.1. *(Teorema fundamental del álgebra)* Cada polinomio $t = t(x)$ con coeficientes en los números reales se factoriza en la forma

$$\begin{aligned}t(x) = c(x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2}\cdots(x-a_s)^{m_s}\cdot\\ \cdot[(x-b_1)^2+k_1^2]^{r_1}[(x-b_2)^2+k_2^2]^{r_2}\cdots[(x-b_q)^2+k_q^2]^{r_q},\end{aligned}$$

donde

$$m_1 + m_2 \cdots + m_s + 2r_1 + \cdots + 2r_q = \text{grado de } t.$$

Note que los factores de la forma $[(x-b)^2+k^2]^{r_i}$ son polinomios de segundo grado con raíces complejas.

Teorema 8.2. Sean s y t polinomios tales que el grado de s es menor que el grado de t. Entonces la función racional $r(x) = s(x)/t(x)$ puede expresarse como suma de funciones racionales de la forma

$$\frac{e}{(x-a)^m} \quad \text{o} \quad \frac{cx+d}{[(x-b)^2+k^2]^n}, \tag{8.8}$$

donde $a, b, c, d, k, e \in \mathbb{R}$ y $m, n \in \mathbb{N}$. A las funciones (8.8) se les denomina *fracciones parciales*. Más aún, por cada factor $(x-a)^m$ del polinomio $t = t(x)$ se tienen m sumandos de la forma

$$\frac{e_1}{(x-a)} + \frac{e_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{e_m}{(x-a)^m},$$

y cada uno de los términos de la forma $[(x-b)^2+k^2]^n$ da lugar a n sumandos de la forma

$$\frac{c_1x+d_1}{[(x-b)^2+k^2]} + \frac{c_2x+d_2}{[(x-b)^2+k^2]^2} + \cdots + \frac{c_nx+d_n}{[(x-b)^2+k^2]^n}.$$

Basado en la descomposición anterior, el teorema siguiente caracteriza la integral indefinida de toda función racional.

Teorema 8.3. La integral indefinida de una función racional es una suma de funciones de la forma

$$\int \frac{s(x)}{t(x)}\,\mathrm{d}x = u(x) + a\ln v(x) + b\arctan w(x) + c$$

donde u, v y w son funciones racionales y $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Demostración. Tomando en cuenta que toda función racional se puede expresar como suma de fracciones parciales de la forma $\dfrac{a}{(x-b)^m}$ y $\dfrac{cx+d}{[(x-e)^2+k^2]^n}$ donde m y n son números naturales y a, b, c, d, e, k son constantes reales, la integral indefinida de esas funciones se reduce al cálculo de la integral indefinida de las fracciones parciales. Para la evaluación de $\displaystyle\int \frac{a}{(x-b)^m}\,\mathrm{d}x$ se tiene, directamente por sustitución,

$$\int \frac{a}{(x-b)^m}\,\mathrm{d}x = \begin{cases} a\ln|x-b| & \text{si } m = 1, \\[2ex] \dfrac{a}{(1-m)(x-b)^{m-1}} & \text{si } m > 1. \end{cases}$$

El cálculo de la integral indefinida para los términos de la forma

$$\frac{cx+d}{[(x-e)^2+k^2]^n}$$

se reduce a calcular primitivas para funciones racionales de la forma

$$\frac{1}{[(x-e)^2+k^2]^n} \quad \text{o} \quad \frac{x-e}{[(x-e)^2+k^2]^n}.$$

Para el cálculo de la integral indefinida de las funciones de forma

$$\frac{1}{[(x-e)^2+k^2]^n},$$

se procede definiendo las integrales

$$I_n = \int \frac{1}{[(x-e)^2+k^2]^n}\,\mathrm{d}x, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

las cuales se calculan recursivamente mediante las fórmulas

$$I_1 = \frac{1}{k^2}\arctan\left(\frac{x-e}{k}\right)$$

$$I_n = \frac{1}{2k^2(n-1)}\left[(2n-3)I_{n-1} + \frac{x-e}{[(x-e)^2+k^2]^{n-1}}\right], \quad n = 2, 3, 4, \ldots$$

Finalmente, la integral indefinida de las fracciones parciales de la forma

$$\frac{x-e}{[(x-e)^2+k^2]^n}$$

se calcula directamente sustituyendo $y = (x-e)^2 + k^2$, $\mathrm{d}y = 2(x-e)\,\mathrm{d}x$, para obtener

$$\int \frac{x-e}{[(x-e)^2+k^2]^n}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2(1-n)}\frac{1}{[(x-e)^2+k^2]^{n-1}}. \triangleleft$$

Ejemplo 8.12. La integral indefinida de la función racional $r(x) = \dfrac{1}{x^3+1}$ se calcula con la descomposición en fracciones parciales

$$\frac{1}{x^3+1} = \frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{e}{x+1} + \frac{cx+d}{x^2-x+1},$$

donde $c = -1/3, \quad d = 2/3, \quad e = 1/3.$

Por tanto,

$$\int \frac{1}{x^3+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{-1}{3}\int \frac{x-2}{x^2-x+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln(x^2-x+1) + \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt{3}}\right) + c. \triangleleft$$

Ejercicios y problemas del capítulo

Concepto de antiderivada

8.2.1. Encuentre una antiderivada de la función $f(x) = x\mathrm{e}^x$, ensayando con funciones de la forma $y(x) = ax\mathrm{e}^x + b\mathrm{e}^x$.

8.2.2. Calcule las integrales indefinidas siguientes:

$$\text{(a)} \int |x|\,\mathrm{d}x; \quad \text{(b)} \int (|x-1| + |2x+1|)\,\mathrm{d}x; \quad \text{(c)} \int \sum_{k=1}^{n} a_k x^k\,\mathrm{d}x.$$

8.2.3. Verifique las fórmulas para las integrales indefinidas de las funciones racionales siguientes:

(a) $$\int \frac{1}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \arctan x + c$$

(b) $$\int \frac{x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \ln\sqrt{x^2+1} + c$$

(c) $$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\arctan x + \frac{x}{x^2+1}\right) + c$$

(d) $$\int \frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\frac{1}{x^2+1} + c$$

(e) $$\int \frac{1}{a\,\mathrm{sen}\,x + b\cos x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| + c.$$

Interpretación geométrica de la antiderivada

8.2.4. *Dibuje la gráfica de las funciones que forman la integral indefinida de la función cuya gráfica aparece en la figura 8.1.

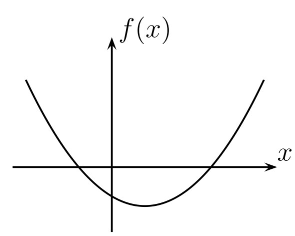

Figura 8.1:

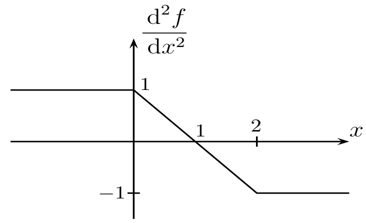

Figura 8.2:

8.2.5. *Dibuje la gráfica de la función f si f es continua, $f(1) = 0$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = 1$ y la gráfica de $\frac{d^2 f}{\mathrm{d}x^2}$ es la que se muestra en la figura 8.2.

Métodos de integración

8.2.6. Aplicando el método de integración por sustitución, encuentre las integrales indefinidas siguientes:

$(a)\quad \int x\sqrt{25 + x^2}\,\mathrm{d}x; \qquad (b)\quad \int \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x; \qquad (c)\quad \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})^2}.$

8.2.7. Aplicando el método de integración por partes, calcule las integrales indefinidas siguientes:

$(a)\quad \int \operatorname{arcsen} x\,\mathrm{d}x; \qquad (b)\quad \int \ln x\,\mathrm{d}x; \qquad (c)\quad \int x^2 \operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x.$

8.2.8. Aplicando el método de fracciones parciales, encuentre las integrales indefinidas siguientes:

$(a)\quad \int \frac{x^2+1}{x^3+8}\,\mathrm{d}x; \qquad (b)\quad \int \frac{x}{(x^2-x+1)^2}\,\mathrm{d}x;$

$(c)\quad \int \frac{1}{x^4-a^4}\,\mathrm{d}x; \qquad (d)\quad \int \frac{1}{\mathrm{e}^{2x}-4\mathrm{e}^{x}+4}\,\mathrm{d}x.$

8.2.9. Haciendo sustituciones trigonométricas, calcule las integrales indefinidas siguientes:

$(a)\quad \int \frac{x^2}{(x^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x; \qquad (b)\quad \int x^3\sqrt{9-x^2}\,\mathrm{d}x; \qquad (c)\quad \int \frac{\sqrt{x^2-16}}{x^2}\,\mathrm{d}x.$

Antiderivadas diversas

8.2.10. Calcule las antiderivadas siguientes:

(a) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$; (b) $\displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\operatorname{sen} b\,x\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int x\operatorname{sen} x\,\mathrm{d}x$; (d) $\displaystyle\int x^3\operatorname{sen}(x^2)\,\mathrm{d}x$;

(e) $\displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int x\tan^2 x\,\mathrm{d}x$; (h) $\displaystyle\int \frac{x^2-x+4}{(x^2-1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$;

(i) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}\,\mathrm{d}x$; (j) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(k) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2+x^4}\,\mathrm{d}x$; (l) $\displaystyle\int x^a\ln x\,\mathrm{d}x$;

(m) $\displaystyle\int x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$; (n) $\displaystyle\int x^a(\ln x)^m\,\mathrm{d}x,\quad m\in\mathbb{Z}$;

(o) $\displaystyle\int \frac{1}{x+x^n}\,\mathrm{d}x,\quad n\in\mathbb{Z}-\{1\}$; (p) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^2+c}}\,\mathrm{d}x$.

8.2.11. Calcule las antiderivadas siguientes:

(a) $\displaystyle\int \frac{x^m}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x,\quad m\in\mathbb{Z}$; (b) $\displaystyle\int \sqrt{1-\operatorname{sen} x}\,\mathrm{d}x$;

(c) $\displaystyle\int (x^6+x^3)\sqrt[3]{x^3+2}\,\mathrm{d}x$; (d) $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(\ln x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$;

(e) $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$; (f) $\displaystyle\int \tan^4(\pi x)\,\mathrm{d}x$;

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x^{\frac{1}{3}}-1}\,\mathrm{d}x$; (h) $\displaystyle\int \sqrt{1-\operatorname{sen} 2x}\,\mathrm{d}x$;

(i) $\displaystyle\int \frac{x^3}{x^8-2}\,\mathrm{d}x$; (j) $\displaystyle\int \frac{1}{x\ln x\ln(\ln x)}\,\mathrm{d}x$;

(k) $\displaystyle\int 3^x\cdot 5^x\,\mathrm{d}x$; (l) $\displaystyle\int \left(1-\frac{1}{x^2}\right)\sqrt{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(m) $\displaystyle\int x^5(2-5x^3)^{2/3}\,\mathrm{d}x$; (n) $\displaystyle\int \sqrt{\frac{x-a}{x+a}}\,\mathrm{d}x$;

(o) $\displaystyle\int \operatorname{sen}(\ln x)\,\mathrm{d}x$; (p) $\displaystyle\int \frac{x\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(q) $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x-1}}\,\mathrm{d}x$.

8.2.12. Mediante el cálculo de la integral indefinida de la función g, encuentre la función f tal que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)=g(x)$$

y que, además, satisfaga la condición señalada a la derecha, para los casos siguientes:

(a) $g:(-3,\infty)\to\mathbb{R},\quad g(x)=\dfrac{1}{x+3}\quad$ y $\quad f(0)=1$.

(b) $g : (1, \infty) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \dfrac{x^2 + 5x + 6}{x - 1}$ y $f(2) = 0$.

(c) $g : \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right) \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \tan x$ y $f(0) = 0$.

8.2.13. Deduzca las fórmulas siguientes:

(a) $\displaystyle\int \cos^n x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \operatorname{sen} x + \frac{n+1}{n} \int \cos^{n-2} x \, \mathrm{d}x,$
donde n es un número natural.

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{\operatorname{sen}^n x} \, \mathrm{d}x = \frac{-\cos x}{(n-1) \operatorname{sen}^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\operatorname{sen}^{n-2} x} \, \mathrm{d}x,$
donde $n > 2$ es un número entero.

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^n x} \, \mathrm{d}x = \frac{\operatorname{sen} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-2}{n-1} \int \frac{1}{\cos^{n-2} x} \, \mathrm{d}x,$
donde $n > 2$ es un número entero.

8.2.14. *Sean p y q polinomios con coeficientes reales y grado de $p <$ grado de q. Supongamos que q sólo tiene raíces reales, es decir, que se puede factorizar en la forma

$$q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n)$$

con $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, de tal manera que la descomposición en fracciones parciales de la función racional p/q es de la forma

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1}{(x - a_1)} + \frac{A_2}{(x - a_2)} + \cdots + \frac{A_n}{(x - a_n)}.$$

(a) Demuestre que

$$A_k = \frac{p(a_k)}{\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}x}(a_k)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots, n.$$

Esto nos da un método para el cálculo de las constantes A_k en la descomposición en fracciones parciales cuando el denominador q se puede factorizar como un producto de factores lineales.

(b) Haciendo uso del resultado obtenido en 8.2.14, calcule la integral indefinida

$$\int \frac{3x^2 + x + 2}{(x^2 - 1)(x^2 + 5x + 6)} \, \mathrm{d}x.$$

8.2.15. *Haciendo la sustitución $y^2 = \dfrac{x - a}{x - b}$, calcule la integral indefinida

$$\int \sqrt{(x - a)(x - b)} \, \mathrm{d}x.$$

8.2.16. *Encuentre un polinomio de segundo grado p tal que $p(0) = 1$ y

$$\int \frac{p(x)}{x^3(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$$

sea una función racional.

8.2.17. *Determine $\displaystyle\int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$