Capítulo 7

La función exponencial y sus aplicaciones

Así como introducimos algunas familias de funciones elementales recurriendo a relaciones de carácter algebraico, geométrico o trigonométrico, hay algunas funciones cuya presentación es más natural a partir de la ley de cambio o de movimiento que satisfacen. Un ejemplo relevante es el caso de la llamada función exponencial, que se define como aquella función f cuya derivada en cada punto es igual al valor de la función en ese mismo punto,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = f(x),$$

y además su valor en $x = 0$ es $f(0) = 1$.

En las aplicaciones, distintos fenómenos y modelos dinámicos involucran funciones cuya razón de cambio en cada punto depende proporcionalmente del valor de la función en ese punto. Como ejemplos más destacados, se tienen los llamados fenómenos de difusión de calor o de epidemias y los de desintegración y decaimiento. En este capítulo, basados en lo que hemos estudiado sobre las funciones derivables, presentamos estos modelos y las propiedades de las funciones exponenciales y sus inversas.

7.1 La función exponencial

Analicemos las propiedades principales de las funciones que satisfacen la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = f(x). \tag{7.1}$$

Primero es necesario establecer la existencia de soluciones de la ecuación diferencial (7.1) distintas de la solución $f(x) = 0$, denominada *solución trivial.*

Esto constituye el enunciado del llamado *teorema de existencia de ecuaciones diferenciales* cuya demostración está más allá del alcance de este texto. En vista de lo anterior, supondremos de antemano la existencia de soluciones de la ecuación diferencial (7.1), definidas en todo $\mathbb{R}$ y distintas de la trivial. Bajo la suposición anterior, deduciremos las principales propiedades de esas funciones y a partir de ellas daremos su forma explícita, que nos permitirá calcular su valor en cada punto de $\mathbb{R}$.

Proposición 7.1. El conjunto de todas las funciones definidas en $\mathbb{R}$ que satisfacen la ecuación diferencial (7.1) tiene las propiedades siguientes:

(a) Existe una solución de (7.1) distinta de la solución trivial $f(x) = 0$ para $x \in \mathbb{R}$.

(b) Si f_1 y f_2 satisfacen la ecuación (7.1), entonces también la satisface toda función de la forma $h = af_1 + f_2$ con $a \in \mathbb{R}$.

(c) Si f satisface (7.1) y $f(x_0) = 0$ para algún punto $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces $f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

(d) Si f_1 y f_2 satisfacen (7.1) y $f_1(x_0) = f_2(x_0)$ para algún punto x_0, entonces $f_1(x) = f_2(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. (Unicidad de soluciones de (7.1).)

Demostración. La validez de (a) es consecuencia del teorema de existencia para ecuaciones diferenciales. Para probar (b), nótese que

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(af_1(x) + f_2(x)) = a\frac{df_1}{\mathrm{d}x}(x) + \frac{\mathrm{d}f_2}{\mathrm{d}x}(x)\\ &= af_1(x) + f_2(x) = h(x).\end{aligned}$$

Lo anterior nos permite afirmar que si f es la solución a (7.1) con $f(0) = 1$, entonces la función $h = af$ será solución de (7.1) con $h(0) = a$.

Para demostrar (c), consideremos primero los puntos $x \in \mathbb{R}$ con $|x - x_0| < 1$. Aplicando el teorema del valor medio a la función solución f en el intervalo $[x_0, x]$, se tiene

$$f(x) = f(x) - f(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_1)(x - x_0) = f(x_1)(x - x_0), \tag{7.2}$$

con $x_0 < x_1 < x$.

Aplicando de nuevo el teorema del valor medio a la misma función f en el intervalo $[x_0, x_1]$, obtenemos

$$f(x_1) = f(x_1) - f(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_2)(x_1 - x_0) = f(x_2)(x_1 - x_0), \tag{7.3}$$

con $x_0 < x_2 < x_1$.

Sustituyendo (7.3) en (7.2) se obtiene que

$$f(x) = f(x_2)(x_1 - x_0)(x - x_0).$$

Repitiendo este argumento k veces, encontramos puntos $x_1, x_2, \ldots, x_k$, tales que $x_0 < x_i < x$ para $i = 1, \ldots, k$ y

$$f(x) = f(x_k)(x_{k-1} - x_0)(x_{k-2} - x_0)\cdots(x_1 - x_0).$$

Tomando valor absoluto, se tiene

$$|f(x)| \leqslant M|x - x_0|^{k-1},$$

donde M es una cota para f en el intervalo $[x_0, x]$, la cual existe pues hemos supuesto que f tiene derivada en ese intervalo y por tanto es continua y está acotada en $[x_0, x]$. Como $|x - x_0| < 1$ se tendrá que $|x - x_0|^k \to 0$ cuando $k \to \infty$, por lo que $f(x) = 0$ para cada x con $|x - x_0| < 1$, y por la continuidad de f en $\mathbb{R}$, se tendrá que $f(x_0 + 1) = 0$. Repitiendo los argumentos anteriores y cambiando el punto x_0 por el punto $x_0 + 1$, también probamos que $f(x) = 0$ en $[x_0, x_0 + 2]$. Prosiguiendo de esta forma, concluimos que $f(x) = 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$.

Para la prueba de (d), observemos que la función $h = f_1 - f_2$ es también, en virtud de (b), solución de (7.1) y se anula en el punto x_0, luego, como consecuencia de (c), se tiene $f_1(x) = f_2(x)$ para toda $x \in \mathbb{R}$. $\triangleleft$

Nota Importante. *Conjuntamente, los incisos (b), (c) y (d) de la proposición 7.1 aseguran que cada solución no trivial de (7.1) genera todas las soluciones al multiplicarse por un número real arbitrario. Por otra parte, si f es solución de (7.1), su función derivada $\dfrac{df}{dx}$ también lo es.*

A partir de la proposición 7.1, damos la definición siguiente:

Definición 7.1. A la única solución de (7.1) tal que $f(0) = 1$ se le llama *función exponencial* y su valor en el punto $x \in \mathbb{R}$ lo denotaremos por $\exp x$. El valor $\exp 1$ se denota con e, notación introducida por Leonhard Euler.

Proposición 7.2. *(Propiedades de la función exponencial)*

(a) La función exponencial es siempre mayor que cero, monótona creciente y cóncava hacia arriba.

(b) La función exponencial tiene las propiedades siguientes:

(i) $\exp(x + x_0) = \exp x_0 \exp x$ para cualesquiera $x, x_0 \in \mathbb{R}$.

(ii) Para cada $x \in \mathbb{R}$ se tiene

$$\exp x = \lim_{k\to\infty}\left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{k!}x^k\right).$$

(iii) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^k}{\exp x} = 0$, para cada k natural.

Demostración. El enunciado en (a) es verdadero ya que por la proposición 7.1, ninguna solución de (7.1) distinta de cero en un punto puede anularse en punto alguno y, por tanto, si $f(0) = 1$ se tiene $f(x) > 0$ para toda x. Por otro lado, dado que la función exponencial es igual a su derivada, ésta también será siempre positiva y por consiguiente f es una función creciente. Finalmente, la segunda derivada también será positiva y entonces la gráfica de f sera cóncava hacia arriba, como se muestra en la figura 7.1.

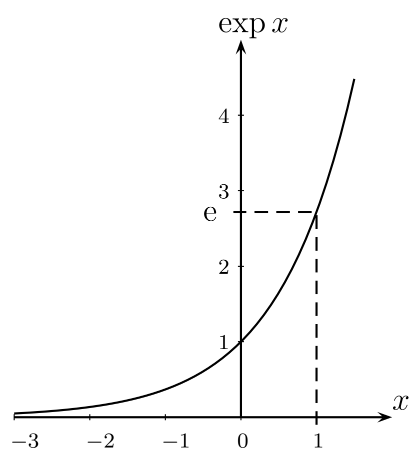

Figura 7.1: La función exponencial $f(x) = \exp x$

Para probar (i), tenemos que para cada x_0, la función $g(x) = \exp(x + x_0)$ es también solución de (7.1), ya que aplicando la regla de la cadena se tiene

$$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{d}{dx}\exp(x + x_0) = \exp(x + x_0) = g(x)$$

y, además, $g(0) = \exp x_0$. Como la función $\exp x_0 \exp x$, en virtud de lo demostrado en (b) de la proposición 7.1, es también solución de (7.1) y coincide con g en el punto x_0, por la unicidad de soluciones con un mismo valor en un punto dado, tendremos

$$g(x) = \exp(x + x_0) = \exp x_0 \exp x \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R}.$$

La prueba de (*ii*) se sigue del hecho de que cada solución de (7.1) tiene derivadas de todos los órdenes, y entonces, escribiendo su desarrollo de Taylor de orden n alrededor de $x = 0$, se tiene

$$\exp x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + R_n(x),$$

con

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!} \exp x_c |x|^{n+1},$$

donde $x_c \in [-x, x]$. Por otro lado, al ser $\exp x$ una función continua en $[-x, x]$, existe $M > 0$ tal que $\exp y < M$ para toda $y \in [-x, x]$. Entonces, para cada etiqueta n,

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M}{n!}|x|^{n+1}$$

y

$$\left| \exp x - \left(1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n\right)\right| \leqslant \frac{M}{n!}|x|^{n+1}.$$

Por otro lado, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\frac{|x|^{n+1}}{n!}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero, ya que $a_{n+1} = \frac{|x|}{n+1}a_n$ para toda n, y entonces para toda etiqueta n tal que $n + 1 > 2|x|$, se tendrá

$$a_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}a_n.$$

Por tanto, la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a zero. Tomando en cuenta lo anterior, se tiene

$$\exp x = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k,$$

y con ello se prueba (*ii*). Para demostrar (*iii*), usamos la segunda regla de L'Hospital como sigue.

Para $k = 1$, se tiene

$$\lim_{x\to\infty} x = \lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}\exp x}{\mathrm{d}x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\exp x} = 0,$$

luego, por la segunda regla de L'Hospital, se tiene que $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp x} = 0$.

Análogamente, para $k = 2$, tenemos

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}(x) = \lim_{x\to\infty} \exp x = \infty$$

y

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2x}{\exp x} = 2 \lim_{x\to\infty} \frac{x}{\exp x} = 0,$$

por el caso anterior. Luego, aplicando nuevamente la regla de L'Hospital, se obtiene $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{\exp x} = 0$. Repitiendo este argumento k veces, podemos afirmar que para todo $k \in \mathbb{N}$ se tiene $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^k}{\exp x} = 0$. $\triangleleft$

Nota Importante. *(a) La interpretación geométrica de la propiedad (iii) de la proposición 7.2 es que la función exponencial crece más rápidamente que cualquier potencia de x cuando $x \to \infty$.*

(b) De (i) de la proposición 7.2 se sigue que $\exp n = (\exp 1)^n$ *para cada $n \in \mathbb{N}$, y que*

$$\exp\left(\frac{n}{m}\right) = (\exp 1)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(\exp 1)^n} \text{ para cualesquiera } n, m \in \mathbb{N}.$$

(c) De (ii) se tiene que $\mathrm{e} = \exp 1 = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$.

(d) Tomando en cuenta que la función exponencial comparte varias propiedades con la operación exponenciación, se acostumbra denotarla también con el símbolo e^x; es decir,

$$\mathrm{e}^x \stackrel{\text{def}}{=} \exp x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.2 La función logaritmo natural

La función exponencial tiene función inversa definida en el conjunto de los reales positivos. A su función inversa se le llama *función logaritmo natural* y se denota

$$\ln : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad \ln x = \exp^{-1} x.$$

La función $\ln x$ tiene las propiedades siguientes:

(i) $\ln(xy) = \ln x + \ln y$

(ii) $\dfrac{\mathrm{d}\ln}{\mathrm{d}x}(x) = \dfrac{1}{x}$

(iii) Es creciente y cóncava hacia abajo en toda la semirrecta $(0, \infty)$

(iv) $\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \cdots (-1)^{k-1}\frac{1}{k}x^k + R_k(x)$.

con $R_k(x) = (-1)^k(1+x_c)^{-k-1}(x-x_c)^k x$, donde $x_c \in (0, x)$.

La gráfica de la función $f(x) = \ln x$ se muestra en la figura 7.2.

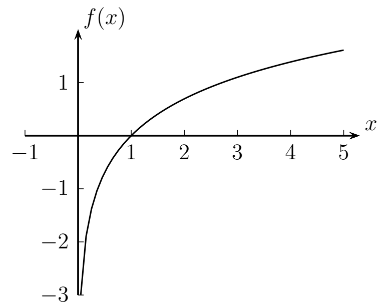

Figura 7.2: La función logaritmo natural $f(x) = \ln x$

Nota Importante. *En la propiedad (iv), el residuo R_k tiende a cero cuando $k \to \infty$ para $x \in (-1, 0)$ y la sucesión de sumas converge al valor de* $\ln(1+x)$. *Por otro lado, tomando en cuenta que* $\ln x = -\ln \frac{1}{x}$, *se concluye que la fórmula representa el logaritmo natural para todo punto de su dominio.*

7.3 Funciones de tipo exponencial

En general, se definen las *funciones de tipo exponencial* como aquellas de la forma

$$f(x) = \exp a(x) = e^{a(x)},$$

donde a es una función derivable.

Entre las funciones de tipo exponencial se distinguen las siguientes:

(a) $x^r : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x^r \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{r \ln x}$, para cada $r \in \mathbb{R}$.

(b) $a^x : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad a^x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{x \ln a}$, para cada $a > 0$.

(c) $x^x : (0, \infty) \to \mathbb{R}, \quad x^x \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{x \ln x}$.

(d) En general, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son funciones derivables y $f(x) > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$, se define $f^g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mediante $f^g(x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathrm{e}^{g(x) \ln f(x)}$.

7.4 Aplicaciones de la función exponencial

En este apartado presentamos tres ejemplos relevantes de leyes dinámicas que dan lugar a comportamientos de tipo exponencial.

Ejemplo 7.1. *(Dinámica de poblaciones)* Denotemos por $p = p(t)$ la función que representa el tamaño de una población en el tiempo t, y de forma simplificada, supongamos una tasa β de crecimiento constante, es decir, cada 100 unidades de población dan lugar por reproducción a β nuevas unidades de población por unidad de tiempo. Supongamos además una política de remoción que consista en retirar (por muertes o emigraciones) de la población en el tiempo t un total de $g(t)$ unidades de población por unidad de tiempo. En este caso la ley de cambio de la población toma la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) = \alpha p(t) - g(t) \quad \text{con} \quad \alpha = \frac{\beta}{100}.$$

Si la razón de retiro es constante, $g(t) = \rho$, describa la evolución de la población a partir de la población inicial. Calcule el tiempo que llevará para que la población inicial se duplique.

Solución. Para buscar la solución $p = p(t)$ de la ecuación $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) = \alpha p(t) - \rho$, podemos multiplicar ambos lados de la ecuación por el *factor integrante* $\mathrm{e}^{-\alpha t}$,

$$\mathrm{e}^{-\alpha t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}p(t) - \mathrm{e}^{-\alpha t}p(t) = -\mathrm{e}^{-\alpha t}\rho,$$

lo cual nos permite reescribir la ecuación en la forma

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathrm{e}^{-\alpha t}p(t)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\rho}{\alpha}\mathrm{e}^{-\alpha t},$$

de donde se obtiene

$$p(t) = c\mathrm{e}^{\alpha t} + \frac{\rho}{\alpha},$$

con

$$c = p(0) - \frac{\rho}{\alpha}.$$

Entonces

$$p(t) = \left(p(0) - \frac{\rho}{\alpha}\right)\mathrm{e}^{\alpha t} + \frac{\rho}{\alpha}. \tag{7.4}$$

Existen tres escenarios para el comportamiento de la población.

(a) Si $p(0) - \rho/\alpha > 0$ entonces la población crecerá exponencialmente y se duplicará en un tiempo t_0 dado por $t_0 = \dfrac{1}{\alpha} \ln \dfrac{2p(0) - \rho/\alpha}{p(0) - \rho/\alpha}$. Por ejemplo, supongamos que inicialmente hay 10 individuos ($p_0 = 10$) y que la tasa de reproducción es $\beta = 20$. Si la razón de retiro es $\rho = 1$, entonces la población en el tiempo t es $p(t) = 5\mathrm{e}^{0.2t} + 5$ y el instante en que se duplica es $t_0 = 5 \ln 3$. Ver la figura 7.3(a).

(b) Si $p(0) - \rho/\alpha = 0$, la población es constante, $p(t) = \rho/\alpha$. Por ejemplo, si la población inicial y la tasa de reproducción se mantienen en $p_0 = 10$ y $\beta = 20$ pero la razón de retiro aumenta a $\rho = 2$, entonces la población se mantendrá constante, $p(t) = p(0) = 10$. Ver la figura 7.3(b).

(c) Si $p(0) - \rho/\alpha < 0$ la población se extinguirá en un tiempo finito $t_0 = \dfrac{1}{\alpha} \ln \dfrac{\rho/\alpha}{\rho/\alpha - p(0)}$. Por ejemplo, si la tasa de retiro ρ sobrepasa el valor 2, digamos $\rho = 3$, entonces $p(0) - \rho/\alpha = -5$. En este caso, la población en cada instante t está dada por $p(t) = -5(\mathrm{e}^{0.2t} - 3)$ y se extinguirá cuando $t_0 = 5 \ln 3$. Ver la figura 7.3(c). $\triangleleft$

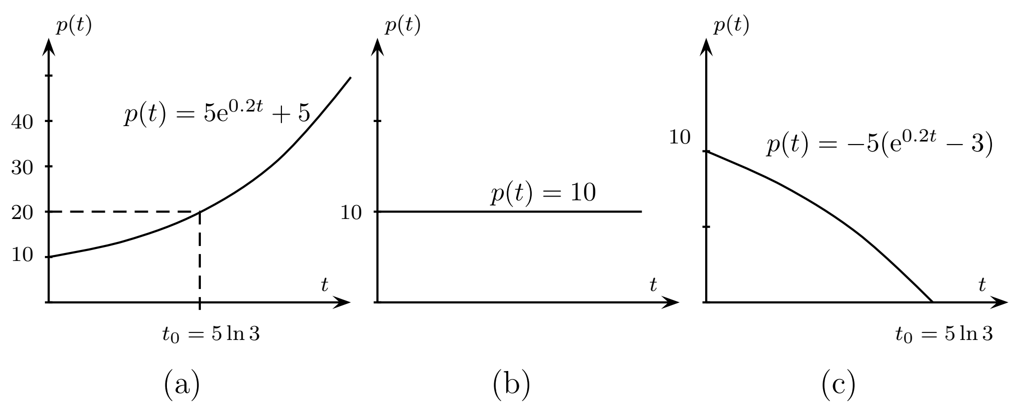

Figura 7.3: Comportamientos posibles de la función exponencial (7.4)

Ejemplo 7.2. *(Ley de enfriamiento de Newton*[1]*)* Es un hecho conocido que la temperatura de un cuerpo de material homogéneo situado en un medio a temperatura constante, experimenta un proceso de enfriamiento o calentamiento que a la larga lo lleva a adquirir la misma temperatura del medio ambiente. La rapidez con la cual tiene lugar el enfriamiento o calentamiento es proporcional en cada tiempo a la diferencia entre la temperatura del cuerpo en ese instante y la temperatura del medio ambiente. A este hecho físico se

[1]Por Isaac Newton (1642-1717), matemático inglés mencionado en el capítulo primero.

le conoce como *ley de enfriamiento de Newton*. Nuestro problema consiste en deducir, a partir de esa ley, la temperatura del cuerpo como función del tiempo conocidas las temperaturas iniciales del cuerpo y del medio, así como la constante de difusión térmica del material que forma el cuerpo en cuestión. Si la temperatura inicial del cuerpo es tres veces mayor que la temperatura ambiente, ¿en qué tiempo será el doble de la del medio ambiente?

Solución. Si denotamos por $T = T(t)$ la función de temperatura del cuerpo en el tiempo t, por T_m la temperatura del medio ambiente, y si $\rho > 0$ es la constante de difusión térmica del material, la ley de enfriamiento estipula que

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}(t) = \rho(T_m - T(t)).$$

Introduzcamos la función $f(t) = T(t) - T_m$; entonces f satisface la ecuación

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(t) = -\rho f(t),$$

cuyas soluciones son de la forma

$$f(t) = f(0)\exp(-\rho t).$$

Entonces, en términos de la función $T(t)$, tendremos

$$T(t) = T_m + (T(0) - T_m)\exp(-\rho t). \tag{7.5}$$

De la fórmula (7.5) se deduce que si la temperatura inicial del cuerpo, $T(0)$, es mayor que la temperatura del medio ambiente, aquélla decrecerá exponencialmente con el paso del tiempo y tenderá al valor T_m de la temperatura ambiente. Por ejemplo, si $T(0) = 3T_m$, de (7.5) tendremos que $T(t) = 2T_m$ si

$$2T_m = T_m + 2T_m\exp(-\rho t).$$

Luego, el tiempo t_0 en el cual la temperatura del cuerpo será el doble de la temperatura del medio ambiente es

$$t_0 = -\frac{1}{\rho}\ln\frac{1}{2}. \triangleleft$$

Ejemplo 7.3. *(Ecuación logística)* En la naturaleza, la dinámica de una población está determinada básicamente por su tasa de crecimiento, que en general depende tanto de la especie misma como de las limitantes del medio representadas por la disponibilidad de alimentos y la existencia de depredadores. Si suponemos que no existen depredadores y el medio sólo puede sostener a un número fijo L de unidades de población, se considera entonces que la tasa α de crecimiento es una función del tiempo $\alpha(t)$ directamente proporcional a la diferencia entre la máxima población sustentable L y la población existente en el tiempo t, es decir

$$\alpha(t) = k(L - p(t)),$$

donde k es una constante. En este caso, la dinámica de crecimiento de la población $p = p(t)$ es gobernada por la ecuación diferencial

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t}(t) = \beta\left(1 - \frac{p(t)}{L}\right)p(t), \tag{7.6}$$

donde $\beta = \dfrac{Lk}{100}$. A la ecuación anterior se le llama *ecuación logística.*

Se puede verificar (vea el ejercicio 7.4.18) que la función

$$p(t) = \frac{Lp(0)}{p(0) + (L - p(0))e^{-kt}}$$

es solución de la ecuación (7.6). Note que $\lim_{t\to\infty} p(t) = L$; por esta razón, en el modelo (7.6), el número L se interpreta como la máxima población sustentable por el medio. $\lhd$

Ejercicios y problemas del capítulo

Propiedades de funciones exponenciales y logarítmicas

7.4.1. Encuentre, en términos de la función exponencial, la función f tal que $f(0) = 2$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = af(x)$, con $a \in \mathbb{R}$.

7.4.2. Usando las propiedades de las funciones exponenciales, derive las siguientes fórmulas y propiedades.

(*a*) $\dfrac{\mathrm{d}x^r}{\mathrm{d}x}(x) = rx^{r-1}$; (*b*) $\dfrac{\mathrm{d}a^x}{\mathrm{d}x}(x) = (\ln a)a^x, \quad a > 0$;

(*c*) $\dfrac{\mathrm{d}x^x}{\mathrm{d}x}(x) = (1 + \ln x)x^x$;

(*d*) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x)^{g(x)})(x) = \left(\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\ln f(x) + \dfrac{g(x)}{f(x)}\right)f(x)^{g(x)}, \quad f(x) > 0.$

7.4.3. Encuentre el número real α tal que la curva $f(x) = \mathrm{e}^x$ es tangente a la curva $g(x) = \alpha x^2$.

7.4.4. Aplicando el teorema del valor medio, pruebe que $\mathrm{e}^\pi > \pi^\mathrm{e}$.

7.4.5. *Funciones hiperbólicas.* La función exponencial e^x se descompone como suma de las funciones $\cosh x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ y $\operatorname{senh} x \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$. A la función $\operatorname{senh} x$ se le llama *seno hiperbólico de* x y a la función $\cosh x$ se le llama *coseno hiperbólico de* x. Pruebe las afirmaciones siguientes:

(a) $\cosh x$ es una función par y $\operatorname{senh} x$ es una función impar.

(b) $\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1$.

(c) $\dfrac{\mathrm{d}\cosh x}{\mathrm{d}x} = \operatorname{senh} x$ y $\dfrac{\mathrm{d}\operatorname{senh} x}{\mathrm{d}x} = \cosh x$.

(d) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \operatorname{senh} x \operatorname{senh} y$,

$\operatorname{senh}(x+y) = \operatorname{senh} x \cosh y + \operatorname{senh} y \cosh x$.

7.4.6. Se definen las funciones

$$\tanh = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x}, \quad \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x}, \quad \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x}.$$

Derive las fórmulas siguientes:

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh x = \operatorname{sech}^2 x$; (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\coth x = -\operatorname{csch}^2 x$;

(c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sech} x = -\operatorname{sech} x \tanh x$; (d) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{csch} x = -\operatorname{csch} x \coth x$.

7.4.7. Diga en qué intervalo real las funciones $\cosh x$, $\operatorname{senh} x$ y $\tanh x$ son uno a uno y demuestre que sus funciones inversas, denotadas por $\cosh^{-1} x$, $\operatorname{senh}^{-1} x$ y $\tanh^{-1} x$, respectivamente, tienen las expresiones siguientes:

(a) $\cosh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$ para $x \geqslant 1$.

(b) $\operatorname{senh}^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ para $x \in \mathbb{R}$.

(c) $\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$ para $-1 < x < 1$.

7.4.8. Deduzca las fórmulas siguientes para la derivada de las funciones inversas de las funciones trigonométricas hiperbólicas.

(a) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{senh}^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$, $x \in \mathbb{R}$; (b) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cosh^{-1} x = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $x > 1$;

(c) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\tanh^{-1} x = \dfrac{1}{1-x^2}$, $x \in (-1,1)$; (d) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\operatorname{sech}^{-1} x = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$, $x \in (0,1)$.

7.4.9. Muestre que las funciones $\cosh kx$ y $\operatorname{senh} kx$ satisfacen ambas la ecuación diferencial $\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}(x) - k^2 y(x) = 0$.

7.4.10. A partir de la función exponencial, encuentre una función de la forma $h(x) = \exp(f(x))$ tal que $\dfrac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(x) = xh(x)$.

7.4.11. Deduzca las fórmulas para las derivadas siguientes:

$$(a) \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\ln x); \quad (b) \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\ln\frac{1}{x}\right); \quad (c) \quad \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(\ln(1-x)).$$

7.4.12. *Resuelva la ecuación $4^x + 6^{x^2} = 5^x + 5^{x^2}$.

7.4.13. (a) *Sea g una función real y derivable con $g(x) \neq 0$ en el intervalo (a,b). Demuestre la fórmula siguiente:

$$\frac{\mathrm{d}\ln|g(x)|}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{1}{g(x)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x), \quad x \in (a,b).$$

(b) *Aplicando la fórmula obtenida en el inciso anterior y las propiedades del logaritmo, pruebe que si la función g tiene la forma

$$g = g_1 \cdot g_2 \cdot \ldots \cdot g_n,$$

con g_i derivable para $i = 1, \ldots, n$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = g(x)\left(\frac{\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}x}(x)}{g_1(x)} + \frac{\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}x}(x)}{g_2(x)} + \cdots + \frac{\frac{\mathrm{d}g_n}{\mathrm{d}x}(x)}{g_n(x)}\right).$$

(c) *Aplicando la fórmula del inciso anterior, calcule $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)$ para

$$g(x) = (x-1)(x-2)(x-3).$$

7.4.14. *Pruebe que para cualesquiera $x, y \in (0,1)$ se tiene

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^{x+y} \leq x^x y^y.$$

Aplicaciones elementales

7.4.15. El azúcar se diluye en agua a una velocidad proporcional a la cantidad que queda por diluirse. Si se tenían 50 Kg de azúcar inicialmente y después de 5 horas sólo restan sin diluirse 20 Kg, ¿cuánto tiempo más se necesita para que se diluya el 90% del total de azúcar inicial?

7.4.16. Sea $x \geqslant 0$ y n un número natural. Aplicando el teorema del valor medio, muestre que

$$\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \frac{nx}{n + x^*},$$

donde $x^* \in [0, x]$. Haciendo uso de esta estimación, demuestre que

$$\lim_{n\to\infty} \ln \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = x$$

y deduzca la fórmula

$$e^x = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n.$$

Esta última expresión es a veces usada como la definición de la función e^x.

7.4.17. Una especie de bacteria virulenta crece en un cultivo. Si la velocidad de crecimiento de la población bacteriana es proporcional al número de individuos presente, si en la población inicial hay 1000 bacterias y si el número de individuos se duplica después de los primeros 30 minutos, ¿cuántas bacterias habrá después de dos horas?

7.4.18. (a) Sustituyendo directamente, muestre que la función

$$p(t) = \frac{Lp(0)}{p(0) + (L - p(0))e^{-kt}} \tag{7.7}$$

satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dp}{dt}(t) = \beta\left(1 - \frac{p(t)}{L}\right)p(t).$$

Note que cuando el tiempo crece, la población tiende a la máxima población posible sustentable por el medio.

(b) Haciendo uso de la solución (7.7), diga en qué tiempo se duplica la población p si la población inicial $p(0)$ es igual a $\frac{L}{3}$.

(c) Encuentre el tiempo en que la población alcanza su valor máximo.

7.4.19. Un cono circular recto de 24 cm de altura y 6 cm de radio en su base, se llena con agua y se coloca con su vértice apuntando hacia abajo. El agua empieza a salir a través de un orificio en el vértice con una velocidad, en cada instante, igual a la altura del agua en el cono en el instante en cuestión. Diga cuánto tarda en vaciarse el cono.

7.4.20. Por vía intravenosa se administra una solución de glucosa en la corriente sanguínea, a tasa constante r. A medida que se agrega la solución de glucosa, se convierte en otras sustancias y se elimina de la sangre a una razón proporcional a la concentracion en cada instante, con constante de proporcionalidad k.

(a) Si $c = c(t)$ es la función que en cada tiempo t nos da la concentración de la solución de glucosa en la sangre, encuentre la ecuación diferencial que satisface la función c.

(b) Suponiendo que la concentración en el tiempo $t = 0$ es igual a c_0, determine, resolviendo la ecuación diferencial, la función $c = c(t)$ para todo t.

(b) Si se supone $c_0 < \dfrac{r}{k}$, encuentre $\lim\limits_{t \to \infty} c(t)$.