Capítulo 6

Teorema del valor medio y sus aplicaciones

El teorema del valor medio es uno de los resultados más importantes del análisis matemático. Para las funciones derivables, este teorema compara en términos de su derivada, la variación total de la variable dependiente con respecto a la variación de la variable independiente. Sus distintos corolarios y generalizaciones proporcionan criterios útiles para la descripción cualitativa del comportamiento de la función, tanto globalmente como en la vecindad de cada punto de su dominio.

Iniciamos este capítulo explicando, en lenguaje común, el contenido y significado del teorema del valor medio. Después de su prueba rigurosa, se discuten varias de sus aplicaciones a la descripción de la gráfica de la función y a la reconstrucción de ésta a partir de la información sobre sus derivadas. Finalmente, se presenta su generalización a funciones con derivadas de orden superior, para dar paso al teorema de Taylor y sus estimaciones para la aproximación de funciones derivables mediante polinomios. Con las herramientas anteriores, se dan criterios para la clasificación de los puntos del dominio de una función derivable y se abordan los problemas de cálculo de valores máximos y mínimos, que son de gran importancia en las aplicaciones.

Este capítulo es clave para el buen manejo y aplicación de los conceptos del cálculo, tanto a los problemas propios del análisis matemático como de aplicación en las demás áreas de la ciencia y la ingeniería.

6.1 Motivaciones

Consideremos el movimiento de un auto (incluyendo la posibilidad de marchar en reversa o con velocidad negativa) a lo largo de una carretera entre dos ciudades A y B y supongamos que tiene 100 kilómetros de longitud. Si ese automóvil inicia su viaje en A y recorre la distancia a B en una hora, entonces podemos afirmar que al menos una vez durante el recorrido, el velocímetro del auto habrá marcado 100 Km/h. Este hecho evidente constituye el contenido del teorema del valor medio.

Una manera equivalente de describir la situación anterior es afirmar que la velocidad promedio que desarrolla un auto al recorrer la distancia entre A y B se leerá al menos una vez en el velocímetro del auto. Es decir, si hacemos T horas en recorrer los 100 kilómetros que separan esas ciudades, entonces el velocímetro del auto al menos una vez marcará el valor $(100/T)$ Km/h.

Como consecuencias directas del teorema del valor medio, tenemos las siguientes conclusiones:

(a) Si el velocímetro siempre marca velocidades mayores que cero o positivas, entonces la distancia a la que se encuentra el auto de la ciudad A aumenta con el paso del tiempo. Si, por el contrario, el velocímetro siempre marca velocidad negativa, el auto se alejará cada vez más en sentido contrario a la dirección a B.

(b) Si el velocímetro, durante un recorrido, da siempre una lectura de la velocidad entre a Km/h y b Km/h, con $0 \leqslant a \leqslant b$, entonces, en cada intervalo de tiempo de T horas de duración, el auto recorre una distancia mayor o igual que aT y menor o igual que bT.

(c) Si un auto que inicia su recorrido en A regresa a su punto de partida después de T horas, entonces al menos una vez durante ese lapso el auto se detuvo, es decir su velocímetro debió marcar 0 Km/h.

(d) Si el velocímetro de un auto marca 0 Km/h durante un cierto intervalo de tiempo, entonces el auto permanece en la misma posición durante ese intervalo de tiempo.

Como el lector notará, los ejemplos y observaciones anteriores son evidentes y hasta parecen afirmaciones triviales sobre el movimiento de los automóviles. Sin embargo, cuando se generalizan a funciones reales de variable real que tengan derivadas en todos los puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$, adquieren un contenido matemático más profundo que permite enunciar verdades generales sobre las funciones derivables.

6.2 El teorema del valor medio

Para funciones reales de una variable real, el *teorema del valor medio* se enuncia en los términos siguientes.

Teorema 6.1. *(Teorema del valor medio)* Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función continua que tiene derivada en cada uno de los puntos de (a,b), entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}(c)(b-a).$$

Demostración. Probaremos primero el teorema suponiendo que la función f toma el mismo valor en los extremos del intervalo $[a,b]$, es decir

$$f(a) = f(b). \tag{6.1}$$

Bajo la hipótesis (6.1) el teorema se denomina *teorema de Rolle*.[1] Demostraremos que existe un punto c tal que $a < c < b$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = 0$. Consideremos los siguientes dos casos posibles para f :

(a) f es constante en (a,b), en cuyo caso en cualquier punto $c \in (a,b)$ se tendría $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = 0$, ya que la derivada de una función constante es en todo punto igual a cero.

(b) f no es constante en $[a,b]$ y entonces, por la continuidad de la función, tendrá que existir al menos un punto $c \in (a,b)$ donde la función f alcance su valor máximo o su valor mínimo en el intervalo $[a,b]$. Esta última afirmación es cierta, pues si f alcanzara tanto su valor máximo como su valor mínimo en los extremos del intervalo $[a,b]$, siendo $f(a) = f(b)$, se tendría que f es constante en $[a,b]$ y ese no es ahora el caso, luego o el valor máximo o el valor mínimo de f en $[a,b]$ se alcanza en el interior de $[a,b]$. Supongamos que es el valor máximo de f el que se alcanza en un punto c del intervalo abierto (a,b), es decir,

$$c \in (a,b) \quad \text{y} \quad f(c) \geqslant f(x) \ \text{ para toda } x \in [a,b].$$

Evaluando la derivada de f en c tendremos

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Ahora veamos el signo de $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)$. Si la magnitud h de la variación de la variable independiente en $x = c$ se toma mayor que cero, el cociente diferencial tendrá signo negativo

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} \leqslant 0 \quad \text{si} \quad h > 0,$$

[1] Por Michel Rolle (1652-1719), matemático francés, quien lo publicó en 1691.

ya que $f(c+h)-f(c) \leqslant 0$ para todo $c+h \in [a,b]$, puesto que $f(c)$ es el valor máximo de la función en el intervalo. En vista de lo anterior, al tomar h valores positivos que tienden a cero, los cocientes diferenciales correspondientes serán siempre menores o iguales a cero y deberán tener como límite un número menor o igual que cero, es decir,

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) \leqslant 0.$$

Análogamente, si la magnitud de la variación h es negativa, el valor del cociente será siempre mayor o igual que cero,

$$\frac{f(c+h)-f(c)}{h} \geqslant 0, \quad \text{si} \quad h<0,$$

y, por tanto, su límite será también mayor o igual a cero:

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(c+h)-f(c)}{h} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) \geqslant 0.$$

De las dos estimaciones anteriores, concluimos que, si existe la derivada en $x=c$, se debe tener

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = 0,$$

con lo que hemos probado la validez del teorema del valor medio en el caso particular de que $f(a)=f(b)$.

En el caso general, si $f(a) \neq f(b)$, consideremos la función auxiliar $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

la cual es una función derivable en (a,b) y tal que

$$g(b) = g(a) = 0.$$

Luego, en virtud del caso anterior, existirá $c \in (a,b)$ tal que $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(c) = 0$, y escribiendo esto último en términos de la función original f, se tiene

$$0 = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(c) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a},$$

es decir,

$$f(b)-f(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(b-a),$$

donde $c \in (a,b)$, y así hemos probado el teorema en general. $\triangleleft$

Una generalización muy importante del teorema del valor medio es la siguiente.

Teorema 6.2. *(Teorema del valor medio generalizado*[2]*)* Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a,b]$ y derivables en (a,b); supongamos, además, que $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) \neq 0$ para toda $x \in (a,b)$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(c)}.$$

Note que si $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) \neq 0$ para toda $x \in (a,b)$, entonces $g(b)-g(a) \neq 0$.

Demostración. Consideremos la función

$$h(x) = (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (g(b)-g(a))(f(x)-f(a)),$$

la cual es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). En virtud del teorema del valor medio, existe $c \in (a,b)$ tal que

$$h(b)-h(a) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(c)(b-a),$$

y escribiendo esta expresión en términos de las funciones$f$ y g, se tiene

$$0 = \left[(f(b)-f(a))\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(c) - (g(b)-g(a))\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)\right](b-a),$$

o lo que es lo mismo,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)}{\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(c)},$$

como se quería demostrar. $\triangleleft$

6.3 Aplicaciones del teorema del valor medio

Como consecuencia directa del teorema del valor medio, se tienen los siguientes corolarios que recogen y generalizan las afirmaciones que hicimos en la sección 6.1 para el caso del movimiento de un automóvil.

[2]Este resultado se debe a Augustin Louis Cauchy (1789-1857), matemático francés mencionado en el capítulo primero; por eso, a veces se le llama *teorema de Cauchy*.

6.3.1 Significado del signo de la derivada

En primer lugar, presentamos el siguiente corolario que consigna la información que el signo de la función derivada proporciona sobre la función y su comportamiento. La demostración es directa a partir del teorema del valor medio y se deja al lector.

Corolario 6.1. Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ una función derivable.

(a) Si $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, entonces $f(x_2) > f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$ y $x_1, x_2 \in (a,b)$. Es decir, f es una función creciente en (a,b).

(b) Si $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) < 0$ para toda $x \in (a,b)$, entonces $f(x_2) < f(x_1)$ siempre que $x_2 > x_1$ y $x_1, x_2 \in (a,b)$. Es decir, f es una función decreciente en (a,b).

(c) Si $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 0$ para toda $x \in (a,b)$, entonces $f(x) = \textit{constante}$ en (a,b).

(d) Si f y g son funciones derivables definidas en un mismo intervalo (a,b) y en cada punto $x \in (a,b)$ se tiene que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x),$$

entonces

$$f(x) = g(x) + c$$

para toda $x \in (a,b)$ y algún $c \in \mathbb{R}$. Es decir, las funciones f y g difieren por una constante.

Ejemplo 6.1. La función $f(x) = \dfrac{1}{16}x^2(3x^2 + 4x - 12)$, definida en todo $\mathbb{R}$, tiene por función derivada

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x = \frac{3}{4}x(x+2)(x-1).$$

Luego, el signo de la función derivada es

(a) positivo, si $x \in (-2,0) \cup (1,\infty)$,

(b) cero si $x = -2, 0, 1$,

(c) negativo si $x \in (-\infty,-2) \cup (0,1)$.

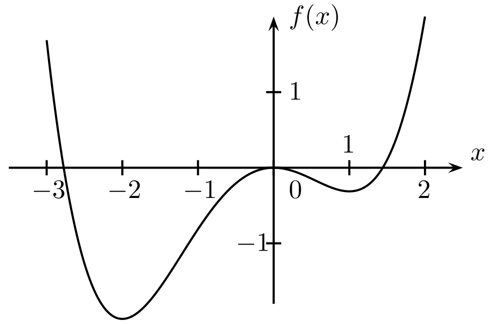

Figura 6.1: Gráfica de la función $f(x) = \dfrac{1}{16}x^2(3x^2 + 4x - 12)$

Aplicando el corolario 6.1, tenemos que la función f es creciente en $(-2, 0) \cup (1, \infty)$ y decreciente en $(-\infty, -2) \cup (0, 1)$. Además, f tiene un mínimo local en $x = -2$ con valor $f(-2) = -2$, un máximo local en $x = 0$ con valor $f(0) = 0$ y un mínimo local en $x = 1$ con valor $f(1) = -5/16$. El mínimo absoluto se alcanza en $x = -2$, mientras que no posee máximo absoluto pues crece sin límite cuando $x \to \pm\infty$. (Ver figura 6.1.) $\triangleleft$

6.3.2 La función segunda derivada

Tomando en cuenta que la función segunda derivada es la función derivada de la función derivada de f, el conjunto de enunciados, teoremas y corolarios anteriores son aplicables a la segunda derivada, dando lugar a una mayor información sobre la función inicial. En el caso de que f sea la función de posición de un auto, la segunda derivada se llama *función de aceleración* o *de variación de la velocidad con respecto al tiempo.*

Teorema 6.3. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función que tiene segunda derivada en (a, b) y sea $c \in (a, b)$. Entonces, para cada punto $x_0 \in (a, b)$, la diferencia, o error, $R(x_0) = f(x_0) - P(x_0)$ entre $f(x_0)$ y el valor en x_0 del polinomio de primer grado $P(x) = f(c) + \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(x - c)$ en x_0, es tal que

$$R(x_0) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_c)(x_0 - x_c)(x_0 - c),$$

donde $x_c \in (c, x_0)$.

Demostración. Definamos la función

$$g(x) = f(x) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)(x_0 - x).$$

Nótese que

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x)(x_0 - x).$$

Si $x_0 \in [c, b)$, al aplicar el teorema del valor medio en el intervalo $[c, x_0]$ a la función g obtenemos

$$g(x_0) - g(c) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_c)(x_0 - c), \tag{6.2}$$

donde $x_c \in (c, x_0)$. Al escribir la expresión (6.2) en términos de la función f, se tiene que

$$f(x_0) - f(c) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(x_0 - c) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_c)(x_0 - x_c)(x_0 - c) = R(x_0),$$

lo que prueba el teorema. $\triangleleft$

Corolario 6.2. Bajo las hipótesis del teorema 6.3 y suponiendo además que la función segunda derivada es acotada por un número M, es decir, que

$$\left| \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) \right| \leqslant M \quad \text{para todo} \quad x \in (a, b),$$

se tiene la siguiente estimación para el error $R(x_0)$ en cada punto $x_0 \in (a, b)$

$$|R(x_0)| = \left| f(x_0) - f(c) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(x_0 - c) \right| \leqslant M|x_0 - c|^2.$$

Corolario 6.3. Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función con segunda derivada en (a, b). Entonces los siguientes enunciados son válidos:

(a) Si $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = 0$ para cada $x \in (a, b)$, entonces $f(x) = mx + n$, con m, n constantes. Es decir, f es una función afín.

(b) Si $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) > 0$ (o $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) < 0$) para toda $x \in (a, b)$, la gráfica de la función f se encuentra de un mismo lado de la recta tangente en el punto $(c, f(c))$,

$$y = f(c) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(x - c),$$

ya que

$$f(x) - f(c) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(x - c) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_c)(x - x_c)(x - c) > 0 \ (< 0).$$

Si, además, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) > 0$, entonces la función es creciente de manera cóncava hacia arriba en (a, b). (En caso de que $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) < 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) > 0$, la función f es creciente de manera cóncava hacia abajo en (a, b).)

6.3.3 Curvatura de curvas en el plano

Consideremos en el plano cartesiano la curva dada por la gráfica de la función $y = f(x)$ para $x \in (a, b)$, donde f tiene segunda derivada continua. En cada punto $P = (x_0, f(x_0))$ de la curva, se le llama *recta normal a f en P* a la recta N_0 cuya ecuación es

$$y = f(x_0) - \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}(x - x_0). \tag{6.3}$$

Esta recta es perpendicular a la recta tangente a f en P. Si $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$, la ecuación de N_0 es $x = x_0$.

Para puntos $Q = (x_0+h, f(x_0+h))$ con $h \neq 0$ cercanos a P, la recta normal N_h a f por Q toma la forma

$$y = f(x_0 + h) - \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 + h)}(x - x_0 - h). \tag{6.4}$$

Resolviendo las ecuaciones (6.3) y (6.4) para (x, y), se obtienen las coordenadas del punto de intersección $C_h = (x_h, y_h)$ de N_0 y N_h en la forma

$$x_h = x_0 - \frac{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 + h)\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 + h) - \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}\left[f(x_0 + h) - f(x_0) + \frac{h}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 + h)}\right],$$

$$y_h = f(x_0) + \frac{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 + h)}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 + h) - \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}\left[f(x_0 + h) - f(x_0) + \frac{h}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 + h)}\right].$$

Aplicando el teorema del valor medio en $[x_0, x_0 + h]$, a las funciones f y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, obtenemos

$$f(x_0 + h) - f(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_1)h,$$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0 + h) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_2)h,$$

donde $x_1, x_2 \in (x_0, x_0 + h)$. Así, las coordenadas del punto C_h, se reescriben

$$\begin{aligned} x_h &= x_0 - \frac{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0+h)\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}{\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_2)h}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_1)h + \frac{h}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0+h)}\right] \\ &= x_0 - \frac{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0+h)\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}{\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_2)}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_1) + \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0+h)}\right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y_h = f(x_0) + \frac{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0+h)}{\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_2)h}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_1)h + \frac{h}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0+h)}\right] = \\ = f(x_0) + \frac{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0+h)}{\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_2)}\left[\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_1) + \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0+h)}\right]. \end{aligned}$$

Haciendo ahora tender h a cero, se tiene $x_1 \to x_0$ y $x_2 \to x_0$; luego el punto

$$C_0 = \lim_{h\to 0} C_h = (\lim_{h\to 0} x_h, \lim_{h\to 0} y_h)$$

toma la forma

$$C_0 = (x_0, f(x_0)) + \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\right)^2\right]\left(-\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0), 1\right).$$

Al punto C_0 se le llama *centro de curvatura de la curva* $y = f(x)$ *en el punto* $P(x_0, f(x_0))$ y a la distancia ρ de C_0 a P, dada por

$$\rho = \frac{1}{\left|\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)\right|}\left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)\right)^2\right]^{\frac{3}{2}},$$

se le llama *radio de curvatura de* f *en* P. Finalmente, se define la *curvatura* $\kappa(x_0)$ *en el punto* $(x_0, f(x_0))$ de la curva como

$$\kappa(x_0) = \frac{1}{\rho}.$$

En particular, una circunferencia de radio r tiene curvatura constante $1/r$. Por esa razón, al círculo con centro en C_0 y radio ρ se le llama *círculo de curvatura* (o *círculo osculador*) de la curva en P.

Ejemplo 6.2. Para la curva $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ en $x_0 = 1$, encontramos lo siguiente:

(a) La recta normal N_0 en el punto $P(x_0, f(x_0)) = (1, 1)$ es $y = -x + 2$.

(b) La recta normal N_h en el punto $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$ es

$$y = -\frac{x}{1 + 4\,h + 3\,h^2} + 1 + h + 2\,h^2 + h^3 + \frac{3}{h+1}.$$

(c) El centro de curvatura es $C_0 = (h, k) = \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

(d) El radio de curvatura es $\rho = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (Ver la figura 6.2.) ◁

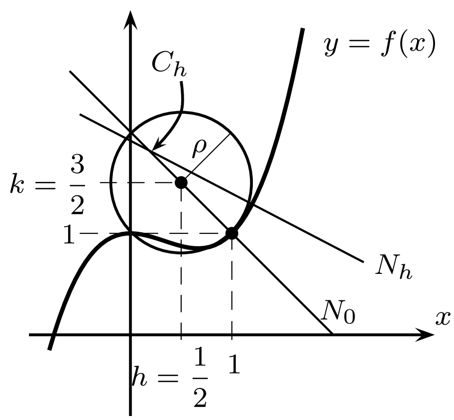

Figura 6.2: El círculo de curvatura para la curva $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ en $x_0 = 1$

6.4 El teorema de Taylor

Los valores de una función y de sus derivadas de orden superior en un punto x_0 de su dominio proporcionan información importante sobre su comportamiento alrededor de ese punto. Por ejemplo, si todas las derivadas de orden k de la función f se anulan en un intervalo, entonces la función es un polinomio de grado $k - 1$, como lo mostramos en la proposición siguiente.

Proposición 6.1. Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función que posee derivada de orden k en cada punto $x \in (a, b)$ con

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x) = 0 \quad \text{para} \quad x \in (a, b),$$

y x_0 es un punto arbitrario de (a,b), entonces f es un polinomio de grado $k-1$ de la forma

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + \cdots + a_{k-1}(x-x_0)^{k-1},$$

donde $a_0 = f(x_0)$, $a_j = \dfrac{1}{j!}\dfrac{\mathrm{d}^j f}{\mathrm{d}x^j}(x_0)$, para $j = 1, 2, \ldots, k-1$.

Demostración. Consideremos la función

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)(x_0-x) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x)(x_0-x)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1} f}{\mathrm{d}x^{k-1}}(x)(x_0-x)^{k-1}. \end{aligned}$$

Derivando, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = 0.$$

Por tanto, g es constante y

$$g(x) = f(x_0),$$

por lo que podemos escribir

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(x) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)(x_0-x) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x)(x_0-x)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1} f}{\mathrm{d}x^{k-1}}(x)(x_0-x)^{k-1}. \end{aligned}$$

Como x y x_0 son puntos arbitrarios de (a,b), los podemos intercambiar y obtener

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)(x-x_0)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{1}{(k-1)!}\frac{\mathrm{d}^{k-1} f}{\mathrm{d}x^{k-1}}(x_0)(x-x_0)^{k-1}. \ \triangleleft \end{aligned}$$

En el caso de funciones con derivadas de orden superior, el teorema del valor medio permite dar una estimación de la diferencia entre la función y el polinomio construido como en la proposición 6.1. Este nuevo resultado se conoce como *teorema de Taylor,*[3] el cual presentamos a continuación.

[3] Por Brook Taylor (1685-1731), matemático inglés, quien enunció, en 1712, el teorema que lleva su nombre.

Consideremos una función real $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que tenga derivadas de orden k en cada punto de (a, b). Tomemos un punto $c \in (a, b)$ y definamos el polinomio P_c^k de grado k mediante

$$P_c^k(x) = f(c) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(x-c) + \frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c)(x-c)^2 + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(c)(x-c)^k.$$

Directamente podemos verificar que los valores de P_c^k y f, así como los de sus derivadas hasta orden k, coinciden en el punto c. Es decir,

$$P_c^k(c) = f(c), \quad \frac{\mathrm{d}P_c^k}{\mathrm{d}x}(c) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c), \quad \cdots, \quad \frac{\mathrm{d}^k P_c^k}{\mathrm{d}x^k}(c) = \frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(c).$$

Al polinomio P_c^k se le llama el *polinomio de Taylor de grado k en el punto c de la función f.*

Teorema 6.4. *(Teorema de Taylor)* Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ con derivadas hasta de orden $k+1$ en (a, b) y consideremos su polinomio de Taylor de grado k, P_c^k, alrededor del punto $c \in (a, b)$. Entonces, para cada punto $x_0 \in (a, b)$ la diferencia

$$R(x_0) = f(x_0) - P_c^k(x_0)$$

entre el valor de f y el valor del polinomio de Taylor P_c^k en el punto $x = x_0$, es tal que

$$R(x_0) = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^{k+1} f}{\mathrm{d}x^{k+1}}(x_c)(x_0 - x_c)^k(x_0 - c),$$

donde x_c es un punto entre c y x_0. A la función R se le llama también la *función residuo de orden k de la función f en el punto c.*

Demostración. Si $x_0 \in [c, b)$, aplicando el teorema del valor medio en el intervalo $[c, x_0]$ a la función

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)(x_0 - x) + \cdots + \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x)(x_0 - x)^k \\ &= f(x) + \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^i f}{\mathrm{d}x^i}(x)(x_0 - x)^i, \end{aligned}$$

se tiene

$$g(x_0) - g(c) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_c)(x_0 - c),$$

donde $x_c \in (c, x_0)$. Por otro lado,

$$g(x_0) - g(c) = R(x_0).$$

Calculando directamente el término $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_c)$, se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_c) &= \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_c) + \sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^{i+1}f}{\mathrm{d}x^{i+1}}(x_c)(x_0-x_c)^i \\ &\quad -\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{i}f}{\mathrm{d}x^{i}}(x_c)(x_0-x_c)^{i-1}. \qquad (6.5)\end{aligned}$$

Reacomodando los índices de la última suma en la forma

$$\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{(i-1)!}\frac{\mathrm{d}^{i}f}{\mathrm{d}x^{i}}(x_c)(x_0-x_c)^{i-1} = \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{i!}\frac{\mathrm{d}^{i+1}f}{\mathrm{d}x^{i+1}}(x_c)(x_0-x_c)^{i},$$

y sustituyendo en (6.5), obtenemos que el error $R(x_0)$ es

$$R(x_0) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_c)(x_0-c) = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^{k+1}f}{\mathrm{d}x^{k+1}}(x_c)(x_0-x_c)^k(x_0-c),$$

donde x_c es un punto en el intervalo (c, x_0). ◁

Nota Importante.

(a) *El teorema 6.4 nos da explícitamente el valor de la diferencia entre el valor de la función f en el punto x_0 y el valor del polinomio de Taylor en ese mismo punto. Esa diferencia está dada en términos de la $(k+1)$-ésima derivada en un punto intermedio x_c entre el punto x_0 y el punto c donde se calculan los coeficientes del polinomio de Taylor. Ese punto x_c depende del punto x_0 y su existencia la asegura el teorema del valor medio.*

(b) *Si la función derivada de orden $(k+1)$ de la función $f(x)$ es acotada en (a,b), es decir, si existe $M>0$ tal que*

$$\left|\frac{\mathrm{d}^{k+1}f}{\mathrm{d}x^{k+1}}(x)\right| < M \quad \text{para toda } x \in (a,b),$$

entonces se tiene la estimación siguiente para la función error:

$$|R(x_0)| < \frac{1}{k!}M|x_0-c|^{k+1}$$

para cada $x_0 \in (a,b)$.

(c) *El valor de la función residuo $R(x_0)$ depende de la distancia del punto x_0 al punto c, donde se determina el polinomio, y de la cota M de la $(k+1)$-ésima derivada en el intervalo $[c, x_0]$.*

(d) *También se acostumbra escribir el residuo en la forma*

$$R(x_0) = \frac{1}{k!}\frac{d^{k+1}f}{dx^{k+1}}(x_c)(1-\theta)^k(x_0-c)^{k+1},$$

donde $0 < \theta < 1$, *y se tiene*

$$x_0 - x_c = x_0 - c - \theta(x_0 - c) = (1-\theta)(x_0 - c).$$

Esta fórmula para el residuo se le atribuye a Cauchy.

La aproximación de una función por su polinomio de Taylor permite calcular el valor de la función en puntos cercanos a un punto donde se pueda conocer explícitamente el valor de la función y sus derivadas. Enseguida se muestra este tipo de aplicaciones.

Ejemplo 6.3. Aplicando la fórmula para el residuo, calcule el error que se comete al evaluar $\sqrt{10}$ usando el polinomio de Taylor de orden 1 en el punto $x = 9$.

Solución: Sea $f(x) = \sqrt{x}$ y consideremos su polinomio de Taylor de orden 1 alrededor de $x = 9$,

$$P_9^1(x) = 3 + \frac{1}{6}(x-9).$$

Por el teorema de Taylor, se tiene que

$$\sqrt{x} = 3 + \frac{1}{6}(x-9) + R(x)$$

con

$$R(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_c)(x-x_c)(x-9), \text{ donde } x_c \in [9, x].$$

Luego,

$$\sqrt{10} \approx 3 + \frac{1}{6},$$

con un error $R(10)$ acotado por

$$|R(10)| \leqslant \left|\frac{\mathrm{d}^2\sqrt{x}}{\mathrm{d}x^2}(x_c)\right| \leqslant \frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{x_c^3}} \leqslant \frac{1}{4(27)},$$

ya que $x_c \in [9, 10]$. En conclusión,

$$\sqrt{10} \approx 3.16$$

con un error menor que 0.01. ◁

Ejemplo 6.4. Para $x \in (-1, 1)$, encuentre el polinomio de Taylor que aproxima a la función $\operatorname{sen} x$ con un error menor que 10^{-3}. Calcule con dos cifras decimales el valor de $\operatorname{sen}(1/2)$.

Solución: Como los puntos de $(-1, 1)$ son cercanos a $x = 0$, donde se conoce exactamente el valor de las derivadas de la función $\operatorname{sen} x$, entonces los polinomios de Taylor en cero son los apropiados para aproximar a esa función en puntos de $(-1, 1)$. Notemos primero que todas las derivadas de la función $\operatorname{sen} x$ son funciones acotadas:

$$\left|\frac{\mathrm{d}^n \operatorname{sen} x}{\mathrm{d}x^n}(x)\right| \leqslant 1, \quad \text{para toda } x \in \mathbb{R} \text{ y } n \text{ natural.}$$

Para k natural, el polinomio de Taylor de orden $2k + 1$ en el punto $x = 0$, toma la forma

$$P_0^{2k+1}(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots + \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}$$

y la diferencia $R(x)$ entre $\operatorname{sen} x$ y $P_0^{2k+1}(x)$ es

$$\operatorname{sen} x - P_0^{2k+1}(x) = R(x)$$

con

$$|R(x)| \leqslant \frac{1}{(2k+1)!}|x|^{2k+2}.$$

Luego, para $x \in (-1, 1)$, se tiene $|R(x)| \leqslant \dfrac{1}{(2k+1)!}$ y, por tanto, $|R(x)| \leqslant 10^{-3}$ si $k = 3$. Así, el polinomio de Taylor de grado menor que aproxima a $\operatorname{sen} x$ para todo $x \in (-1, 1)$ con un error menor que 10^{-3} es

$$P_0^7(x) = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7.$$

Para el valor de $\operatorname{sen}(1/2)$, el error $R(1/2) = \operatorname{sen}(1/2) - P_0^{2k+1}(1/2)$ es tal que

$$|R(1/2)| \leqslant \frac{1}{2^{2k+2}(2k+1)!}.$$

Entonces, para estimar $\operatorname{sen}(1/2)$ con 2 cifras decimales, basta tomar $k = 2$:

$$\operatorname{sen}(1/2) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{48} = \frac{23}{48} = 0.47\ldots \triangleleft$$

6.4.1 Puntos regulares, críticos y de inflexión

Los puntos del dominio de una función real de variable real f que posee una o más derivadas continuas, se clasifican en:

> *puntos regulares,* que son aquellos donde la derivada es distinta de cero, y
>
> *puntos críticos* o *puntos singulares,* donde la derivada es igual a cero.

La propiedad característica de un punto regular es que existe un intervalo con centro en ese punto, donde la función es monótona y, por tanto, posee ahí función inversa. Esto se debe a que, al ser la derivada de la función distinta de cero en ese punto, por la continuidad de la función derivada, debe ser distinta de cero en un intervalo alrededor de ese punto y, por el teorema del valor medio, en ese intervalo la función será monótona y por tanto tendrá función inversa en el intervalo en cuestión.

Si la función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua, a un punto $c \in (a, b)$ se le dice *punto máximo local* (o *punto mínimo local*), si existe un intervalo I con centro en c tal que $f(c) \geqslant f(x)$ para todo $x \in I$ (o $f(c) \leqslant f(x)$ para todo $x \in I$, respectivamente). Note que los puntos máximos y mínimos locales tienen esa propiedad solamente en un intervalo alrededor de ese punto. Es posible que el máximo global de la función f se alcance en alguno de los puntos extremos del intervalo inicial $[a, b]$ y que en ellos la derivada tenga un valor distinto de cero, como se ve en la figura 6.3. Lo importante es que si un punto interior $c \in (a, b)$ es máximo o mínimo local de f, necesariamente la derivada de f se debe anular en c y ese punto será un punto crítico. Para demostrar lo anterior, supongamos que $c \in (a, b)$ es un máximo local en el intervalo $I = (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Si calculamos la derivada de f en $x = c$, tendremos

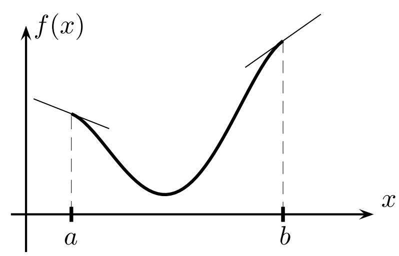

Figura 6.3:
$f(b)$ es máximo y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(b) > 0$

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = \lim_{h \to 0} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}.$$

Si la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de números positivos, la sucesión de los cocientes

$$\left\{ \frac{f(c+h_n) - f(c)}{h_n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

es una sucesión de números negativos pues el numerador es negativo ya que $f(c) \geqslant f(c+h_n)$ y el denominador h_n es positivo. Luego, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$ será menor o igual a cero. Análogamente, si tomamos la sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ de números negativos que convergen a cero, la sucesión de cocientes

$$\left\{\frac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

será una sucesión de números positivos y $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{f(c+h_n)-f(c)}{h_n}$ deberá ser entonces mayor o igual a cero. Como ese límite es precisamente la derivada $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)$, tenemos entonces que la única manera en que ambas sucesiones converjan a un mismo número es que ese número sea cero. Con esta argumentación concluimos que si $x = c$ es un punto máximo o mínimo local de f, entonces se cumple que

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = 0.$$

Nota Importante. *La condición de que la derivada de una función f se anule en los puntos máximos y mínimos locales es una condición necesaria que cumplen ese tipo de puntos. Sin embargo, por sí sola no es una condición suficiente para asegurar que esos puntos sean máximos o mínimos locales. Por ejemplo, la derivada de la función $f(x) = x^3$ se anula en cero; sin embargo, ese punto no es máximo ni mínimo local pues la función crece a su derecha y decrece a su izquierda.*

La observación anterior nos lleva de manera natural a plantear el problema de encontrar condiciones adicionales al anulamiento de la derivada en un punto para poder asegurar que ese punto sea un máximo o mínimo local. Una de esas condiciones, se tiene en términos del signo de la segunda derivada, como sigue.

Proposición 6.2. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función que tiene función segunda derivada continua y sea $c \in (a,b)$ un punto crítico. Entonces, si $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c) < 0$, el punto c es un máximo local y si $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c) > 0$, el punto c es un mínimo local.

Demostración. Probaremos únicamente el primer caso; el segundo se demuestra de manera análoga y se deja al lector. Como $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x)$ es una función continua con $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c) < 0$, existe un intervalo $I = (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ con centro en

c y radio $\varepsilon > 0$ tal que $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) < 0$ para toda $x \in I$. Más aún, para cada $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ se tiene, por el teorema de Taylor de orden 2, la estimación

$$f(x) - f(c) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(x-c) = \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_c)(x-c)(x-x_c),$$

donde x_c es un punto entre x y c. Tomando en cuenta que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = 0$ y que $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_c) < 0$, resulta que

$$f(x) - f(c) < 0, \quad \text{para toda } x \in I,$$

lo cual muestra que $f(c)$ es el valor máximo de f en el intervalo $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ y entonces c es un máximo local de f. ◁

Finalmente, en esta sección presentamos el concepto de *punto de inflexión.*

Un punto $x = c$ se llama *punto de inflexión* de una función $y = f(x)$ derivable en c, si existe un intervalo abierto I que contiene a c tal que la función $R(x) = f(x) - f(c) - \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(x-c)$ es negativa si $x < c$ y positiva si $x > c$, o recíprocamente: es negativa si $x > c$ y positiva si $x < c$.

Para funciones que poseen segunda derivada continua, si $x = c$ es un punto de inflexión existe un intervalo abierto I que contiene a c donde la función cambia de concavidad; es decir,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) < 0 \text{ si } x < c \text{ y } \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) > 0 \text{ si } x > c, \text{ o}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) > 0 \text{ si } x < c \text{ y } \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) < 0 \text{ si } x > c.$$

En este caso, el teorema del valor intermedio aplicado a la función segunda derivada implica que si $x = c$ es un punto de inflexión de f, la segunda derivada de f se anula en ese punto, es decir $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c) = 0$.

Nota Importante. *En un punto de inflexión de una función f, no necesariamente se anula su derivada. Por ejemplo, para la función $f(x) = x^3 - x$, se tiene $\dfrac{df}{dx}(0) = -1$ y el punto $x = 0$ es punto de inflexión, ya que la función segunda derivada, $\dfrac{d^2 f}{dx^2}(x) = 6x$, es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$.*

Finalizamos esta sección con el siguiente teorema, que nos proporciona un criterio general para caracterizar los puntos críticos y los puntos de inflexión de una función.

Teorema 6.5. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función que tiene derivadas continuas de orden r en (a,b) y $c \in (a,b)$. Supongamos que

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(c) = \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(c) = \cdots = \frac{\mathrm{d}^{r-1} f}{\mathrm{d}x^{r-1}}(c) = 0, \tag{6.6}$$

pero $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(c) \neq 0$. Entonces:

(a) Si $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = 0$ y r es par con $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(c) > 0$, el punto c es un punto mínimo local;

(b) Si $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = 0$ y r es par con $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(c) < 0$, el punto c es un máximo local;

(c) Si r es impar, c es un punto de inflexión.

Demostración. Aplicando el teorema de Taylor (teorema 6.4), se tiene para cada $x \in (a,b)$ la estimación siguiente:

$$\begin{aligned} f(x) - f(c) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(x-c) - \cdots - \frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^{r-1} f}{\mathrm{d}x^{r-1}}(c)(x-c)^{r-1} \\ = \frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x_c)(x-x_c)^{r-1}(x-c). \end{aligned} \tag{6.7}$$

Debido a (6.6), la expresión (6.7) toma la forma

$$f(x) - f(c) - \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(x-c) = \frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x_c)(x-x_c)^{r-1}(x-c),$$

donde $x - x_c > 0$ si $x > c$ y $x - x_c < 0$ si $x < c$. En el caso de que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) = 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(c) > 0$, de la continuidad de $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x)$ en $x = c$ podemos asegurar la existencia de un intervalo de la forma $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ donde $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x) > 0$ para toda $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ y, en particular, $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x_c) > 0$ pues $|x_c - c| < \varepsilon$. Por tanto, ya que r un número par, el lado derecho de (6.7) será positivo para cada $x \in (c-\varepsilon, c+\varepsilon)$:

$$f(x) - f(c) = \frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x_c)(x-x_c)^{r-1}(x-c) > 0,$$

lo cual significa que $x = c$ es un punto mínimo local pues entonces

$$f(x) > f(c) \text{ para toda } x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon).$$

En el caso de que $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x_c) < 0$ un argumento análogo al anterior prueba que $x = c$ tiene que ser un punto máximo local.

Finalmente, para probar (c) supongamos que $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x) > 0$. Por la continuidad de $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x)$ en $x = c$, existe un intervalo de la forma $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ donde $\dfrac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x) > 0$ para toda $x \in (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ y al ser r un número impar, el término de la derecha en (6.7) tiene la forma

$$\frac{1}{(r-1)!}\frac{\mathrm{d}^r f}{\mathrm{d}x^r}(x_c)(x - x_c)^{r-1}(x - c),$$

que toma signos contrarios al evaluarlo en puntos x a la derecha y a la izquierda de c, lo que significa que c es un punto de inflexión. ◁

Ejemplo 6.5. Los puntos del dominio de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 8x^9 - 9x^8$ se clasifican de la forma siguiente:

De la función primera derivada

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 72x^7(x - 1)$$

concluimos que el conjunto A de puntos regulares de f es

$$A = \mathbb{R} - \{0, 1\}.$$

La función segunda derivada es

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = 504x^6(x - 1) + 72x^7 = 72x^6(8x - 7).$$

Concluimos que $x = 1$ es mínimo local, pues $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}^2 x}(1) > 0$. Finalmente, para el punto $x = 0$, tenemos

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(0) = 0, \cdots,\ \frac{\mathrm{d}^7 f}{\mathrm{d}x^7}(0) = 0,\ \frac{\mathrm{d}^8 f}{\mathrm{d}x^8}(0) < 0$$

y por tanto $x = 0$ es un máximo local. La gráfica de f se encuentra en la figura 6.4. ◁

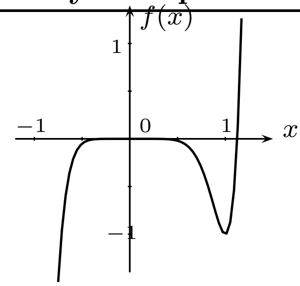

Figura 6.4: Gráfica de la función $f(x) = 8x^9 - 9x^8$

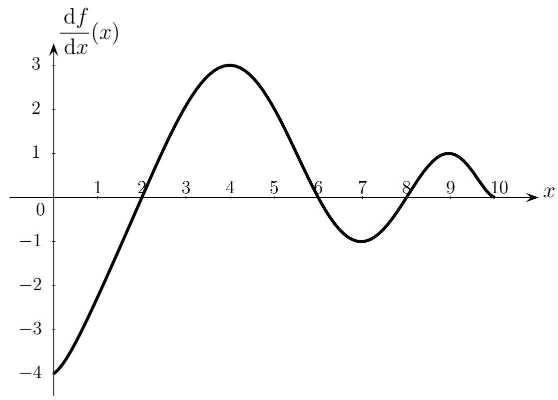

Figura 6.5: Gráfica de $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$

Ejemplo 6.6. Supongamos que la gráfica de la derivada de la función $y = f(x)$ en el intervalo $(0, 10)$ es la que se muestra en la figura 6.5.

Podemos observar las características siguientes de la función f:

(a) Es creciente en los intervalos $[2, 6]$ y $[8, 10)$

ya que en esos intervalos $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ es positiva.

(b) Es decreciente en los intervalos $(0, 2]$ y $[6, 8]$,

puesto que en ellos $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ es negativa.

(c) Es cóncava hacia arriba en los intervalos $(0, 4]$ y $[7, 9]$,

pues ahí $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) > 0$.

(d) Es cóncava hacia abajo en los intervalos $[4, 7]$ y $[9, 10)$,

ya que $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) < 0$ en esos intervalos.

(e) Los puntos $x = 2, 8$ son mínimos locales

pues $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(2) = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(8) = 0$, $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(2) > 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(8) > 0$.

(f) El punto $x = 6$ es un máximo local pues $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(6) = 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(6) < 0$.

(g) Los puntos $x = 4, 7, 9$ son puntos de inflexión ya que

$\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(4) = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(7) = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(9) = 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(4) \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(7) \neq 0$, $\dfrac{\mathrm{d}^3 f}{\mathrm{d}x^3}(9) \neq 0$.

(h) La gráfica de f que cumple estas condiciones y además $f(2) = 0$, aparece en la figura 6.6. ◃

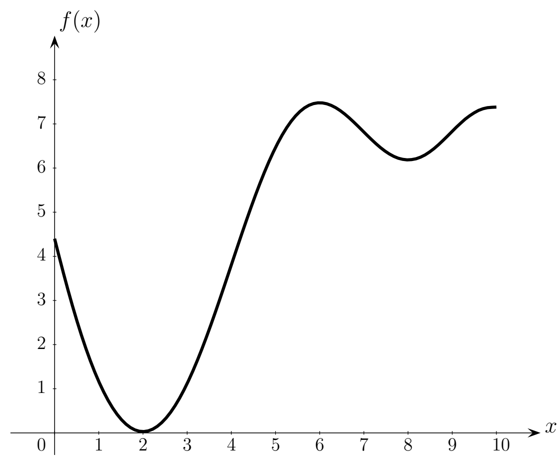

Figura 6.6: Gráfica de f

Ejemplo 6.7. Determine las dimensiones del cilindro de área mínima (incluyendo sus tapaderas) de volumen 1000 cm^3.

Solución. Cada cilindro de volumen 1000 cm^3 está totalmente determinado por el valor de su radio r o el de su altura h ya que se tiene la relación

$$\pi r^2 h = 10^3.$$

Si tomamos el valor del radio r como la variable que define a los cilindros de volumen 10^3 cm^3, entonces su altura $h(r)$ está dada por

$$h(r) = \frac{10^3}{\pi r^2}, \quad \text{para} \quad r > 0.$$

El área A de sus lados y tapaderas es la función $A : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ de la variable independiente r y está dada por

$$A(r) = 2\pi r h(r) + 2\pi r^2 = \frac{2 \cdot 10^3}{r} + 2\pi r^2.$$

Entonces, el problema planteado consiste en determinar el valor de r para el cual $A(r)$ es mínima. Lo anterior nos lleva a determinar los mínimos locales de la función y después el menor de ellos. Los mínimos locales se encuentran entre los puntos r tales que

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}r}(r) = -\frac{2 \cdot 10^3}{r^2} + 4\pi r = 0,$$

es decir,

$$r = 10\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}.$$

Tomando en cuenta que el valor de la segunda derivada en el único punto crítico es

$$\frac{\mathrm{d}^2A}{\mathrm{d}r^2}\left(10\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}\right) = 120\pi > 0,$$

se tiene que dicho punto es mínimo local y entonces el cilindro de área mínima de volumen 1000 cm^3 es aquel cuyas dimensiones son

$$r = 10\sqrt[3]{\frac{1}{2\pi}}, \quad h = \frac{10}{\sqrt[3]{\frac{\pi}{4}}},$$

y el valor del área mínima es

$$A_{\min} = 300\sqrt[3]{2\pi}.$$

Observe que, tomando el radio muy pequeño o muy grande, el área del cilindro de volumen 1000 cm^3 se puede hacer tan grande como se quiera. $\triangleleft$

Ejemplo 6.8. Encuentre las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse en la elipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

y tiene uno de sus lados sobre el eje mayor. Calcule el área máxima.

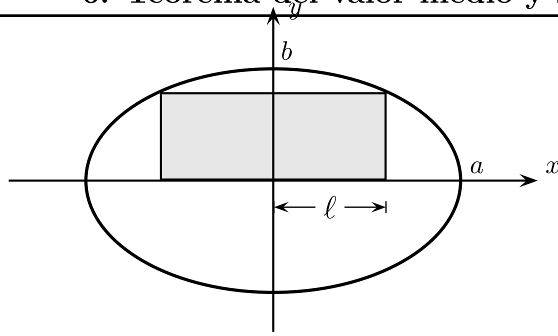

Figura 6.7: El rectángulo del ejemplo 6.8

Solución. De la figura 6.7 observamos que cada rectángulo en cuestión está determinado por el valor del segmento ℓ señalado en la figura y su área es la función $A : (0, a) \to \mathbb{R}$, de la variable ℓ, definida mediante la regla

$$A(\ell) = 2\ell b\sqrt{1 - \frac{\ell^2}{a^2}}, \quad 0 < \ell < a.$$

Luego, el valor de $\ell_{\max}$ que da lugar al rectángulo inscrito de mayor área deberá anular la derivada

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\ell}(\ell_{\max}) = \frac{2b}{a}\frac{a^2 - 2\ell_{\max}^2}{\sqrt{a^2 - \ell_{\max}^2}} = 0.$$

Despejando $\ell_{\max}$ de la fórmula anterior, se tiene

$$\ell_{\max} = \frac{1}{2}\sqrt{2}a.$$

Note que el valor de la segunda derivada en $\ell_{\max}$ es negativa y, por tanto, corresponde a un punto máximo local. Las dimensiones del rectángulo inscrito de área máxima son

$$\text{base} = \sqrt{2}a, \quad \text{altura} = \frac{\sqrt{2}}{2}b,$$

y el área máxima,

$$A_{\max} = ab.$$

Observe que cuando ℓ tiende a cero o tiende a a, el área del rectángulo inscrito correspondiente tiende a cero, es decir, el valor mínimo del área de los rectángulos inscritos en la elipse es cero. ◁

Ejemplo 6.9. Un deportista se encuentra en un punto A al borde de un lago circular de radio r Km y desea llegar al punto C, diametralmente opuesto a A. (Ver figura 6.8).

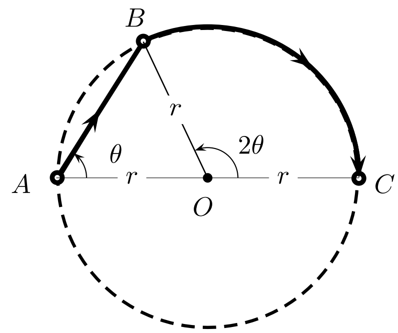

Figura 6.8: Diagrama para el ejemplo 6.9

Si puede correr a razón de v_c Km por hora y remar en un bote a razón de v_r Km por hora, ¿en qué ángulo θ con relación al diámetro debe remar para luego correr sobre el borde del lago para alcanzar el punto opuesto en el menor tiempo posible?

Solución. Cada trayectoria posible está determinada por el ángulo θ y tiene asociado un tiempo $t(\theta)$ de recorrido. La distancia recorrida en el agua es el lado AB del triángulo isósceles AOB, la cual es igual a $2r\cos\theta$, mientras que la distancia recorrida en tierra es igual a la longitud del arco subtendido por el ángulo central 2θ, la cual es igual a $2r\theta$. Entonces, el tiempo de recorrido es la función $t : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}$ dada por

$$t(\theta) = \frac{2r\cos\theta}{v_r} + \frac{2r\theta}{v_c}.$$

Luego, el ángulo $\theta_{\min}$ correspondiente al tiempo mínimo de recorrido debe anular la derivada de $t(\theta)$, es decir

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\theta}(\theta_{\min}) = \frac{-2r\operatorname{sen}\theta_{\min}}{v_r} + \frac{2r}{v_c} = 0.$$

Note que si $0 < \dfrac{v_r}{v_c} < 1$, se tiene un único punto crítico en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, dado por

$$\theta_{\min} = \operatorname{arcsen}\left(\frac{v_r}{v_c}\right)$$

y corresponde a un mínimo local, ya que el valor de la segunda derivada en ese punto toma un valor negativo,

$$\frac{\mathrm{d}^2t}{\mathrm{d}\theta^2}(\theta_{\min}) = \frac{-2r\cos\theta_{\min}}{v_r} < 0.$$

El valor del tiempo correspondiente a $\theta_{\min}$ es

$$\begin{aligned} t(\theta_{\min}) &= \frac{2r\cos\left(\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{v_r}{v_c}\right)\right)}{v_r} + \frac{2r\operatorname{arcsen}\left(\dfrac{v_r}{v_c}\right)}{v_c} \\ &= 2r\left[\frac{1}{v_r}\sqrt{1-\left(\frac{v_r}{v_c}\right)^2} + \frac{1}{v_c}\operatorname{arcsen}\left(\frac{v_r}{v_c}\right)\right], \end{aligned}$$

y define el mínimo absoluto de la función en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$, ya que en los extremos de éste se tiene $t(0) = \dfrac{2r}{v_r}$ y $t\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{r\pi}{v_c}$, los valores de la función $t(\theta)$ deben ser superiores a $t(\theta_{\min})$ por haber sólo un punto crítico en $(0, \frac{\pi}{2})$.

Note que si $\dfrac{v_r}{v_c} \geqslant 1$, entonces el valor mínimo de $t(\theta)$ se alcanza en el extremo izquierdo de $[0, \frac{\pi}{2}]$ con $\theta_{\min} = 0$ y con valor $t(\theta_{\min}) = \dfrac{2r}{v_r}$. $\triangleleft$

6.4.2 Reglas de L'Hospital

A veces es necesario calcular el límite de cocientes de funciones en puntos en los cuales el límite de cada una de las funciones es cero o tienden a $\pm\infty$ simultáneamente. Por ejemplo, límites del tipo

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}, \quad \lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{\dfrac{1}{x^3}+x}}{\dfrac{1}{x}+2}, \quad \lim_{x\to a}\frac{\tan(x-a)}{\csc(x-a)}.$$

En estos casos, el teorema del valor medio generalizado nos permite examinar el comportamiento de las funciones a partir del comportamiento de sus derivadas, proporcionando dos criterios muy útiles en tales casos, que se denominan *reglas de L'Hospital.*[4] Por comodidad en la escritura, para su enunciado y demostración utilizaremos la notación de Lagrange para la derivada.

Proposición 6.3. *(Primera regla de L'Hospital)* Sean f y g dos funciones derivables en (a, b) y $g'(x) \neq 0$ para toda $x \in (a, b)$. Si se tiene que

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L,$$

donde $L \in \mathbb{R}$, o $L = \pm\infty$, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

[4]En honor de Guillaume de L'Hospital (1661-1704), mencionado en el capítulo primero.

Demostración. Obsérvese que si extendemos el dominio de definición de f y g al punto $x = a$, definiéndolas ahí como $f(a) = g(a) = 0$, se tiene una extensión como funciones continuas a $[a, b)$. Aplicando el teorema 6.2 del valor medio generalizado en $[a, x]$, podemos escribir

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)}.$$

donde $c_x \in (a, x)$. Tomando límite cuando $x \to a$, se tiene que $c_x \to a$ y, de la hipótesis, obtenemos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = L,$$

con lo que se prueba la proposición. $\triangleleft$

Nota Importante. *Cuando escribimos* $\lim_{x \to a} h(x)$ *y la función* h *está definida en* (a, b), *nos referimos a que la variable* x *tiende a* a *con valores en el intervalo* (a, b). *Esto se escribe también en la forma* $\lim_{x \to a^+} h(x)$ *para denotar que la variable se acerca de derecha a izquierda hacia el punto* a.

Proposición 6.4. *(Segunda regla de L'Hospital)* Sean f y g dos funciones derivables en (a, b) y $g'(x) \neq 0$ para toda $x \in (a, b)$. Si se tiene que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \pm\infty$ y

$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \quad \text{con } L \in \mathbb{R} \text{ o } L = \pm\infty,$$

entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Demostración. Consideremos $a < x < t$. Luego, en $[x, t]$ tendremos la estimación

$$\frac{f(x) - f(t)}{g(x) - g(t)} = \frac{f'(c_{x,t})}{g'(c_{x,t})}$$

donde $c_{x,t} \in (x, t)$, de la cual podemos obtener la expresión

$$\frac{f(x)}{g(x)} - L = \left(\frac{f'(c_{x,t})}{g'(c_{x,t})} - L\right)\left(1 - \frac{g(t)}{g(x)}\right) + \left(\frac{f(t) - g(t)L}{g(x)}\right);$$

tomando el valor absoluto,

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leqslant \left|\frac{f'(c_{x,t})}{g'(c_{x,t})} - L\right| \left|1 - \frac{g(t)}{g(x)}\right| + \left|\frac{f(t) - g(t)L}{g(x)}\right|. \tag{6.8}$$

Como $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L$, para cada $\varepsilon > 0$ arbitrario podemos encontrar una t tal que

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| \leqslant \varepsilon \quad \text{para toda} \quad x \quad \text{tal que} \quad a < x < t. \tag{6.9}$$

Sustituyendo (6.9) en (6.8) se tiene

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leqslant \left|1 - \frac{g(t)}{g(x)}\right| \varepsilon + \left|\frac{f(t) - g(t)L}{g(x)}\right|.$$

Haciendo ahora tender x a a, se obtiene que

$$\left|\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leqslant \varepsilon,$$

puesto que $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{g(x)} = 0$, y al ser ε arbitrario, resulta que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Para el caso en que $L = \pm\infty$ basta escribir la expresión

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(t)}{g(x)}\right) \frac{f'(c_{x,t})}{g'(c_{x,t})} + \left(\frac{f(t)}{g(x)}\right),$$

y como $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$, se tiene que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L. \triangleleft$$

NOTA IMPORTANTE. *La proposición 6.4 es válida aún en el caso $a = \pm\infty$: basta definir $f_1(x) = f(1/x)$ y $g_1(x) = g(1/x)$ y aplicar la Regla de L'Hospital para esas nuevas funciones cuando $x \to 0^+$ si $a = +\infty$ o $x \to 0^-$ si $a = -\infty$.*

Ejemplo 6.10. Aplicando la regla de L'Hospital, los límites siguientes se calculan directamente:

(a) $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = 1.$

Reescribiendo $x \operatorname{sen} \dfrac{1}{x} = \dfrac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{1/x}$ y tomando en cuenta que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x} = 0,$$

tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\operatorname{sen}\dfrac{1}{x}\right)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\dfrac{1}{x^2}\cos\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \cos\frac{1}{x} = 1.$$

Luego, aplicando la regla de L'Hospital, se tiene que $\lim\limits_{x\to\infty} x \operatorname{sen}\dfrac{1}{x} = 1$.

(b) $\lim\limits_{x\to\infty} x(2\arctan x - \pi) = -2$.

Reescribiendo

$$x(2\arctan x - \pi) = \frac{2\arctan x - \pi}{1/x}$$

y tomando en cuenta que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} (2\arctan x - \pi) = 0,$$

tenemos que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2\arctan x - \pi)}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\dfrac{2}{1+x^2}}{-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{-2x^2}{1+x^2} = -2.$$

Luego, aplicando la regla de l'Hospital, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} x(2\arctan x - \pi) = -2. \triangleleft$$

Ejercicios y problemas del capítulo

Desigualdades y estimaciones

6.4.1. El teorema del valor medio establece que si f es una función continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b), entonces existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)(b - a).$$

Si $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $[1, 7]$, encuentre el valor de c que asegura el teorema del valor medio.

6.4.2. Aplicando el teorema del valor medio, establezca la estimación

$$|\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y| \leqslant |x - y|.$$

6.4.3. *Pruebe, utilizando el teorema del valor medio, que toda función con derivada continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ es lipschitziana. Recuerde que toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es acotada.

6.4.4. *Sean f y g dos funciones continuas en [a,b] y derivables en (a,b). Pruebe que si $\left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\right| < \left|\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x)\right|$ para cada $x \in (a, b)$, entonces

$$|f(b) - f(a)| < |g(b) - g(a)|.$$

6.4.5. *Aplicando el teorema del valor medio, pruebe las desigualdades siguientes.

(a) $\sqrt[m]{1+a} < 1 + \frac{a}{m}$ para $a \geqslant -1$, m un número entero positivo.

(b) $\left|\frac{a}{1+a} - \frac{b}{1+b}\right| \leqslant |a - b|$ para cualesquiera $a, b \in \mathbb{R}$.

6.4.6. *Aplicando el teorema del valor medio, pruebe que si $\alpha = p/q < 1$, entonces $(x + y)^\alpha < x^\alpha + y^\alpha$ para x, y positivas.

6.4.7. *Considere la familia de polinomios $g_n(x) = x^n + x - 1$.

(a) Pruebe que para cada $n \geqslant 2$, g_n tiene una única raíz positiva r_n.

(b) Muestre que la sucesión r_n de raíces positivas es creciente y acotada.

(c) Muestre que la sucesión r_n de raíces positivas es convergente y encuentre el límite.

Comportamiento de funciones derivables

6.4.8. Si la gráfica de la función velocidad de un automóvil se ve cualitativamente como en la figura 6.9, dibuje la gráfica de la posición del auto con respecto al tiempo si ésta era, en el tiempo $t = 1$, de 100 metros medidos a partir del inicio de la carretera. Describa cualitativamente el movimiento del auto.

6.4.9. Sean f y g dos funciones derivables en todo $\mathbb{R}$ y tales que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = g(x)$ y $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x) = f(x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Suponiendo además que $f(0) = 2$ y $g(0) = 0$, demuestre que

$$f^2(x) - g^2(x) = 4 \text{ para cada } x \in \mathbb{R}.$$

6.4.10. Si $f(x) = |x - 1| + |x + 2|$, encuentre los intervalos de monotonía de f y presente su gráfica.

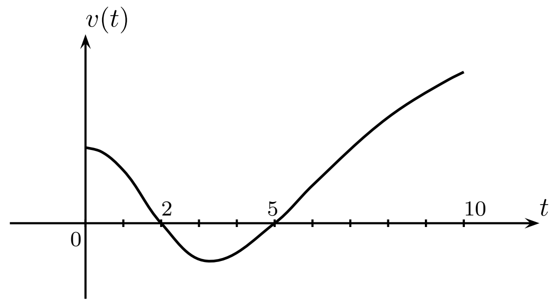

Figura 6.9: Gráfica de la función velocidad para el problema 6.4.8

6.4.11. Encuentre la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(0)=1$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)=|2x-3|$.

6.4.12. Encuentre dónde son crecientes o decrecientes las funciones siguientes y calcule sus máximos y mínimos locales.

(*a*) $f(x)=8x^9-9x^8$; (*b*) $f(x)=7x^9-18x^7$; (*c*) $f(x)=5x^6+6x^5-15x^4$.

6.4.13. Trace la gráfica de una función continua $f:[-1,5]\to\mathbb{R}$ que satisface las condiciones siguientes:

(*i*) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)<0$ para toda $x\in(-1,5)$, (*ii*) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(4)$ no existe,

(*iii*) $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)<0$ si $x\in(-1,4)$ y (*iv*) $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)>0$ si $x\in(4,5)$.

6.4.14. Sea f una función con derivada de orden 3, continua, y supongamos que para un número c se tiene $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c)=\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(c)=0$, $\dfrac{\mathrm{d}^3f}{\mathrm{d}x^3}(c)>0$. Diga si el punto $x=c$ es punto máximo, mínimo o punto de inflexión. Explique sus razones.

6.4.15. Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[-3,3]$ y tal que su primera y segunda funciones derivadas tienen las siguientes características:

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x):\begin{cases} >0 & \text{si } x\in(-3,-1)\\ =0 & \text{si } x=-1\\ <0 & \text{si } x\in(-1,1)\\ =0 & \text{si } x=1\\ <0 & \text{si } x\in(1,3)\end{cases}\qquad \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x):\begin{cases} <0 & \text{si } x\in(-3,0)\\ =0 & \text{si } x=0\\ >0 & \text{si } x\in(0,1)\\ =0 & \text{si } x=1\\ <0 & \text{si } x\in(1,3).\end{cases}$$

(a) ¿En qué puntos de $[-3,3]$ tiene f máximos o mínimos locales?

(b) ¿Qué puntos de $[-3,3]$ son puntos de inflexión?

(c) Si $f(0)=0$, dibuje la gráfica de f señalando sus intervalos de monotonía, sus concavidades y sus valores extremos.

6.4.16. Encuentre la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que $f(0)=1$, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0)=0$ y $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)=|x|$, y diga si el punto $x=0$ es un punto de inflexión.

6.4.17. Para cada uno de los casos siguientes, diga si existe una función dos veces derivable que satisfaga las propiedades enunciadas. Justifique sus respuestas.

(a) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)>0$, $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)>0$ y $f(x)<0$ para cada $x\in\mathbb{R}$.

(b) $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)>0$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)<0$, para cada $x\in\mathbb{R}$.

(c) $\dfrac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)>0$ y $f(x)<0$, para cada $x\in\mathbb{R}$.

6.4.18. Determine los intervalos de monotonía, los puntos regulares, clasifique los puntos críticos y encuentre los puntos de inflexión de las funciones:

(a) $f(x)=\dfrac{1}{5}x^5+x^3+x+2$; (b) $f(x)=7x^9-18x^7$.

6.4.19. *Considere la familia de polinomios de la forma $p(x)=2x^3+cx^2+2x$, donde c es una constante real. Conteste las preguntas siguientes:

(a) ¿Para qué valores de c el polinomio tiene máximos locales?

(b) ¿Para qué valores c el polinomio tiene mínimos locales?

(c) ¿Para qué valores de c el polinomio tiene puntos de inflexión?

6.4.20. *Si f es una función con derivadas continuas de orden cuatro, diga cuáles de los enunciados siguientes son siempre verdaderos y cuáles son a veces falsos, dando en este último caso un ejemplo para probarlo.

(a) Si f es no decreciente en (a,b), entonces $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\geqslant 0$ para toda $x\in(a,b)$.

(b) Si $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\neq 0$ para toda $x\in(a,b)$, entonces f no tiene máximos ni mánimos en (a,b).

(c) Si f tiene dos máximos locales en (a,b), entonces tiene un mínimo local en (a,b).

(d) Si $x_0\in(a,b)$ es un punto de inflexión de f, entonces $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)=0$.

(e) Si $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ es creciente en (a,b), entonces f no tiene puntos de inflexión en (a,b).

(f) Si $x_0\in[a,b]$ es mínimo absoluto de f en $[a,b]$, entonces $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)=0$.

(g) Si $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2} > 0$ en (a, b) entonces f es una función monótona en (a, b).

(h) Si $\dfrac{\mathrm{d}^4 f}{\mathrm{d}x^4} = 0$ en $\mathbb{R}$, entonces f no es acotada en $\mathbb{R}$.

6.4.21. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función; se dice que c es un *punto fijo de* f si $f(c) = c$. Suponga ahora que f es derivable en todo $\mathbb{R}$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \neq 1$ para toda $x \in \mathbb{R}$: (a) muestre con ejemplos que una función con estas propiedades puede o no tener puntos fijos; (b) pruebe que, con estas condiciones, si f tiene un punto fijo, éste es único.

6.4.22. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable para la que existe $c > 0$ tal que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) \geqslant c$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Pruebe que para cada $k \in \mathbb{R}$ existe un único punto x_0 tal que $f(x_0) = k$.

Teorema de Taylor y reglas de L'Hospital

6.4.23. Sean P y Q dos polinomios de grado 2 tales que

$$P(1) = Q(1), \quad \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}x}(1) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}x}(1), \quad \frac{\mathrm{d}^2 P}{\mathrm{d}x^2}(1) = \frac{\mathrm{d}^2 Q}{\mathrm{d}x^2}(1).$$

Pruebe que los dos polinomios son iguales.

6.4.24. Demuestre que si $|x| < \dfrac{1}{2}$, entonces la fórmula aproximada

$$\sqrt{1+x} \simeq 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

da el valor de $\sqrt{1+x}$ con un error menor que $\dfrac{3}{16}|x|^3$.

6.4.25. Aplicando el teorema de Taylor, calcule $\sqrt[3]{1.5}$ con tres cifras decimales.

6.4.26. Aplicando las reglas de L'Hospital, evalúe los límites siguientes:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x - \pi}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 0+} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x - \tan x}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arcsen} x}{\arctan x}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{3\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 3x}{3\tan x - \tan 3x}$.

6.4.27. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) < 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. Sea a un punto dado y la función

$$F(x) = f(a) + \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)(x - a) - f(x).$$

Muestre que $F(x) > 0$ para toda $x \neq a$.

6.4.28. *Aplicando la regla de L'Hospital, demuestre que:

(a) Si f tiene derivada continua en x entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}=\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x).$$

(b) Si f tiene segunda derivada continua en x, entonces

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-2f(x)+f(x-h)}{h^2}=\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x).$$

6.4.29. *Sea f una función continua en $[a,b]$ con segunda derivada en (a,b) tal que $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x)>0$, entonces $f(\alpha a+\beta b)>\alpha f(a)+\beta f(b)$.

Cálculo y aplicaciones de máximos y mínimos

6.4.30. ¿En qué puntos de la curva $y=-x^3+3x^2+1$ la pendiente de la recta tangente alcanza el valor máximo?

6.4.31. Para la función $f(x)=x^3-3x^2-9x$ definida en $[-2,2]$, determine los puntos en los que f alcanza sus valores máximo y mínimo absolutos, respectivamente.

6.4.32. De las ventanas con perímetro 10 m y cuya forma es la unión de un rectángulo y un semicírculo cuyo diámetro coincide con el lado superior del rectángulo, encuentre aquella que deja pasar la mayor cantidad de luz.

6.4.33. Encuentre las dimensiones del cono circular recto de volumen mínimo que pueda contener a la esfera de radio 4.

6.4.34. Encuentre las dimensiones del cilindro de área mínima, incluyendo las tapaderas, con volumen de 1 litro.

6.4.35. Encuentre las dimensiones del rectángulo de mayor área y perímetro 4 metros.

6.4.36. Encuentre el número real x positivo tal que la suma de ese número y el recíproco de su cuadrado tiene el valor mínimo.

6.4.37. Encuentre la distancia más corta del punto $\left(0,\frac{5}{2}\right)$ a la curva $y=\frac{1}{8}x^4$.

6.4.38. ¿Cuáles son las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede dibujarse dentro del triángulo rectángulo de lados 3, 4 y 5 y tal que uno de sus lados descansa sobre la hipotenusa.

6.4.39. Una pieza cuadrada de cartón de 3 m^2 es usada para construir una caja rectangular abierta por arriba, cortando cuadrados iguales en las esquinas y doblando hacia arriba a lo largo de las aristas definidas por los cortes. Encuentre las dimensiones de la caja de mayor volumen que se puede construir.

6.4.40. Un barco A está anclado a 9 Km de la costa y un barco B está anclado a 3 Km de ella. La distancia entre los barcos a lo largo de la costa es de 6 Km. Un bote parte de A llevando un pasajero a la costa para despues alcanzar al barco B. Vea la figura 6.10.

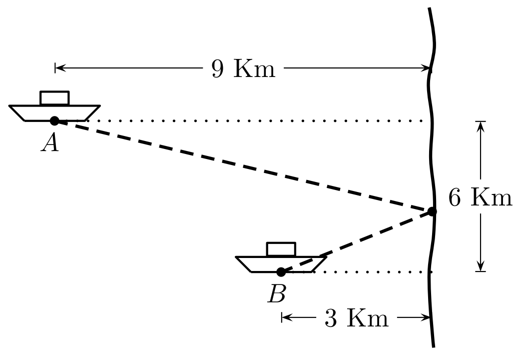

Figura 6.10:

(a) ¿Cuál es la trayectoria más corta que puede tomar el bote para cumplir su cometido?

(b) Supongamos que el pasajero debe pagar al encargado del bote la cantidad de 100 pesos por cada kilómetro que cubra su viaje a la costa, mientras que el encargado debe pagar 100 pesos por cada kilómetro recorrido de la costa al barco B. Determine la trayectoria más redituable para el encargado del bote.

6.4.41. *¿Cuál es el área máxima de un rectángulo circunscrito a otro rectángulo de base b y altura h.? Ver figura 6.11.

6.4.42. *Sean A, B dos puntos de la parábola $y = x^2$. Encuentre la posición del punto P sobre la parábola y entre los puntos A y B tal que el área del triángulo APB sea máxima.

6.4.43. *Sea $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ derivable en un punto $x_0 \in (a,b)$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) > 0$. Pruebe que existe un intervalo $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subset (a,b)$ donde f es creciente con respecto a su valor en x_0, es decir, $f(x_0 + h) < f(x_0 + k)$ para cada $x_0 + h < x_0 + k$ con $0 > h > -\varepsilon$ y $0 < k < \varepsilon$.

6.4.44. *Pruebe que si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es derivable y para $c < d$, puntos de (a,b), se tiene $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) < 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(d) > 0$, entonces existe $x_0 \in (c,d)$ donde $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$.

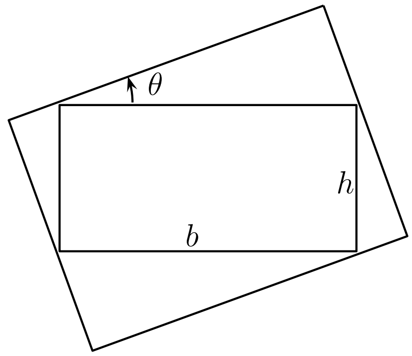

Figura 6.11: Diagrama para el problema 6.4.41

6.4.45. *Bajo las hipótesis del problema 6.4.44, demuestre que, en general, si $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(c) < y_0 < \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(d)$, existe $x_0 \in (c, d)$ donde $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = y_0$. Lo anterior muestra que la función derivada tiene siempre la propiedad del valor intermedio. A este resultado se le conoce como *teorema de Darboux.*[5]

[5]Por Jean Gaston Darboux (1842-1917), matemático francés.