Capítulo 5

Medida de la razón de cambio: la derivada

La derivada de una función real de variable real $y = f(x)$ es el concepto que da sentido matemático a la razón de cambio puntual o movimiento instantáneo. Tomando en cuenta que, en una función, a cada variación de la variable independiente con respecto a un valor inicial x_0, corresponde una variación de la variable dependiente con respecto al valor $f(x_0)$, se define la derivada o razón de cambio puntual (o instantáneo) en x_0 como el límite de los cocientes de las variaciones de esas variables cuando la variación de la variable independiente tiende a cero.

En el caso de la función de posición de un cuerpo físico con respecto al tiempo, la derivada corresponde a la noción de velocidad instantánea, que así resulta definida como el límite de las velocidades promedio tomadas en intervalos de tiempo cuya duración tiende a cero. Las características de la derivada hacen de ésta el concepto matemático adecuado para la formulación de las leyes dinámicas en las ciencias naturales.

Por otro lado, para la curva en el plano cartesiano que define la gráfica de una función, la derivada es el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en el punto correspondiente, obteniéndose así una interpretación geométrica para la derivada que sienta las bases para el estudio analítico de curvas y superficies.

En este capítulo se deducen las propiedades principales de la derivada a partir de su definición, así como las reglas para su cálculo cuando intervienen las distintas operaciones entre funciones. Se introduce también el concepto de derivada de orden superior y se calcula la función derivada de las principales funciones elementales.

5.1 Definición de derivada

Consideremos una función real de variable real f definida en un intervalo abierto (a, b). Sea x_0 un elemento de (a, b). La manera natural de comparar la variación que muestra el valor de la variable dependiente $y = f(x)$ cuando el valor de la variable independiente x experimenta en x_0 una variación o incremento $h \neq 0$, es considerar el cociente

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}. \tag{5.1}$$

Al cociente (5.1) lo llamaremos *cociente diferencial de la función en el punto x_0 correspondiente a la variación de magnitud h de la variable independiente* y lo denotaremos con $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h)$.

Ejemplo 5.1. Para la función

$$y = f(x) = x^2,$$

el cociente diferencial en el punto $x_0 = 2$ correspondiente a la variación de magnitud $h = \frac{1}{10}$, es el número

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(2)\left(\frac{1}{10}\right) = \frac{f\left(2 + \frac{1}{10}\right) - f(2)}{\frac{1}{10}} = \frac{(2 + \frac{1}{10})^2 - 4}{\frac{1}{10}} = \frac{41}{10}.$$

Análogamente, el cociente diferencial de la función en el punto $x_0 = 2$ correspondiente a una variación de magnitud $h = -2/5$ es el número

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(2)\left(-\frac{2}{5}\right) = \frac{f\left(2 - \frac{2}{5}\right) - f(2)}{-\frac{2}{5}} = \frac{(2 - \frac{2}{5})^2 - 4}{-\frac{2}{5}} = \frac{36}{10}.$$

En general, para una variación de magnitud h en el punto $x_0 = 2$, el cociente diferencial de la función $y = f(x) = x^2$ toma el valor

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}(2)(h) = \frac{(2 + h)^2 - (2)^2}{h} = 4 + h. \triangleleft$$

Ejemplo 5.2. Supongamos que una partícula se mueve a lo largo de una línea recta y que la variable $d = d(t)$ mide su posición en el instante t con respecto a un punto de referencia dado. El cociente diferencial en un tiempo t_0 y para una variación de magnitud h en el tiempo, es la distancia recorrida en el intervalo de tiempo $[t_0, t_0 + h]$ dividida por el tiempo transcurrido (es decir, h):

$$\frac{\Delta d}{\Delta t}(t_0)(h) = \frac{d(t_0 + h) - d(t_0)}{h}, \qquad h \neq 0.$$

A este valor se le conoce como *velocidad media de la partícula en el intervalo de tiempo* $[t_0, t_0 + h]$ (o el intervalo $[t_0 + h, t_0]$ si $h < 0$):

$$\text{Velocidad media en } [t_0, t_0 + h] = \frac{\Delta d}{\Delta t}(t_0)(h). \triangleleft$$

Nota Importante. *La magnitud h de la variación de la variable independiente siempre se toma distinta de cero y el valor del cociente diferencial de una función en un punto x_0 depende del valor de h. En este sentido, el cociente diferencial de una función en el punto x_0 es una función de la magnitud h de la variación de la variable independiente.*

A partir del concepto de cociente diferencial en un punto x_0, enunciamos a continuación la definición de *derivada de la función f en el punto x_0.*

Definición 5.1. Sea $y = f(x)$ una función real definida en el intervalo (a, b) y x_0 un valor de la variable independiente en (a, b). Se define *la derivada de la función f en el punto x_0* como el límite (cuando éste exista) del cociente diferencial de la función en x_0 cuando la magnitud h de la variación de la variable independiente tiende a cero. Cuando existe la derivada de la función f en un punto x_0 ésta se denota[1] con $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$; es decir,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

y se dice que la función es *derivable en x_0.*

Ejemplo 5.3. Para la función $f(x) = x^2$, la derivada en el punto $x_0 = 2$ tiene el valor 4, pues aplicando la definición se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}(x^2)}{\mathrm{d}x}(2) = \lim_{h\to 0} \frac{(2 + h)^2 - (2)^2}{h} = \lim_{h\to 0}(4 + h) = 4. \triangleleft$$

Ejemplo 5.4. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 5 & \text{si} \quad x < 1 \\ x^2 + x & \text{si} \quad x \geqslant 1, \end{cases}$$

[1] Esta notación se debe a Leibniz. Otra notación es $\dot{y}(x_0)$, utilizada por Newton y que se reserva actualmente para los casos en los que la variable independiente es el tiempo. Una tercera notación, debida a Lagrange, es $y'(x_0)$ o $f'(x_0)$, la cual es muy utilizada en ecuaciones diferenciales.

tiene derivada en $x_0 = 1$, pues si $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de variaciones cuya magnitud tiende a cero, la sucesión de cocientes diferenciales toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f}{\Delta x}(1)(h_n) &= \frac{f(1+h_n)-f(1)}{h_n}\\ &= \begin{cases}\dfrac{3(1+h_n)+5-8}{h_n} = 3 & \text{si} \quad h_n < 0\\ \dfrac{(1+h_n)^2+(1+h_n)-2}{h_n} = h_n + 3 & \text{si} \quad h_n > 0.\end{cases}\end{aligned}$$

Al tomar el límite cuando $h_n \to 0$, obtenemos que la sucesión de cocientes diferenciales converge a 3. Luego, $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = 3$. ◁

Nota Importante. *Es posible que una función no posea derivada en algunos de los puntos de su dominio. Por ejemplo, la función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = |x|$$

no posee derivada en $x = 0$, *ya que el cociente diferencial toma la forma*

$$\frac{\Delta|x|}{\Delta x}(0)(h) = \begin{cases}\dfrac{|h|}{h} = -1 & \textit{si} \quad h < 0\\ \dfrac{|h|}{h} = 1 & \textit{si} \quad h > 0.\end{cases}$$

Luego, si tomamos una sucesión convergente a cero de variaciones positivas $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(h_n > 0)$, *la sucesión de los cocientes diferenciales convergerá a* 1, *mientras que si tomamos una sucesión convergente a cero de variaciones negativas* $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(h_n < 0)$ *la sucesión de los cocientes diferenciales convergerá a* -1. *Al no existir un límite único cuando las variaciones* h *tienden a cero, la función no tiene derivada en* $x = 0$. *En términos de la gráfica de la función alrededor del punto* $x = 0$, *se observa que esa curva no tiene una recta tangente en el punto (0,0) pues mientras las rectas secantes correspondientes a incrementos positivos de la variable independiente tienen todas pendiente 1, las rectas secantes correspondientes a incrementos negativos de la variable* x *tienen todas pendiente* -1 *y no se define una recta tangente única para ambos lados del punto* $x = 0$.

Si la función $y = f(x)$ tiene por dominio un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, se dice que es derivable en el punto extremo a si para cada sucesión $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$de variaciones positivas $h_n > 0$, la sucesión correspondiente de cocientes diferenciales converge. A ese valor se le llama *derivada por la derecha* *en* $x = a$. Análogamente se define la *derivada por la izquierda* en el extremo b del intervalo $[a, b]$. En general, diremos que la función f es derivable en todos los puntos de un intervalo I, si lo es en los puntos interiores y en los extremos posee derivada por la derecha o por la izquierda, según sea el caso.

Una propiedad natural que tiene toda función que es derivable en un punto, es que es continua en ese punto; probaremos ésto con la proposición siguiente.

Proposición 5.1. Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, es una función derivable en x_0, entonces f es una función continua en x_0.

Demostración. Debemos demostrar que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ o, equivalentemente, que $\lim_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = 0$. Tomemos una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergente a x_0 con $x_i \neq x_0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$, y consideremos la sucesión de variaciones $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} = \{x_i - x_0\}_{i=1}^{\infty}$, que es una sucesión convergente a cero. Entonces, para probar que la función es continua en x_0, debemos mostrar que la sucesión $\{f(x_0 + h_i) - f(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente a cero. Al escribir

$$\{f(x_0 + h_i) - f(x_0)\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{f(x_0 + h_i) - f(x_0)}{h_i}\right\}_{i=1}^{\infty} \{h_i\}_{i=1}^{\infty}$$

vemos que la sucesión $\left\{\frac{f(x_0 + h_i) - f(x_0)}{h_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente a $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ ya que, por hipótesis, la función f tiene derivada en x_0. Por tanto, en el lado derecho tenemos un producto de sucesiones convergentes, de las cuales una de ellas es convergente a cero. Luego, por el teorema 4.1, el producto de las sucesiones será convergente a cero, con lo cual se demuestra que

$$\{f(x_0 + h_i) - f(x_0)\}_{i=1}^{\infty} \to 0,$$

y entonces la función f es continua en x_0. $\triangleleft$

Nota Importante. *La proposición 5.1 afirma que la continuidad en el punto es necesaria para la existencia de la derivada, sin embargo, la continuidad en el punto no es suficiente para asegurar la existencia de la derivada, como lo muestra la función* $f(x) = |x|$ *en el punto* $x = 0$, *la cual no es derivable en ese punto a pesar de ser continua.*

5.1.1 Interpretación geométrica de la derivada

En términos de la gráfica de la función $y = f(x)$, para cada variación de magnitud h de la variable independiente con respecto al valor inicial x_0, el cociente diferencial $\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ es la pendiente de la recta

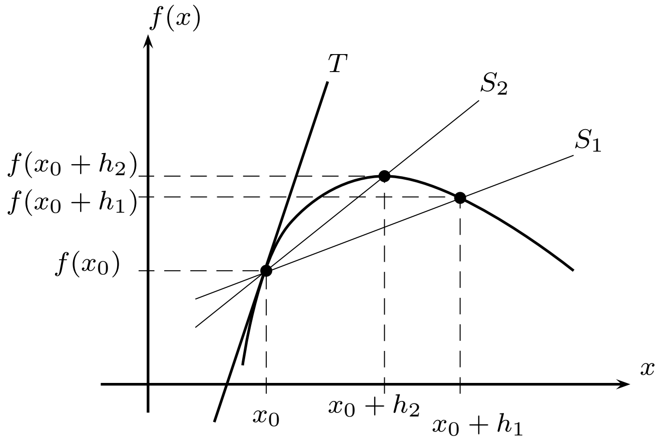

Figura 5.1: Las rectas secantes $S_1, S_2, \ldots,$ tienden a T, la recta tangente a la gráfica en el punto $(x_0, f(x_0))$, cuando $h \to 0$.

secante a la gráfica de la función f que pasa por los puntos $(x_0, f(x_0))$ y $(x_0+h, f(x_0+h))$, como se observa en la figura 5.1.

Así, la derivada en el punto x_0 es el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando el segundo punto $(x_0+h, f(x_0+h))$ sobre la gráfica se toma cada vez más cercano al punto inicial $(x_0, f(x_0))$. En los términos geométricos anteriores, la derivada de f en el punto x_0 coincide con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto $(x_0, f(x_0))$. Por lo contrario, el que la función f no posea derivada en el punto x_0 significa que la curva que define la gráfica de la función no tiene recta tangente en el punto $(x_0, f(x_0))$. Este último es el caso de la gráfica de la función $f(x) = |x|$ en el punto $(0, 0)$.

Cuando se tiene la posición en función del tiempo, $d = d(t)$, la derivada en un instante t_0 es el número al cual tienden las velocidades medias en intervalos de la forma $[t_0, t_0+h]$, cuando la duración h del intervalo tiende a cero, y se interpreta como la *velocidad instantánea en* t_0**.** Dicho de otra manera, la velocidad instantánea en el instante t_0 es el límite de las velocidades promedio tomadas sobre intervalos de tiempo alrededor de t_0 con duración cada vez más y más pequeña.

5.1.2 Derivada de algunas funciones elementales

A continuación calcularemos la derivada de algunas funciones elementales utilizando directamente la definición 5.1. Después, luego de haber presentado las reglas principales de derivación, aumentaremos la lista de funciones y sus derivadas mediante la aplicación de esas reglas.

En lo que sigue, x_0 es un valor de la variable independiente en el que la función en cuestión es diferenciable y $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión de variaciones tal que $h_i \neq 0$ para todo $i = 1, 2, 3, \ldots$, y $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \to 0$.

1. La derivada en x_0 de la función constante $f(x) = c$ es igual a cero:

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0. \tag{5.2}$$

Para probarlo, consideramos la sucesión correspondiente de cocientes diferenciales

$$\frac{\Delta c}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{c - c}{h_i} = 0.$$

Esta sucesión es constante; su valor es cero para $i = 1, 2, 3, \ldots$, y, por tanto, converge a cero. Luego,

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0.$$

2. La derivada en x_0 de la función identidad $f(x) = x$ es igual a uno:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}(x_0) = 1.$$

La sucesión correspondiente de cocientes diferenciales,

$$\frac{\Delta x}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{x_0 + h_i - x_0}{h_i} = \frac{h_i}{h_i} = 1$$

es constante e igual a uno y, por tanto, converge a uno. Luego,

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x}(x_0) = 1.$$

3. La derivada en x_0 de la función $f(x) = x^2$ es igual a $2x_0$:

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}(x_0) = 2x_0.$$

La sucesión correspondiente de cocientes diferenciales toma la forma

$$\frac{\Delta x^2}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{(x_0 + h_i)^2 - x_0^2}{h_i} = 2x_0 + h_i,$$

y, tomando el límite, tenemos que

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta x^2}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \lim_{h_i \to 0}(2x_0 + h_i) = 2x_0.$$

Así,

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}x}(x_0) = 2x_0.$$

4. La derivada en x_0 de la función $f(x) = x^k$, donde k es un número natural, es igual a kx_0^{k-1} :

$$\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}x}(x_0) = kx_0^{k-1}. \tag{5.3}$$

Consideramos la sucesión correspondiente de cocientes diferenciales

$$\frac{\Delta x^k}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{(x_0 + h_i)^k - x_0^k}{h_i}.$$

Por el teorema del binomio tenemos

$$(x_0 + h_i)^k = \sum_{j=0}^{j=k} \frac{k!}{j!(k-j)!} x_0^{k-j} h_i^j,$$

y, entonces, el cociente diferencial es

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta x^k}{\Delta x}(x_0)(h_i) &= \frac{1}{h_i}\left[\sum_{j=0}^{j=k} \frac{k!}{j!(k-j)!} x_0^{k-j} h_i^j - x_0^k\right] \\
&= \frac{1}{h_i} \sum_{j=1}^{j=k} \frac{k!}{j!(k-j)!} x_0^{k-j} h_i^j = \\
&= kx_0^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} x_0^{k-2} h_i \\
&\quad + \frac{k(k-1)(k-3)}{3!} x_0^{k-3} h_i^2 + \cdots + kx_0 h_i^{k-1} + h_i^k.
\end{aligned}$$

Calculando el límite cuando $h_i \to 0$ obtendremos

$$\begin{aligned}
\lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta x^k}{\Delta x}(x_0)(h_i) &= \lim_{h_i \to 0} \left[kx_0^{k-1} + \frac{k(k-1)}{2} x_0^{k-2} h_i \right. \\
&\quad \left. + \frac{k(k-1)(k-3)}{3!} x_0^{k-3} h_i^2 + \cdots + kx_0 h_i^{k-1} + h_i^k\right] \\
&= kx_0^{k-1},
\end{aligned}$$

ya que el límite de cada uno de los términos que contiene alguna potencia de h_i es cero.

5. La derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen} x$ en el punto x_0 es igual a $\cos x_0$:

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{sen} x}{\mathrm{d}x}(x_0) = \cos x_0. \tag{5.4}$$

Consideramos la sucesión correspondiente de cocientes diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \operatorname{sen} x}{\Delta x}(x_0)(h_i) &= \frac{\operatorname{sen}(x_0+h_i) - \operatorname{sen} x_0}{h_i} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x_0 \cos h_i + \cos x_0 \operatorname{sen} h_i - \operatorname{sen} x_0}{h_i} = \\ &= \cos x_0 \frac{\operatorname{sen} h_i}{h_i} + \operatorname{sen} x_0 \left(\frac{\cos h_i - 1}{h_i}\right).\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$\lim_{h_i\to 0} \frac{\operatorname{sen} h_i}{h_i} = 1 \quad \text{y} \qquad \lim_{h_i\to 0} \frac{\cos h_i - 1}{h_i} = 0,$$

tenemos

$$\frac{\mathrm{d} \operatorname{sen} x}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h_i\to 0} \frac{\Delta \operatorname{sen} x}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \cos x_0.$$

6. La derivada de la función $f(x) = \csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$ en el punto $x_0 \neq k\pi$ para $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \cdots$ es igual a $-\cot x_0 \csc x_0$:

$$\frac{\mathrm{d}\csc(x)}{\mathrm{d}x}(x_0) = -\cot x_0 \csc x_0.$$

Consideramos la sucesión correspondiente de cocientes diferenciales

$$\begin{aligned}\frac{\Delta \csc x}{\Delta x}(x_0)(h_i) &= \frac{\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x_0+h_i)} - \dfrac{1}{\operatorname{sen} x_0}}{h_i} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x_0 - \operatorname{sen}(x_0+h_i)}{h_i \operatorname{sen}(x_0+h_i) \operatorname{sen} x_0} = \\ &= \frac{\operatorname{sen} x_0 - \operatorname{sen}(x_0+h_i)}{h_i} \frac{1}{\operatorname{sen}(x_0+h_i)} \frac{1}{\operatorname{sen} x_0}.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que

$$\lim_{h_i\to 0} \frac{\operatorname{sen}(x_0+h_i) - \operatorname{sen} x_0}{h_i} = \cos x_0$$

y que $\operatorname{sen} x_0 \neq 0$, se tiene

$$\lim_{h_i\to 0} \frac{1}{\operatorname{sen}(x_0+h_i)} = \frac{1}{\operatorname{sen} x_0}.$$

Ahora, tomando límite al cociente diferencial cuando $h_i \to 0$ y aplicando las propiedades de las sucesiones convergentes, se obtiene

$$\frac{\mathrm{d}\csc x}{\mathrm{d}x}(x_0) = -\frac{\cos x_0}{\operatorname{sen}^2 x_0} = -\cot x_0 \cdot \csc x_0.$$

5.1.3 Reglas básicas de la derivación de funciones

Cinco son las reglas básicas de derivación para funciones construidas utilizando las operaciones básicas entre funciones derivables. Aplicando esas reglas, podremos calcular las derivadas de todas aquellas funciones que se forman sumando, multiplicando o componiendo funciones derivables.

Teorema 5.1. Sean $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones derivables en un punto $x_0 \in (a, b)$; sea (c, d) un intervalo tal que $f(a, b) \subset (c, d)$ y sea $q : (c, d) \to \mathbb{R}$ una función derivable en el punto $f(x_0) \in (c, d)$. Denotemos por x los puntos en (a, b) y por y los puntos en (c, d). Entonces son válidas las reglas siguientes:

1. Regla de derivación de la suma de funciones.

   La función suma $f + g : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en x_0 y

$$\frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0). \tag{5.5}$$

2. Regla de Leibniz o de derivación de la multiplicación de funciones.

   La función $f \cdot g : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en x_0 y

$$\frac{\mathrm{d}(f \cdot g)}{\mathrm{d}x}(x_0) = f(x_0)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0) + g(x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0). \tag{5.6}$$

   Consecuencia inmediata de (5.6) y (5.2) es la siguiente.

   Si $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\frac{\mathrm{d}(c\,f)}{\mathrm{d}x}(x_0) = c\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0). \tag{5.7}$$

3. Regla de derivación de un cociente de funciones.

   Si f es derivable en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces la función $1/f$ está definida en un intervalo alrededor de x_0, es derivable en x_0 y

$$\frac{\mathrm{d}\,(1/f)}{\mathrm{d}x}(x_0) = -\frac{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}{f(x_0)^2}. \tag{5.8}$$

4. Regla de la cadena (derivación de una composición de funciones).

   La función composición $q \circ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es derivable en el punto x_0 y

$$\frac{\mathrm{d}(q \circ f)}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}(f(x_0)) \cdot \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0). \tag{5.9}$$

5. Regla de derivación de la función inversa.

   Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en el punto $x_0 \in (a, b)$ con $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \neq 0$. Si f posee función inversa $f^{-1} : [c, d] \to [a, b]$, entonces la inversa f^{-1} es derivable en $y_0 = f(x_0)$ y

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(f(x_0)) = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}, \tag{5.10}$$

   o, de manera equivalente:

$$\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(y_0) = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(f^{-1}(y_0))}. \tag{5.11}$$

Demostración. Sean las variaciones $h_i \neq 0, i = 1, 2, 3, \ldots$, con $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \to 0$.

1. La sucesión de cocientes diferenciales en x_0 de la función suma $f + g$ correspondientes a esas variaciones, toma la forma

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(f+g)}{\Delta x}(x_0)(h_i) &= \frac{(f+g)(x_0+h_i) - (f+g)(x_0)}{h_i} = \\ &= \frac{f(x_0+h_i) - f(x_0) + g(x_0+h_i) - g(x_0)}{h_i} = \\ &= \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h_i) + \frac{\Delta g}{\Delta x}(x_0)(h_i).\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que para las funciones f y g la sucesión de cocientes diferenciales tiende a su respectiva derivada en el punto x_0 cuando las variaciones h_i tienden a cero, es decir, que

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) \quad \text{y} \quad \lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0),$$

y observando que la sucesión de cocientes diferenciales para la función suma $f + g$ es la suma de las sucesiones de cocientes diferenciales para f y g, respectivamente, al aplicar el teorema 4.1 tenemos que

$$\lim_{h_i \to 0} \frac{\Delta(f+g)}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

2. Para probar la regla de Leibniz (fórmula (5.6)), escribamos la sucesión de cocientes diferenciales correspondiente al producto $f \cdot g$ de funciones

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(f\cdot g)}{\Delta x}(x_0)(h_i) &= \frac{(f\cdot g)(x_0+h_i)-(f\cdot g)(x_0)}{h_i} = \\ &= \frac{f(x_0+h_i)\cdot g(x_0+h_i)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{h_i}.\end{aligned}$$

Al sumar y restar el término $f(x_0+h_i)\cdot g(x_0)$ en el numerador, obtenemos

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(f\cdot g)}{\Delta x}(x_0)(h_i) &= \frac{1}{h_i}\Big[f(x_0+h_i)g(x_0+h_i)-f(x_0+h_i)g(x_0) \\ &\quad +f(x_0+h_i)g(x_0)-f(x_0)g(x_0)\Big] \\ &= f(x_0+h_i)\frac{g(x_0+h_i)-g(x_0)}{h_i}+g(x_0)\frac{f(x_0+h_i)-f(x_0)}{h_i} \\ &= f(x_0+h_i)\frac{\Delta g}{\Delta x}(x_0)(h_i)+g(x_0)\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h_i),\end{aligned}$$

de donde se obtiene que

$$\begin{aligned}\left\{\frac{\Delta(f\cdot g)}{\Delta x}(x_0)(h_i)\right\}_{i=1}^{\infty} &= \{f(x_0+h_i)\}_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{\Delta g}{\Delta x}(x_0)(h_i)\right\}_{i=1}^{\infty}+ \\ &\quad +\{g(x_0)\}_{i=1}^{\infty}\left\{\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h_i)\right\}_{i=1}^{\infty}.\end{aligned}$$

Las sucesiones de la derecha son convergentes por las razones siguientes:

$\{f(x_0+h_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$ pues f es continua en x_0;

$\left\{\frac{\Delta g}{\Delta x}(x_0)(h_i)\right\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0)$ pues g es derivable en x_0;

$\{g(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $g(x_0)$ por ser una sucesión constante;

$\left\{\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h_i)\right\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$ pues f es derivable en x_0.

Entonces, por el teorema 4.1, la sucesión de cocientes diferenciales de la función producto, $\left\{\frac{\Delta(f\cdot g)}{\Delta x}(x_0)(h_i)\right\}_{i=1}^{\infty}$, convergerá, y así tendremos

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}(f\cdot g)}{\mathrm{d}x}(x_0) &= \lim_{h_i\to 0}\left\{\frac{\Delta(f\cdot g)(x)}{\Delta x}(x_0)(h_i)\right\}_{i=1}^{\infty} = \\ &= g(x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)+f(x_0)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(x_0).\end{aligned}$$

3. Para probar (5.8), escribamos la sucesión de cocientes diferenciales correspondiente a la función $1/f$:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\,(1/f)}{\Delta x}(x_0)(h_i) &= \frac{1}{h_i}\left(\frac{1}{f(x_0+h_i)} - \frac{1}{f(x_0)}\right) = \\ &= -\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h_i}\frac{1}{f(x_0+h_i)}\frac{1}{f(x_0)} = \\ &= -\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h_i)\frac{1}{f(x_0+h_i)}\frac{1}{f(x_0)}.\end{aligned}$$

Tomando en cuenta que f es derivable en x_0, tenemos

$$\lim_{h_i\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0),$$

y, por la continuidad de f en x_0 y el hecho de que $f(x_0) \neq 0$,

$$\lim_{h_i\to 0}\frac{1}{f(x_0+h_i)} = \frac{1}{f(x_0)}.$$

Tomando el límite cuando $i \to \infty$ en la sucesión de cocientes diferenciales, y aplicando el teorema 4.1, tenemos:

$$\frac{\mathrm{d}\,(1/f)}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h_i\to 0}\frac{\Delta\,(1/f)}{\Delta x}(x_0)(h_i) = -\frac{1}{f(x_0)^2}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

4. La sucesión de cocientes diferenciales correspondiente a la composición de funciones $q \circ f$ es

$$\frac{\Delta(q\circ f)}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{q(f(x_0+h_i)) - q(f(x_0))}{h_i}.$$

Sea ahora la sucesión $\{k_i\}_{i=1}^{\infty} = \{f(x_0+h_i) - f(x_0)\}_{i=1}^{\infty}$, y observemos que $\{k_i\}_{i=1}^{\infty} \to 0$ ya que f es continua en x_0. Aquí distinguiremos dos casos:

(i) Existe una etiqueta N tal que $k_i \neq 0$ para $i > N$. En este caso, podremos dividir entre k_i y hacer para $i > N$ la siguiente estimación:

$$\begin{aligned}\frac{\Delta(q\circ f)}{\Delta x}(x_0)(h_i) &= \frac{q(f(x_0+h_i)) - q(f(x_0))}{h_i} \\ &= \frac{q(f(x_0)+k_i)) - q(f(x_0))}{k_i}\cdot\frac{k_i}{h_i} \\ &= \frac{q(f(x_0)+k_i)) - q(f(x_0))}{k_i}\cdot\frac{f(x_0+h_i) - f(x_0)}{h_i} \\ &= \frac{\Delta q}{\Delta y}(f(x_0))(k_i)\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h_i),\end{aligned}$$

donde $y = f(x)$.

Tomando el límite de los cocientes diferenciales $\dfrac{\Delta(q\circ f)}{\Delta x}(x_0)(h_i)$ cuando $h_i \to 0$, se tendrá

$$\lim_{h_i\to 0}\frac{\Delta(q\circ f)}{\Delta x}(x_0)(h_i) = \frac{\mathrm{d}(q\circ f)}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}(f(x_0))\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$$

puesto que, por hipótesis, $\dfrac{\Delta q}{\Delta y}(f(x_0))(k_i)$ converge a $\dfrac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}(f(x_0))$ y $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}(x_0)(h_i)$ converge a $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)$.

(ii) Si existiera una sucesión de etiquetas $\{m_i\}_{i=1}^{\infty} \to \infty$ tales que

$$k_{m_i} = f(x_0 + h_{m_i}) - f(x_0) = 0,$$

se tendría entonces que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0$ y la sucesión de cocientes de la composición sería una sucesión de ceros,

$$\frac{\Delta(q\circ f)}{\Delta x}(x_0)(h_{m_i}) = \frac{q(f(x_0+h_{m_i})) - q(f(x_0))}{h_{m_i}} = 0,$$

por lo que

$$\frac{\mathrm{d}q\circ f}{\mathrm{d}x}(x_0) = \lim_{h_i\to 0}\frac{\Delta(q\circ f)}{\Delta x}(x_0)(h_{m_i}) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}(f(x_0))\cdot\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 0.$$

Es decir, en ambos casos se obtiene la misma fórmula para el límite de los cocientes diferenciales, lo que demuestra la validez de la regla de la cadena (5.9).

5. Como f es continua y posee inversa, en virtud del corolario 4.1, f es una función monótona que supondremos creciente. Para probar que la función inversa $x = f^{-1}(y)$ es derivable en $y_0 = f(x_0)$, tomemos una sucesión de variaciones $\{f(x_0)+k_i\}_{i=1}^{\infty} \to 0$ de la variable y con $k_i \neq 0$. Sea ahora la sucesión $\{h_i\}_{i=1}^{\infty}$ definida para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$ como aquel valor $h_i \neq 0$ tal que

$$f(x_0 + h_i) = f(x_0) + k_i.$$

La existencia de las $h_i \neq 0$ que satisfagan la relación anterior está garantizada, pues f es uno a uno, y cada número $f(x_0) + k_i$ pertenece a la imagen de f. Escribamos ahora el cociente diferencial para $x = f^{-1}(y)$ en $f(x_0)$ en la forma

$$\begin{aligned}\frac{\Delta f^{-1}}{\Delta y}(f(x_0))(k_i) &= \frac{f^{-1}(f(x_0)+k_i) - f^{-1}(f(x_0))}{k_i} \\ &= \frac{h_i}{f(x_0+h_i) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x_0+h_i)-f(x_0)}{h_i}},\end{aligned}$$

donde hemos tomando en cuenta que $f^{-1}(f(x)) = x$ para cada $x \in [a,b]$ y hemos sustituido las relaciones

$$x_0 + h_i = f^{-1}(f(x_0+h_i)) = f^{-1}(f(x_0)+k_i), \quad \text{para } i = 1,2,3,\ldots$$

Ahora, considerando que la función inversa es continua en $f(x_0)$, tenemos

$$\lim_{i\to\infty}(x_0+h_i) = \lim_{i\to\infty}\left\{f^{-1}(f(x_0+h_i))\right\}_{i=1}^{\infty} = x_0,$$

ya que $\lim_{i\to\infty} f(x_0+h_i) = f(x_0)$ y entonces $\{h_i\}_{i=1}^{\infty} \to 0$. Luego, aplicando el criterio de convergencia para cocientes de sucesiones (teorema 4.1), podemos escribir

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}f^{-1}}{\mathrm{d}y}(f(x_0)) &= \lim_{h_i\to 0}\frac{1}{\dfrac{f(x_0+h_i)-f(x_0)}{h_i}} = \\ &= \frac{1}{\displaystyle\lim_{h_i\to 0}\frac{f(x_0+h_i)-f(x_0)}{h_i}} = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}. \lhd\end{aligned}$$

Ejemplo 5.5. La derivada de la función $\sqrt{x}$ en $x_0 \neq 0$ es el número

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

ya que, al ser $y = f(x) = \sqrt{x}$ la función inversa de la función $x = f^{-1}(y) = y^2$, en $(0,\infty)$ podemos aplicar la fórmula de derivación para la función inversa y obtener

$$\frac{\mathrm{d}\sqrt{x}}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y^2}{\mathrm{d}y}(\sqrt{x_0})} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \lhd$$

5.1.4 Derivadas de funciones racionales, trigonométricas y trigonométricas inversas

Aplicando directamente las reglas de derivación, a continuación enlistamos las fórmulas de derivación de algunas funciones racionales y trigonométricas, y sus inversas.

1. Para m entero y x_0 real con $x_0^{1/m}$ bien definido, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}(x^{1/m})}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{1}{m}x_0^{1/m-1}.$$

   Tomando en cuenta que la función $y = f(x) = x^{1/m}$ es la función inversa de $x = f^{-1}(y) = y^m$, aplicamos la regla de derivación para funciones inversas (5.11) y la fórmula para la derivada de la función $f^{-1}(y) = y^m$ (5.3) para obtener

$$\frac{\mathrm{d}x^{1/m}}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}y^m}{\mathrm{d}y}(x_0^{1/m})} = \frac{1}{m(x_0^{1/m})^{m-1}} = \frac{1}{m}x_0^{1/m-1}.$$

2. Para cada $x_0 \in \mathbb{R}$, la función $p(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$ con $a_i \in \mathbb{R}$, para $i = 0, 1, \ldots, n$ es derivable y

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}(x_0) = na_0x_0^{n-1} + (n-1)a_{n-1}x_0^{n-2} + \cdots + 2a_{n-2}x_0 + a_{n-1}.$$

3. Si f y g son dos funciones derivables en x_0 y $g(x_0) \neq 0$, la función cociente $(f/g)(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$ es derivable en $x = x_0$ y

$$\frac{\mathrm{d}(f/g)}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{g(x_0)\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) - f(x_0)\dfrac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x}(x_0)}{g(x_0)^2};$$

   este resultado se obtiene escribiendo $\dfrac{f}{g}$ en la forma $f \cdot \dfrac{1}{g}$ y aplicando las propiedades (5.6) y (5.8).

4. Para toda $x_0 \in \mathbb{R}$ la función $\cos x$ es derivable y

$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}(x_0) = -\operatorname{sen}(x_0).$$

De las propiedades de las funciones trigonométricas (en concreto, las propiedades 5 y 6 de la subsección 3.3.2) tenemos que

$$\cos x = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right).$$

Definiendo las funciones $y = f(x) = x + \dfrac{\pi}{2}$ y $q(y) = \operatorname{sen} y$, podemos escribir $\cos x = (q \circ f)(x)$. Por (5.4),

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}(f(x_0)) = \cos(f(x_0)) = \cos\left(x_0 + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen}(x_0),$$

y, por (5.3), $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = 1$. Al calcular la derivada, usando la regla (5.9), obtendremos

$$\frac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}(x_0) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}y}(f(x_0))\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) = -\operatorname{sen}(x_0).$$

5. Para $x_0 \neq \pm\dfrac{\pi}{2}, \pm\dfrac{3}{2}\pi, \pm\dfrac{5}{2}\pi, \ldots$, la función $\tan x$ es derivable y

$$\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x}(x_0) = \sec^2 x_0.$$

Aplicando la regla de Leibniz (5.6) y la regla de derivación de un cociente (5.8), obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x}(x_0) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\right)(x_0) \\
&= \frac{1}{\cos x_0}\frac{\mathrm{d}\operatorname{sen} x}{\mathrm{d}x}(x_0) + \operatorname{sen} x_0 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{1}{\cos x}\right)(x_0) \\
&= 1 + \frac{\operatorname{sen}^2 x_0}{\cos^2 x_0} = \sec^2 x_0.
\end{aligned}$$

6. Para $y_0 \neq \pm 1$, la función $\operatorname{arcsen} x$ es derivable y

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{arcsen} y}{\mathrm{d}y}(y_0) = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$

Aplicando (5.11), se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\operatorname{arcsen} y}{\mathrm{d}y}(y_0) &= \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\operatorname{sen} x}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arcsen} y_0)} \\
&= \frac{1}{\cos(\operatorname{arcsen} y_0)} = \frac{1}{\sqrt{1-y_0^2}}.
\end{aligned}$$

7. Para $y_0 \in \mathbb{R}$ la función $\arctan y$ es derivable y

$$\frac{\mathrm{d}\arctan y}{\mathrm{d}y}(y_0) = \frac{1}{1+y_0^2}.$$

Aplicando (5.11) se tiene

$$\frac{\mathrm{d}\arctan y}{\mathrm{d}y}(y_0) = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\tan x}{\mathrm{d}x}(\arctan y_0)} = \frac{1}{\sec^2(\arctan y_0)} = \frac{1}{1+y_0^2}.$$

8. Para $y_0 \in \mathbb{R}$ con $y_0 \neq \pm 1$, la función $\arccos x$ es derivable y

$$\frac{\mathrm{d}\arccos y}{\mathrm{d}y}(y_0) = \frac{-1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$

Aplicando la regla de derivación para la función inversa, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}\arccos y}{\mathrm{d}y}(y_0) = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}\cos x}{\mathrm{d}x}(\arccos y_0)} = \frac{-1}{\operatorname{sen}(\arccos y_0)} = \frac{-1}{\sqrt{1-y_0^2}}.$$

5.1.5 Derivación de funciones implícitas

Generalmente, los puntos (x, y) cuyas coordenadas satisfacen una ecuación en dos variables reales x y y, definen curvas en el plano cartesiano que, por secciones, corresponden a la gráfica de una función real de variable real. Se dice que estas funciones son *funciones definidas implícitamente* por la ecuación en cuestión. Por ejemplo, la ecuación

$$x^2 + y^2 - 4 = 0$$

tiene por gráfica los puntos de la circunferencia con centro en el origen y radio 2. Es evidente, de la definición de función, que una circunferencia completa no puede ser la gráfica de una función. Sin embargo, por poner dos ejemplos, la parte de la circunferencia arriba del eje x corresponde a la gráfica de la función $f(x) = +\sqrt{4-x^2}$ para x en $(-2, 2)$, mientras que la parte de la circunferencia a la izquierda del eje y corresponde a la gráfica de la función $g(y) = -\sqrt{4-y^2}$, para y en $(-2, 2)$.

En el caso de la circunferencia, las funciones definidas implícitamente se pueden dar mediante fórmulas explícitas en la variable independiente, pero frecuentemente no es así, ya que no resulta fácil despejar de la ecuación una de las variables en términos de la otra. Sin embargo, es posible calcular la función derivada de las funciones definidas implícitamente por una ecuación sin necesidad de conocerlas explícitamente. Esa función derivada se expresa en términos de la misma función implícita y de la variable independiente que le corresponde. Al proceso de encontar la derivada de funciones implícitas definidas por una ecuación se le conoce como *derivación implícita*, el cual mostraremos mediante dos ejemplos.

Ejemplo 5.6. Consideremos la ecuación en dos variables

$$y - \cos(xy) = 0. \tag{5.12}$$

Notamos que la curva que definen sus soluciones contiene al punto $(0, 1)$ y que alrededor de ese punto, esa curva corresponde a la gráfica de una función $y = h(x)$ en un cierto intervalo I alrededor de $x = 0$. Esto se comprueba observando que la curva solución corta transversalmente a la recta $x = 0$ en el punto $(0, 1)$ y entonces se puede ver como la gráfica de una función de x en un intervalo I con centro en $x = 0$. Véase la figura 5.2.

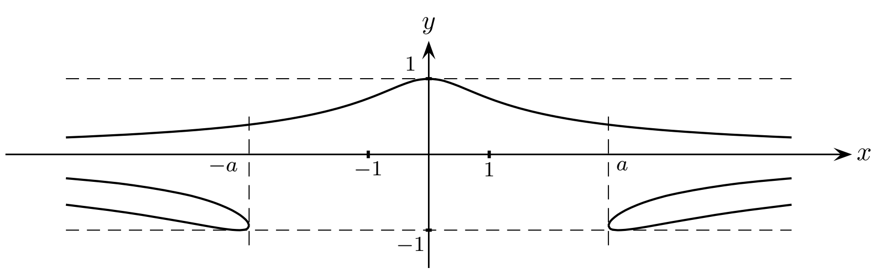

Figura 5.2: Gráfica de $y - \cos(xy) = 0$
$(a \approx 2.97169388)$

Si denotamos por $y = h(x)$ la función cuya gráfica coincide con la curva solución alrededor del punto $(0, 1)$, tenemos que

$$h(x) - \cos(xh(x)) = 0 \text{ para } x \in I. \tag{5.13}$$

En este caso, la función h es la *función definida implícitamente por la ecuación (5.12) alrededor del punto* $(0, 1)$. Note ahora que no es posible despejar de la ecuación (5.13) la función $y = h(x)$ y definirla explícitamente en términos de la variable independiente x. A pesar de esa dificultad, es posible calcular su función derivada.

Podemos derivar en ambos lados de la ecuación (5.13) para obtener

$$\frac{dh}{dx} + \operatorname{sen}(xh(x))\left(x\frac{dh}{dx} + h(x)\right) = 0$$

y entonces

$$\frac{dh}{dx}(x) = -\frac{h(x)\operatorname{sen}(xh(x))}{1 + x\operatorname{sen}(xh(x))}. \triangleleft$$

Al proceso de derivación de la función implícita que hemos mostrado se le denomina usualmente *derivación implícita de una función definida implícitamente por una ecuación en las variables* x, y.

Ejemplo 5.7. Considere la ecuación

$$y^3 + xy^2 + \sqrt{1 + xy} = 0. \tag{5.14}$$

Note que $x = 0$, $y = -1$ es una solución de la ecuación y que alrededor del punto $x = 0$ la curva a que da lugar las soluciones de la ecuación (5.14) define la gráfica de una función $y = y(x)$ y entonces, tomando derivada con respecto a x de la función idénticamente cero

$$y^3(x) + xy^2(x) + \sqrt{1 + xy(x)} = 0,$$

se tiene

$$3y^2(x)\frac{dy}{dx}(x) + y^2(x) + 2xy\frac{dy}{dx}(x) + \frac{y(x) + x\frac{dy}{dx}(x)}{2\sqrt{1 + xy(x)}} = 0,$$

de donde

$$\frac{dy}{dx}(x) = -\frac{y(x)\left(2y(x)\sqrt{1 + xy(x)} + 1\right)}{6y^2(x)\sqrt{1 + xy(x)} + 4xy(x)\sqrt{1 + xy(x)} + x}. \triangleleft$$

5.2 Derivadas de orden superior

Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ una función que tiene derivada en cada uno de los puntos de su dominio de definición. La función que hace corresponder a cada valor de la variable dependiente x el número $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)$ se llama *función derivada de* f y se denota por

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} : (a, b) \to \mathbb{R}.$$

Ejemplo 5.8. La función derivada de la función $f(x) = x^2+x+3$ es la función $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 2x + 1$. ◁

Nota Importante. *Los conceptos "derivada de f en el punto x_0" y "función derivada de f en (a, b)" son diferentes. En el primer caso, el concepto se refiere a un número, mientras que en el último se refiere a una función. La función derivada $\dfrac{df}{dx}$ de f es la función que a cada valor x de la variable independiente le asocia el valor de la derivada de f en x, $\dfrac{df}{dx}(x)$. En este sentido, la función derivada nos proporciona la ley de cambio que gobierna la relación entre las variables x y y.*

Análogamente al concepto de derivada en un punto x_0, se define la *segunda derivada de f en el punto x_0* como la derivada en x_0 de su función derivada $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$; es decir, como $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)(x_0)$. A la segunda derivada de f en el punto x_0 se le denota[2] con el símbolo $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$; así,

$$\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0+h) - \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)}{h} = \frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}(x_0).$$

En el caso de la función de posición $y = d(t)$ de un móvil con respecto al tiempo, al valor de la segunda derivada en un tiempo t_0 se le llama *aceleración en t_0*.

Ejemplo 5.9. La segunda derivada de la función $f(x) = x^3 + x^2 + x$ en el punto $x_0 = 2$, es la derivada de la función $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) = 3x^2 + 2x + 1$ en el punto $x_0 = 2$, es decir $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x) = 6x + 2$, evaluada en $2 : \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(2) = 14$. ◁

De manera recursiva, se define la *k-ésima función derivada de f en el punto* x_0 como la derivada en x_0 de la $(k-1)$-ésima función derivada, y se denota[3]

$$\frac{\mathrm{d}^k f}{\mathrm{d}x^k}(x_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{k-1} f}{\mathrm{d}x^{k-1}}\right)(x_0).$$

[2] Esta es la notación propuesta por Leibniz; otras notaciones para la segunda derivada en x_0 son $y''(x_0)$ o $f''(x_0)$, y $\ddot{y}(x_0)$, de Lagrange y Newton, respectivamente.

[3] Otra notación para la k-ésima derivada es $y^{(k)}(x)$ o $f^{(k)}(x)$, con paréntesis, para distinguirla de la potencia $y^k(x)$ o $f^k(x)$.

5.3 Diferencial de una función

Si una función $y = f(x)$ tiene derivada en el punto x_0, a la función lineal

$$\mathrm{d}f(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$\mathrm{d}f(x_0)(x) = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0)x$$

se le llama *diferencial de* $y = f(x)$ *en el punto* x_0. A la diferencial también se le llama *aproximación lineal de la función* $f(x)$ *alrededor del punto* x_0, ya que si denotamos con $e(x)$ al error entre la función $f(x)$ y la función afín

$$\ell_{x_0}(x) = f(x_0) + \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0),$$

es decir,

$$e(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) - \ell_{x_0}(x) = f(x) - f(x_0) - \mathrm{d}f(x_0)(x - x_0),$$

entonces

$$\lim_{x \to x_0} \frac{e(x)}{|x - x_0|} = 0.$$

Es decir, cuando $x - x_0$ tiende a cero, el error $e(x)$ tiende a cero más rápidamente que $x - x_0$. En términos de la gráfica de $y = f(x)$, la función $y = \ell_{x_0}(x)$ es tal que su gráfica es la recta tangente a la gráfica de $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$ (ver figura 5.3).

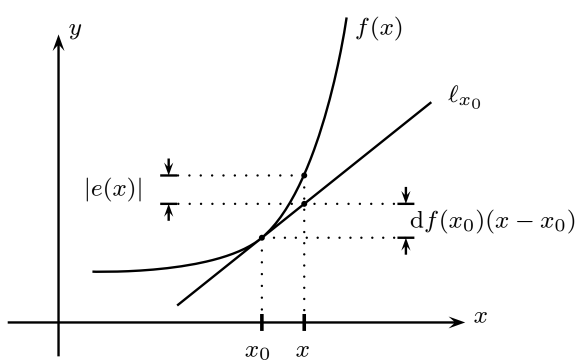

Figura 5.3: Interpretación geométrica de la diferencial de la función $y = f(x)$ en el punto $(x_0, f(x_0))$.

5.4 Cálculo de razones de cambio

Enseguida presentamos algunos ejemplos típicos donde la derivada de una función se expresa en términos de las derivadas de otras funciones con las cuales está relacionada funcionalmente.

Ejemplo 5.10. En un tiempo t_0, el ancho de un rectángulo crece a una velocidad de 3 cm/seg y su diagonal crece a razón de 2 cm/seg; ¿con qué velocidades crecen el perímetro y el área del rectángulo si en t_0 su ancho es de 5 cm y su largo es de 10 cm?

Solución. Si denotamos por $a(t)$ y $l(t)$ las funciones que a cada tiempo t le asocian el valor del ancho y de la diagonal de un rectángulo, respectivamente, el perímetro $p(t)$ y el área $A(t)$ como funciones del tiempo se escriben, respectivamente, en términos de $a(t)$ y $l(t)$ en la forma

$$p(t) = 2(a(t) + \sqrt{l(t)^2 - a(t)^2}) \quad \text{y} \quad A(t) = a(t)\sqrt{l(t)^2 - a(t)^2},$$

y la información dada en el enunciado del problema es

$$a(t_0) = 5, \quad l(t_0) = \sqrt{100 + 25}, \quad \frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}(t_0) = 3, \quad \text{y} \quad \frac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t}(t_0) = 2. \quad (5.15)$$

Aplicando las reglas de derivación en $t = t_0$, se tiene

$$\frac{dp(t)}{dt}(t_0) = 2\frac{da(t)}{dt}(t_0) + \frac{2l(t_0)\frac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t}(t_0) - 2a(t_0)\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}(t_0)}{\sqrt{l(t_0)^2 - a(t_0)^2}}$$

y, sustituyendo (5.15) se obtiene que el perímetro crece en $t = t_0$ a razón de

$$\frac{\mathrm{d}p(t)}{\mathrm{d}t}(t_0) = 3 + 2\sqrt{5}.$$

La derivada del área es

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}(t_0) = a(t_0)\frac{l(t_0)\frac{\mathrm{d}l(t)}{\mathrm{d}t}(t_0) - a(t_0)\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}(t_0)}{\sqrt{l(t_0)^2 - a(t_0)^2}} + \sqrt{l(t_0)^2 - a(t_0)^2}\,\frac{\mathrm{d}a(t)}{\mathrm{d}t}(t_0).$$

Usando (5.15) se obtiene que el área crece en $t = t_0$ a razón de

$$\frac{\mathrm{d}A(t)}{\mathrm{d}t}(t_0) = 5\left(\sqrt{5} + \frac{9}{2}\right). \triangleleft$$

Ejemplo 5.11. Calcule la razón de cambio del área A de un triángulo rectángulo isósceles con respecto a su perímetro p.

Solución. Obtendremos la respuesta de dos maneras.

(a) Una primera forma de resolver el problema es determinar el área de un triángulo rectángulo isósceles como función del perímetro. Si l denota el cateto del triángulo y p el perímetro, se tiene

$$p(l) = 2l+\sqrt{2}l,$$

cuya función inversa es

$$l(p) = \frac{p}{2+\sqrt{2}}.$$

Por otra parte, el área A como función del cateto toma la forma

$$A(l) = \frac{l^2}{2},$$

y componiendo con la función $l(p)$, se tiene para el área la expresión en términos de la variable p

$$A(p) = (A \circ l)(p) = A(l(p));$$

aplicando la regla de la cadena,

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}(p) = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}l}(l(p))\frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}p}(p) = \frac{p}{2+\sqrt{2}}\frac{1}{2+\sqrt{2}} = \frac{p}{(2+\sqrt{2})^2}.$$

(b) Otra forma de resolver este problema es expresar el área como función del perímetro y luego tomar la derivada. Así,

$$A(p) = \frac{1}{2}\left(\frac{p}{2+\sqrt{2}}\right)^2$$

y, derivando, obtenemos

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}p}(p) = \frac{p}{(2+\sqrt{2})^2}. \quad \triangleleft$$

Ejemplo 5.12. Un cono recto de radio r_0 y altura h_0 se llena con un chorro de agua que arroja $k\,\mathrm{cm}^3/\mathrm{seg}$ (ver figura 5.4). Diga con qué velocidad crece el nivel del agua medido sobre la pared del cono en el instante en que se ha llenado la mitad del volumen del cono.

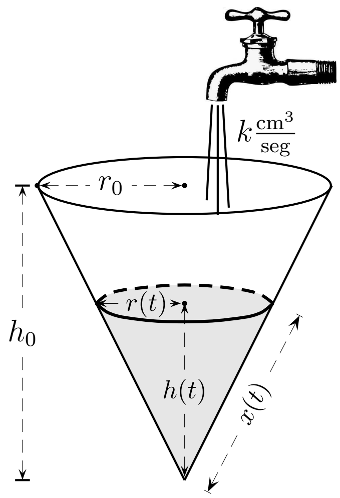

Figura 5.4: $x(t)$ = nivel del agua medido sobre la pared del cono en el tiempo t.

Solución. Para cada t, denotemos por $h(t)$ la altura del agua medida sobre el eje del cono y $r(t)$ el radio del círculo que forma el nivel superior del agua. La relación entre $h(t)$ y $r(t)$, debido a la geometría del cono, es

$$\frac{r(t)}{h(t)} = \frac{r_0}{h_0}.$$

El volumen de un cono $V(t)$ en el tiempo t es

$$V(t) = \frac{\pi}{3} r(t)^2 h(t)$$

y en el caso particular del cono del problema, toma la forma

$$V(t) = \frac{\pi r_0^2}{3h_0^2} h^3(t).$$

Calculando la derivada de $V(t)$, se tiene

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t) = \frac{\pi r_0^2}{h_0^2} h^2(t) \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t).$$

Denotando por t_m el tiempo transcurrido para llenar la mitad del cono, tenemos que la altura del nivel del agua $h(t_m)$ en ese momento es

$$h(t_m) = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} h_0,$$

y tomando en cuenta que

$$k = \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}(t_m) = \frac{\pi r_0^2}{\sqrt[3]{4}} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t_m),$$

tenemos que la variación de la altura del agua en t_m es

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t_m) = \frac{\sqrt[3]{4}k}{\pi r_0^2}.$$

Por otro lado, sobre la pared del cono el nivel del agua $x(t)$ está relacionado con la altura del agua sobre el eje del cono en la forma

$$x(t) = \frac{h(t)}{h_0}\sqrt{r_0^2 + h_0^2}$$

y entonces la velocidad $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_m)$ con que crece el nivel del agua medido sobre la pared del cono, cuando se ha llenado la mitad del cono, es

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t_m) = \frac{\sqrt{r_0^2 + h_0^2}}{h_0} \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(t_m) = \frac{\sqrt[3]{4}k}{\pi r_0^2 h_0}\sqrt{r_0^2 + h_0^2}. \ \triangleleft$$

Ejercicios y problemas del capítulo

El concepto de derivada

5.4.1. Calcule los límites siguientes:

$(a)\ \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^{97} - 2^{97}}{h}$; $\quad (b)\ \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\operatorname{sen} x^3 - \operatorname{sen} 8}{x-2}$; $\quad (c)\ \lim\limits_{h\to 0} \sqrt{\dfrac{(3+h)^2 - 9}{h}}$.

5.4.2. Aplicando la definición de derivada en un punto, diga si existe la derivada de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ en los puntos x_0 dados y, en caso afirmativo, calcule su valor.

(a) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si } x \text{ es irracional,} \end{cases} \qquad x_0 = 1,\ x_0 = 0;$

(b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2 + 2x + 3 & \text{si } x \leqslant 1 \\ 3x + 1 & \text{si } x > 1, \end{cases} \qquad x_0 = 1;$

(c) $f(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}(1/x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \qquad x_0 = 0.$

5.4.3. Demuestre que la función $f(x)$ del inciso 5.4.2(c) tiene derivada en todo punto, pero que ésta es una función discontinua en $x = 0$.

5.4.4. Suponiendo que f es derivable en el punto $x = a$, determine el límite en los casos siguientes:

(a) $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{1}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})}\left[\frac{f(x)}{f(a)} - 1\right], \qquad a > 0;$

(b) $\displaystyle \lim_{x\to a} \frac{a^n f(x) - x^n f(a)}{x-a}, \qquad n \in \mathbb{N}.$

Cálculo de derivadas. Reglas de derivación.

5.4.5. Aplicando las reglas de derivación, calcule la derivada de las funciones siguientes en el punto x_0 dado.

(a) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x), \quad x_0 = \pi/2;$ (b) $f(x) = \sqrt[3]{\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}}, \quad x_0 = 1;$

(c) $f(x) = \sqrt{\tan^2 x^2 + x}, \quad x_0 = \sqrt{\pi/4};$ (d) $f(x) = \tan(\cos(x^2+1)), \quad x_0 = 0;$

(e) $f(x) = \operatorname{arcsen}\sqrt{x}, \quad x_0 = 1/2.$

5.4.6. Calcule la función derivada de $y(x) = x|x|$ y grafíquela en el intervalo $[-1, 1]$.

5.4.7. Describa en qué puntos tiene derivada la función $f(x) = |x^2 - 1|$.

5.4.8. Calcule la derivada de la función $f(x) = \operatorname{sen}(g(x) + 2)$ en el punto $x = 3$, si $g(3) = (\pi - 12)/6$ y $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(3) = -4$.

5.4.9. Sean $y = f(x)$ y $z = g(x)$ funciones derivables en cada punto de $\mathbb{R}$ tales que $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(2) = 3$, $\dfrac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}x}(2) = -3$, $f(2) = 1$ y $g(2) = 2$. Calcule

(a) $\dfrac{\mathrm{d}(f+g)}{\mathrm{d}x}(2);$ (b) $\dfrac{\mathrm{d}(f\cdot g)}{\mathrm{d}x}(2);$ (c) $\dfrac{\mathrm{d}\,(f/g)}{\mathrm{d}x}(2).$

5.4.10. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ con $f(0) = 1$ y tal que, para cualesquiera $x, h \in \mathbb{R}$, satisface $f(x+h) - f(x) = 8xh - 2h + 4h^2$. Calcule

(a) $f(2);$ (b) $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(2);$ (c) $\dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(2).$

5.4.11. Sea $f(x)$ una función derivable en toda la recta real. Establezca la fórmula para la derivada de la función $g(x) = f(xf(x))$.

5.4.12. Calcule la derivada de la función $f(x) = \cos(\operatorname{sen}(\cos x))$ en el punto $x = \operatorname{arcsen}(1/2)$.

5.4.13. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(3) = 0$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(3) = \dfrac{\pi}{4}$.

(a) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{sen} f(x))(3);$ (b) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\sqrt{f(x)^2 + x})(3).$

5.4.14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f(3) = 3$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(3) = 2$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(\sqrt{3}) = 1$ y $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(9) = 1$.

(a) Calcule $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[f(f(x)) - f(x^2)\right](3)$;

(b) Calcule $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\sqrt{f(f(x))} - f(\sqrt{f(x)})\right](3)$.

5.4.15. Sea $h(x) = (f \circ g)(x)$ donde f y g son funciones derivables. Determine la fórmula para $\frac{\mathrm{d}^2h}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$.

5.4.16. Sea $g(x) = x^3 + x$. Calcule la derivada de la función inversa $g^{-1}(y)$ en $y = 2$.

5.4.17. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, tal que $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x) > 0$ para toda $x \in \mathbb{R}$. En cada uno de los casos siguientes, exprese la derivada de la función g en el punto $x = x_0$ y en términos de la derivadas de f.

(a) $g(x) = f^2(x) - f(x^2)$; (b) $g(x) = (f \circ f \circ f)(x)$; (c) $g(x) = \operatorname{sen} f^{-1}(x)$.

5.4.18. Si $f(0) = 1$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(0) = 2$, $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(1) = 3$, $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(0) = -1$ y $\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(1) = -5$, calcule la segunda derivada de la función $g(x) = (f \circ f)(x)$ en $x = 0$.

5.4.19. Determine la función derivada de las funciones siguientes:

(a) $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$; (b) $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$; (c) $f(x) = \operatorname{sen}^2(\cos x) + \cos^2(\operatorname{sen} x)$; (d) $g(x) = f(x^2) - f\left(x^{-2}\right)$ para cada una de las funciones dadas en (a), (b) y (c).

5.4.20. Demostrar por inducción que, si $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son funciones derivables en x, también la suma $\sum_{i=1}^{n} f_i$ y el producto $\prod_{i=1}^{n} f_i$ son derivables en x y

(a) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x}(x)$;

(b) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\prod_{i=1}^{n} f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x) \cdot \ldots \cdot \frac{\mathrm{d}f_i}{\mathrm{d}x}(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x)$.

5.4.21. *Demuestre que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es acotada, entonces $g(x) = (x-3)^2 f(x)$ tiene derivada en $x_0 = 3$.

5.4.22. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función con derivada continua y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x)\neq 0$ para toda $x\in\mathbb{R}$. Además, $f(3)=3$ y $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(3)=2$. Si $f^{-1}(y)$ es su función inversa:

(a) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[f^{-1}\circ f^{-1}\right](3)$; ($b$) Calcule $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left[\sqrt{f^{-1}(y)}\right](3)$.

5.4.23. *Sea $f(x)=\cos(\cos(\cos(\cos(\cos(\cos(\cos(\cos x)))))))$ y sea a tal que $a=\cos a$. Exprese $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$ como polinomio en a.

Interpretación física y geométrica. Aplicaciones.

5.4.24. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x)=x^2+2x$ en el punto $(1,3)$.

5.4.25. Diga en qué punto se intersectan la recta $y=0$ y la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^2+2x$ que tiene pendiente $m=1/2$.

5.4.26. ¿En qué punto la recta tangente a la gráfica de $f(x)=x^3+2x^2+1$ tiene pendiente igual a cero?

5.4.27. Sobre la elipse $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$, encuentre los puntos en los que la recta tangente tiene una inclinación de $\pi/4$ radianes.

5.4.28. ¿Con qué ángulo se intersectan la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ y la parábola $y=x^2$? Es decir, ¿qué ángulo forman las rectas tangentes correspondientes en el punto de intersección de las curvas?

5.4.29. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}$. Demuestre los enunciados siguientes:

(a) Si f es una función par, entonces $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ es una función impar.

(b) Si f es una función impar, entonces $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$ es una función par.

5.4.30. Si el ángulo que forman los lados iguales de un triángulo isósceles de altura constante e igual a 10 crece a razón de $\pi/64$ radianes por segundo, ¿cómo varía el área del triángulo en el instante t_0 en que el área del triángulo es 1?

5.4.31. Encuentre los puntos sobre la curva $y=x^3$ en los que su recta tangente es perpendicular a la recta tangente a la curva $y=x^2+4$ en el punto $(-1,5)$.

5.4.32. Considere la curva en el plano $y=x^2+x+2$ para $x>0$ y denótese por P a un punto de la curva. Calcule la razón de cambio del ángulo θ que forma la tangente a la curva en el punto P con el eje de las abscisas con respecto al valor de la abscisa del punto de tangencia.

5.4.33. Sea $f(x) = x^3 + ax + b$ con $a \neq b$ y suponga que las rectas tangentes a la gráfica de f en los puntos $x = a$ y $x = b$ son paralelas. Calcule $f(1)$.

5.4.34. Considere la gráfica de la función $f(x) = x^2 + x - 1$. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f que contiene al punto $(6, 0)$.

5.4.35. *Considere un cono recto invertido de radio 4 m y altura 10 m en el que se vierte agua a razón de 2 cm^3/seg. Calcule la velocidad con que aumenta el nivel del agua, medido sobre el eje del cono, en el instante en que se llena la mitad del recipiente.

5.4.36. *El cono circular recto generado al rotar la recta $y = x$ alrededor del eje de las ordenadas se llena con agua a razón de 2 cm/seg. Calcule la velocidad con que aumenta el nivel del líquido en el cono, medido sobre la pared del cono, cuando se han vertido 100 cm^3 de agua.

5.4.37. *¿Cuántos cm^3 por segundo crece el volumen de un cilindro en el instante en que su área lateral es de 100 cm^2 y crece 1 cm^2 por segundo y su altura es de 15 cm y decrece 3 cm por segundo?

5.4.38. *Considere la familia de parábolas $y = a(t)x^2 + c(t)$ con coeficientes que dependen del tiempo. Si el coeficiente $a(t)$ crece a razón de 2cm/seg y el coeficiente $c(t)$ decrece a razón de 1 cm/seg, ¿con qué velocidad se desplaza el punto en el que las parábolas cortan al eje de las abscisas cuando $a = 1$ y $c = -2$?