Capítulo 4

Fundamentos del Cálculo

El límite de una función real de variable real $y = f(x)$ en un punto x_0 es el concepto fundamental del cálculo y la definición de límite es reconocida como una de las máximas expresiones del discurso matemático moderno; su manejo es imprescindible para una clara comprensión del cálculo y sus aplicaciones.

En este capítulo se presenta la noción de límite a partir del concepto de convergencia de sucesiones y luego se introduce el concepto de función continua como aquella que preserva la convergencia de sucesiones. En capítulos posteriores presentaremos los conceptos básicos de derivada e integral de una función basándonos en el concepto de límite.

Este capítulo incluye las demostraciones completas de los resultados básicos del análisis matemático con el propósito de ir familiarizando al estudiante en el manejo de las técnicas de argumentación y prueba propias de esta área de las matemáticas.

4.1 Sucesiones reales

Una *sucesión real* es un conjunto de números reales ordenado mediante el conjunto de los números naturales.

En otras palabras, una sucesión es un conjunto de números reales etiquetados con números naturales, de tal manera que la etiqueta especifica el lugar o el orden que ocupa cada elemento en la sucesión. La etiqueta, al ser un número natural, nos señala cuál es el primer elemento de la sucesión, cuál el segundo, cuál el tercero, etc. Para definir una sucesión real, es necesario especificar los números que la integran y el lugar que ocupan según el orden de sus etiquetas.

Ejemplo 4.1. La sucesión con primer elemento el número 1, segundo elemento el número $1/2$, tercer elemento el número $1/3$, y así, en general, con i-ésimo elemento el número $1/i$, para los valores $i = 1, 2, 3, \ldots$, se puede representar escribiendo

$$1_{\text{primero}}, \left(\frac{1}{2}\right)_{\text{segundo}}, \left(\frac{1}{3}\right)_{\text{tercero}}, \ldots, \left(\frac{1}{i}\right)_{i-\text{ésimo}}, \ldots$$

Los puntos suspensivos al final significan que la sucesión se extiende de acuerdo al orden creciente de las etiquetas. $\triangleleft$

Una manera usual de describir una sucesión real consiste en dar la regla, o fórmula, que nos permita conocer, para cada valor $i = 1, 2, 3, \ldots$, de la etiqueta, el número que lleva dicha etiqueta. Esto se hace denotando por s_i el número que ocupa el i-ésimo lugar, para cada uno de los lugares $i = 1, 2, 3, \ldots$ y mostrando cómo se calcula el valor de s_i en términos del valor i de su etiqueta. Por ejemplo, la sucesión

$$s_i = \frac{1}{i} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, 3, \ldots$$

representa, en forma compacta, la sucesión del ejemplo 4.1. De esa manera quedan determinados todos los elementos de la sucesión y podemos saber directamente cuál es el número que ocupa cada lugar. Por ejemplo, el elemento que ocupa el lugar 130 es el número $1/130$. Note que siendo el número de etiquetas infinito, cada sucesión consta de un número infinito de números que pueden repetirse.

En general, para denotar una sucesión escribiremos entre llaves el número que ocupa el i-ésimo lugar y fuera de las llaves, como subíndice, escribiremos $i = 1$ y como supraíndice el símbolo ∞ para significar que la etiqueta toma valores sobre todos los números naturales: $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Ejemplo 4.2. (a) La sucesión $s_i = (-1)^i$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ es una sucesión cuyos elementos sólo toman dos valores.

(b) El símbolo $\left\{\frac{i}{i^2-8}\right\}_{i=1}^{\infty}$ representa la sucesión real

$$\left\{\frac{-1}{7}, \frac{-1}{2}, 3, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{i}{i^2-8}, \ldots\right\}.$$

(c) En la sucesión real $\left\{(-1)^i\sqrt{i^2+1}\right\}_{i=1}^{\infty}$ el número $\sqrt{101}$ ocupa el décimo lugar. $\triangleleft$

Asociado al concepto de sucesión, se tiene de manera natural el concepto de *subsucesión de una sucesión,* entendida como una nueva sucesión cuyos elementos forman un subconjunto de la primera y su orden como elementos de la subsucesión preserva el orden que esos mismos elementos tenían en la sucesión inicial. Es decir, si en la sucesión un elemento es posterior a otro y ambos están en la subsucesión, también en ésta el primer elemento será posterior al segundo. Esto lo escribiremos de manera precisa con la definición siguiente.

Definición 4.1. (a) La sucesión de etiquetas $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ es *creciente* si siempre que $j < k$ se tiene $m_j < m_k$ para j, k números naturales.

(b) Una sucesión $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ se dice *subsucesión* de una sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, si existe una sucesión creciente de etiquetas $\{m_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $s_i = a_{m_i}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$

Ejemplo 4.3. (a) La sucesión $\left\{\sqrt{2i+3}\right\}_{i=1}^{\infty}$ cuyos elementos son $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{9}$, $\sqrt{11}$, $\ldots, \sqrt{2i+3}, \ldots$ es una subsucesión de la sucesión $\left\{\sqrt{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ cuyos elementos son $\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \ldots$ En este caso, la sucesión creciente de etiquetas que dan lugar a la subsucesión es $\{2i+3\}_{i=1}^{\infty}$, de tal manera que el elemento de la subsucesión con etiqueta i es el elemento de la sucesión que tiene etiqueta $2i + 3$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$

(b) La sucesión $\{c_i\}_{i=1}^{\infty} = \{6i+1\}_{i=1}^{\infty}$ es subsucesión de $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} = \{2i+1\}_{i=1}^{\infty}$ donde la relación entre las etiquetas es $c_i = a_{3i}$ para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$ $\triangleleft$

Dadas dos sucesiones de números reales $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, podemos sumar o multiplicar término a término estas sucesiones para formar nuevas sucesiones reales. Así, a la sucesión $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ cuyo i-ésimo término se forma sumando el i-ésimo término de la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ con el i-ésimo término de la sucesión $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$,

$$s_i = a_i + b_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots$$

se le llama *sucesión suma* de las dos sucesiones iniciales y se denota

$$\{s_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} + \{b_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i + b_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Análogamente, a la sucesión $\{p_i\}_{i=1}^{\infty}$ cuyo i-ésimo término se forma multiplicando el i-ésimo término de la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ con el i-ésimo término de la sucesión $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$,

$$p_i = a_i b_i \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots$$

se le llama *sucesión producto* de las sucesiones iniciales y se denota

$$\{p_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \cdot \{b_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i b_i\}_{i=1}^{\infty}.$$

Las operaciones de suma y producto de sucesiones heredan las propiedades de campo de las operaciones de los números reales, como son la conmutatividad, asociatividad, distributividad, existencia de neutro aditivo y multiplicativo, existencia de inverso aditivo, y cuando la sucesión está formada de números distintos de cero, la existencia de inverso multiplicativo.

4.2 Convergencia de sucesiones

Se llama *intervalo abierto con centro en el número real L y radio $r > 0$*, al conjunto

$$(L - r, L + r) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } |x - L| < r\}\,.$$

Se dice que una sucesión $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ de números reales es *convergente a un número real L* si los elementos de la sucesión se aproximan al número L "tanto como se quiera" a medida que crece la magnitud de las etiquetas de esos elementos. En términos precisos, esto se enuncia de la manera siguiente:

Definición 4.2. La sucesión de números reales $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ *converge al número L* si para cada intervalo I con centro L y radio r, existe una etiqueta N_r tal que todos los elementos de la sucesión cuya etiqueta es posterior a N_r pertenecen a dicho intervalo. Cuando el enunciado anterior es verdadero, escribimos simbólicamente

$$\{s_i\}_{i=1}^{\infty} \to L$$

o

$$\lim_{i\to\infty} s_i = L.$$

Al número L se le llama *límite de la sucesión* $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Dado que un intervalo con centro L queda determinado por su radio r, la definición 4.2 se puede parafrasear como sigue:

"$\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a L si para cada $r > 0$, existe un número natural N_r tal que si $i > N_r$ entonces $|s_i - L| < r$."

NOTA IMPORTANTE. *Para fijar mejor la definición anterior, considere las observaciones siguientes.*

(a) *La definición de sucesión convergente no dice cómo encontrar el límite de una sucesión, sino sólo qué propiedad define al límite de una sucesión. En ese sentido, la definición sólo dice qué debemos hacer para comprobar que un cierto número es efectivamente el límite de la sucesión.*

(b) *Para comprobar que un número L es el límite de una sucesión, la definición nos exige que para cada intervalo I de radio r centrado en L encontremos una etiqueta N_r a partir de la cual todos los elementos de la sucesión con etiqueta mayor pertenezcan a ese intervalo. Esa etiqueta, cuya existencia hay que mostrar, no es la única con esa propiedad ya que cualquier otra mayor que ella también tendrá esa propiedad.*

(c) *El valor de la etiqueta a partir de la cual los elementos de la sucesión pertenecen a un intervalo dado, depende del radio de ese intervalo y* *mientras más pequeño sea ese radio, en general, más grande tendrá que ser la etiqueta.*

(d) *La convergencia de una sucesión a un número L no se altera si se modifica el valor o el orden de cualquier número finito de elementos de la sucesión. Esto es así porque la convergencia de una sucesión es una propiedad que sólo tiene que ver con el comportamiento de sus elementos a la larga, es decir, cuando su orden crece indefinidamente y no depende de lo que suceda en un número finito de ellos.*

La siguiente observación, que enunciamos en forma de lema, nos será de gran utilidad en lo que sigue.

Lema 4.1. Si una sucesión $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a L, entonces $\{s_i - L\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a cero y, recíprocamente, si la sucesión $\{s_i - L\}_{i=1}^{\infty}$ converge a cero, entonces la sucesión $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a L.

NOTA IMPORTANTE.

(a) *Toda sucesión constante es convergente:* $\{s_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a\}_{i=1}^{\infty}$ *converge a* a.

(b) *Toda subsucesión de una sucesión convergente a* L *es convergente a* L.

Ejemplo 4.4. La sucesión $\left\{\dfrac{3i+1}{2i+8}\right\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a $3/2$. Para comprobar lo anterior estimamos primero la distancia del i-ésimo término de la sucesión al número $3/2$ aplicando la definición de convergencia:

$$\begin{aligned}\left|s_i - \frac{3}{2}\right| &= \left|\frac{3i+1}{2i+8} - \frac{3}{2}\right| = \left|\frac{2(3i+1) - 3(2i+8)}{2(2i+8)}\right| \\ &= \left|\frac{-22}{2(2i+8)}\right| = \left|\frac{11}{(2i+8)}\right|.\end{aligned}$$

Esta distancia se hace cada vez más pequeña a medida de que la etiqueta i crece. Si consideramos ahora el intervalo $I = \left(\frac{3}{2} - r, \frac{3}{2} + r\right)$ con $r > 0$, según la estimación anterior, el elemento s_i de la sucesión pertenecerá al intervalo I, si su etiqueta i es tal que

$$\left|\frac{11}{(2i+8)}\right| < r,$$

o, lo que es lo mismo, siempre que su etiqueta i sea mayor que la etiqueta N_r dada por

$$N_r = \text{primer natural mayor que } \frac{1}{2}\left(\frac{11}{r} - 8\right).$$

Es decir, se tendrá que

$$\left| s_i - \frac{3}{2} \right| < r$$

siempre que

$$i > \text{ primer natural mayor que } \frac{1}{2}\left(\frac{11}{r} - 8\right),$$

lo cual, según la definición 4.2, significa que la sucesión converge al número 3/2. ◁

Por ejemplo, si consideramos el intervalo de radio $r = 1/10^6$, los elementos de la sucesión distarán de 3/2 en menos de una millonésima de unidad si su etiqueta es posterior a la etiqueta

$$N_{\frac{1}{10^6}} = \frac{1}{2}((11)(10^6) - 8) = 5499996.$$

Ejemplo 4.5. La sucesión $\{-1, 1, -1, \ldots\}$ es un ejemplo de una sucesión no convergente, pues si un número L fuera su límite, tendríamos una contradicción. En primer lugar tendríamos que L no podría ser distinto de 1 y -1, pues si lo fuera, al escoger un intervalo con centro en L con radio r menor que la mitad de la distancia más pequeña de L a 1 y -1, no podríamos encontrar una etiqueta a partir de la cual los elementos de la sucesión pertenecieran a dicho intervalo. Análogamente, si supusiéramos que L es el número 1, tomando $r = 1/2$ tampoco podríamos encontrar una etiqueta a partir de la cual todos los elementos de la sucesión pertenecieran al intervalo de centro $L = 1$ y radio 1/2, ya que los elementos de la forma $(-1)^i$ con i un número impar están alejados en más de 1/2 de $L = 1$. Análogamente, podríamos repetir el argumento si supusiéramos que L es igual a -1. Luego, no existe valor real de L que satisfaga la definición de límite de la sucesión; por tanto, ésta no es convergente. ◁

4.2.1 Propiedades de las sucesiones convergentes

Enseguida enunciaremos y demostraremos algunas de las propiedades más importantes de las sucesiones convergentes.

Una sucesión de números reales $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ se dice *acotada* si todos sus elementos se encuentran dentro de un intervalo cerrado de la forma $[-M, M]$ con M algún número mayor que cero, es decir, si

$$-M \leqslant a_i \leqslant M \quad \text{para toda } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Proposición 4.1. Toda sucesión convergente $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ de números reales es acotada.

Demostración. La proposición se prueba a partir del argumento siguiente: Primero denotemos por L el límite de esa sucesión y por I el intervalo con centro L y radio $r = 1$. Por ser convergente la sucesión, existe una etiqueta N a partir de la cual todos los elementos de la sucesión a_i con $i > N$ pertenecen al intervalo I, o lo que es lo mismo, satisfacen

$$|a_i - L| < 1 \quad \text{para toda } i > N. \tag{4.1}$$

Aplicando la desigualdad del triángulo en (4.1), se tiene

$$|a_i| - |L| \leqslant |a_i - L| < 1$$

y entonces

$$|a_i| < 1 + |L| \text{ para toda } i > N.$$

Tomando ahora $C = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_N|\}$ y $M = \max\{1 + |L|, C\}$, tendremos que

$$|a_i| < M \text{ para todo } \ i = 1, 2, 3, \ldots,$$

lo cual muestra que todos los términos de la sucesión pertenecen al intervalo $[-M, M]$. ◁

Proposición 4.2. El producto de una sucesión acotada $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ por una sucesión convergente a cero $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a cero.

Demostración. Sea $M > 0$ una cota para $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, es decir,

$$|a_i| < M \quad \text{para toda } i = 1, 2, 3, \ldots$$

La distancia al cero del i-ésimo término de la sucesión producto $\{a_i b_i\}_{i=1}^{\infty}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ satisface

$$|a_i b_i| \leqslant |a_i||b_i| \leqslant M|b_i|, \tag{4.2}$$

es decir, es siempre menor que M veces la distancia del término b_i a cero. Luego, si tomamos el intervalo con centro 0 y radio $r > 0$, sabemos por la convergencia a cero de la sucesión $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, que existe un índice N_r tal que

$$|b_i| < \frac{r}{M} \quad \text{para toda} \quad i > N_r. \tag{4.3}$$

Combinando (4.2) y (4.3) tendremos

$$|a_i b_i| < r \quad \text{para toda} \quad i > N_r,$$

lo que muestra que los términos de la sucesión producto distan de cero en menos que r a partir de la etiqueta N_r. Siendo $r > 0$ arbitrario, esto significa que la sucesión producto $\{a_i b_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a cero. ◁

Proposición 4.3. Si las sucesiones $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergen a cero, entonces la sucesiones $\{a_i + b_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{a_i - b_i\}_{i=1}^{\infty}$ también convergen a cero.

Demostración. Por definición, para probar que $\{a_i + b_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a cero, tenemos que probar que si escogemos arbitrariamente un intervalo de centro 0 y radio r mayor que cero, entonces podemos encontrar una etiqueta N tal que

$$|a_i + b_i| < r$$

siempre que $i > N$. Para encontrar tal N, razonamos de la forma siguiente: Como las sucesiones $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergen a cero, para el intervalo $(-\frac{r}{2}, \frac{r}{2})$ y para cada una de ellas, podremos encontrar etiquetas N_1 y N_2 tales que

$$|a_i| < \frac{r}{2} \text{ si } i > N_1$$

y

$$|b_i| < \frac{r}{2} \text{ si } i > N_2.$$

Ahora, si tomamos $N = \max\{N_1, N_2\}$, o sea N igual a la mayor de las dos etiquetas N_1 y N_2, simultáneamente se cumplirá que

$$|a_i| < \frac{r}{2} \text{ y } |b_i| < \frac{r}{2} \text{ si } i > N$$

y aplicando la desigualdad del triángulo, tendremos que los términos de la sucesión $\{a_i + b_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisfarán

$$|a_i + b_i| \leqslant |a_i| + |b_i| < r, \quad \text{si } i > N,$$

lo cual comprueba que podemos encontrar una etiqueta a partir de la cual todos los términos de la sucesión suma $\{a_i + b_i\}_{i=1}^{\infty}$ disten de cero en menos que r. De lo anterior se sigue que $\{a_i + b_i\}_{i=1}^{\infty} \to 0$.

Para probar la convergencia a cero de la sucesión $\{a_i - b_i\}_{i=1}^{\infty}$, el razonamiento es el mismo, pues también se tiene $|a_i - b_i| < |a_i| + |b_i| < r, \quad \text{si } i > N$. ◁

Como consecuencia directa de la proposición 4.3, tenemos la proposición siguiente.

Proposición 4.4. Una sucesión convergente $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene un solo límite.

Demostración. Para demostrar la validez de esta proposición, recurriremos al método de demostración conocido como "de reducción al absurdo": Supongamos que el enunciado a demostrar es falso y que existe una sucesión $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ que converge al mismo tiempo a dos números distintos L_1 y L_2 con $L_1 \neq L_2$. Como consecuencia de la suposición anterior, se tendría que las sucesiones

$\{s_i - L_1\}_{i=1}^{\infty}$y $\{s_i - L_2\}_{i=1}^{\infty}$ convergen a cero, y como consecuencia del lema anterior tendríamos que su diferencia

$$\{s_i - L_1 - s_i + L_2\}_{i=1}^{\infty} = \{L_2 - L_1\}_{i=1}^{\infty} \to 0$$

converge a cero, lo cual no es posible pues la sucesión $\{L_2 - L_1\}_{i=1}^{\infty}$ es constante y converge a $L_2 - L_1 \neq 0$. Luego, no se puede suponer que la proposición sea falsa porque se llegaría a un absurdo, por tanto la proposición tiene que ser verdadera. $\triangleleft$

Enseguida mostraremos que, bajo las operaciones de suma y producto de sucesiones, se preserva la propiedad de convergencia. Esto significa que al sumar y multiplicar sucesiones convergentes obtenemos de nuevo sucesiones convergentes.

Teorema 4.1. Sean $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}, \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes tales que $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = L$ y $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = M$. Entonces:

(a) La sucesión suma $\{a_i + b_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} + \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente y su límite es igual a la suma de los límites de $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, o sea,

$$\lim_{i\to\infty} (a_i + b_i)_i = L + M.$$

(b) La sucesión producto $\{a_i b_i\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \cdot \{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente y su límite es igual al producto de los límites de $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$, o sea,

$$\lim_{i\to\infty} a_i b_i = LM.$$

(c) Si $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es tal que $a_i \neq 0$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ y converge a $L \neq 0$, entonces la sucesión $\left\{\frac{1}{a_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $\frac{1}{L}$, o sea,

$$\lim_{i\to\infty} \frac{1}{a_i} = \frac{1}{L}.$$

Demostración. Para probar el inciso (a), observamos que si $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = L$ y $\lim\limits_{i\to\infty} b_i = M$, entonces las sucesiones

$$\{a_i - L\}_{i=1}^{\infty} \text{ y } \{b_i - M\}_{i=1}^{\infty}$$

convergen ambas a cero. La proposición 4.3 implica entonces que su suma

$$\{a_i + b_i - (L + M)\}_{i=1}^{\infty}$$

converge también a cero, por lo que $\{a_i + b_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $L + M$.

Para probar (b) observemos que

$$\{a_i b_i - LM\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i b_i - a_i M + a_i M - LM\}_{i=1}^{\infty}, \tag{4.4}$$

donde hemos sumado y restado el término $a_i M$ a $a_i b_i - LM$ para cada $i = 1, 2, 3, \ldots$ Ahora (4.4) se puede escribir en la forma

$$\{a_i b_i - a_i M + a_i M - LM\}_{i=1}^{\infty} = \{a_i\}_{i=1}^{\infty} \{b_i - M\}_{i=1}^{\infty} + \{M\}_{i=1}^{\infty} \{a_i - L\}_{i=1}^{\infty},$$

y en el lado derecho, el producto $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \{b_i - M\}_{i=1}^{\infty}$ converge a cero pues $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es acotada por ser convergente y $\{b_i - M\}_{i=1}^{\infty}$ converge a cero. El término $\{M\}_{i=1}^{\infty} \{a_i - L\}_{i=1}^{\infty}$ también converge a cero, por las mismas razones. Luego, $\{a_i b_i - LM\}_{i=1}^{\infty}$ converge a cero, o lo que es lo mismo, $\lim\limits_{i\to\infty} a_i b_i = LM$. La prueba de (c) se obtiene escribiendo

$$\left\{\frac{1}{a_i} - \frac{1}{L}\right\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{L - a_i}{a_i L}\right\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{a_i L}\right\}_{i=1}^{\infty} \{L - a_i\}_{i=1}^{\infty}$$

y observando que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{a_i L}\right\}_{i=1}^{\infty}$ es acotada ya que $\lim_{i\to\infty} a_i = L \neq 0$, y tomando el intervalo con centro L y radio $r = |L|/3$ existirá una etiqueta N tal que

$$|a_i - L| < \frac{|L|}{3} \quad \text{si } i > N;$$

luego, aplicando la desigualdad $|a_i - L| \geqslant |L| - |a_i|$ tendremos

$$|a_i| \geqslant \frac{2|L|}{3} \quad \text{si } i > N$$

y, por tanto,

$$\frac{1}{|a_i||L|} \leqslant \frac{3}{2L^2} \quad \text{si } i > N.$$

Así, la sucesión $\{1/a_i L\}_{i=1}^{\infty}$ es acotada y entonces la sucesión de la derecha en la expresión

$$\left\{\frac{1}{a_i} - \frac{1}{L}\right\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{a_i L}\right\}_{i=1}^{\infty} \{L - a_i\}_{i=1}^{\infty}$$

converge a cero y entonces

$$\left\{\frac{1}{a_i}\right\}_{i=1}^{\infty} \text{ converge a } \frac{1}{L}. \triangleleft$$

Nota Importante. *En el inciso (c) del teorema 4.1, la condición $L \neq 0$ es necesaria para que el límite de la sucesión $\{1/a_i\}_{i=1}^{\infty}$ exista y sea $1/L$. Si se remueve esa condición, el inciso (c) deja de ser válido, como lo muestra la sucesión $\{1/i\}_{i=1}^{\infty}$, que converge a cero, pero su recíproca $\left\{\frac{1}{1/i}\right\}_{i=1}^{\infty} = \{i\}_{i=1}^{\infty}$ no converge, pues crece sin límite.*

Finalizamos esta subsección con el resultado siguiente, de gran utilidad, y que es consecuencia de la propiedad de continuidad de los números reales.

Proposición 4.5. Toda sucesión acotada posee una subsucesión convergente.[1]

Demostración. Sea $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión cuyos elementos pertenecen al intervalo $[a, b]$. Dividamos ahora el intervalo $[a, b]$ en los intervalos de igual longitud, $\left[a, \frac{a+b}{2}\right]$ y $\left[\frac{a+b}{2}, b\right]$. De aquí podemos concluir que en al menos uno de esos intervalos habrá una infinidad de puntos de la sucesión $\{c_i\}$ puesto que, aunque sus valores coincidan, los elementos de la sucesión se consideran distintos si sus etiquetas son distintas. Supongamos que eso ocurre en el primer subintervalo, y lo denotaremos por $[a_1, b_1]$; dividámoslo a su vez en los subintervalos de igual longitud $\left[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}\right]$ y $\left[\frac{a_1+b_1}{2}, b_1\right]$, y escojamos ahora alguno de ellos que contenga una infinidad de elementos de la sucesión $\{c_i\}$ y denotémoslo por $[a_2, b_2]$. Repitamos este proceso, dando lugar a una sucesión $I_i = [a_i, b_i]$ de intervalos cerrados anidados de longitud $\frac{b-a}{2^i}$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ Los extremos izquierdos $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ de los intervalos I_k forman una sucesión creciente y acotada de números reales y los extremos derechos $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ forman una sucesión decreciente y acotada. En virtud de la propiedad de continuidad de los números reales, la sucesión de los extremos izquierdos deberá converger a su supremum y la sucesión de extremos derechos convergerá a su infimum. Como la diferencia entre los extremos correspondientes $\{b_i - a_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiende a cero por construcción, tendremos que ambas sucesiones convergen a un mismo punto real $c \in [a, b]$. Ahora en cada intervalo I_i escojamos un elemento $c_{m(i)} \in I_i$ de la sucesión $\{c_i\}$, de tal manera que $m(1) < m(2) < \cdots < m(k) < m(k+1) < \cdots$; se puede hacer ésto pues en cada intervalo I_i existe una infinidad de elementos de $\{c_i\}_{i=1}^{\infty}$. Luego, la subsucesión $\left\{c_{m(k)}\right\}$ está bien definida y es convergente al punto c. $\triangleleft$

[1]Esta proposición es conocida como *teorema de Bolzano-Weierstrass,* por el matemático checo Bernhard Bolzano (1781-1848) y el matemático alemán Karl Weierstrass (1815-1897).

4.3 Sucesiones monótonas

Una sucesión de números reales $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ se dice *creciente* si para cada par de etiquetas $k, j = 1, 2, 3, \ldots$ con $k > j$ se tiene que $s_k > s_j$. Análogamente, la sucesión se dice *decreciente* si $k > j$ implica $s_k < s_j$. A las sucesiones crecientes o decrecientes se les llama genéricamente *sucesiones monótonas*.

Ejemplo 4.6. La sucesión $\left\{\dfrac{i-1}{i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión creciente, pues si $k > j$ se tiene que

$$s_k - s_j = \frac{k-1}{k} - \frac{j-1}{j} = \frac{k-j}{kj} > 0,$$

es decir,

$$s_k > s_j. \triangleleft$$

La propiedad más importante de las sucesiones reales monótonas es que si son acotadas entonces son convergentes. Este resultado es, de hecho, equivalente a la propiedad de continuidad de los números reales y, por tanto, juega un papel relevante en la fundamentación del cálculo.

Teorema 4.2. Cada sucesión monótona y acotada de números reales es convergente.

Demostración. Supongamos que $\{s_i\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión real creciente y acotada. En virtud de la propiedad de continuidad de los reales que discutimos en el capítulo **??**, existe un número real L que es el supremum del conjunto formado con los elementos de la sucesión, es decir,

$$s_i \leqslant L \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \ldots$$

y si $s_i \leqslant M$ para $i = 1, 2, 3, \ldots$ para algún otro número real M, entonces $L \leqslant M$. Probaremos ahora que

$$\lim_{i \to \infty} s_i = L.$$

Para ello, sea $I = (L - r, L + r)$ el intervalo con centro L y radio $r > 0$. Note que no existen elementos de la sucesión en $[L, L + r)$ pues L es cota superior de la sucesión, pero sí deberá existir un elemento s_N de la sucesión en $(L - r, L]$ ya que si así no fuera, entonces $L - r$ sería una cota superior de la sucesión menor que L, lo cual no es posible pues hemos supuesto que L es la mínima cota superior o supremum de la sucesión. Luego, deberá existir un elemento $s_N \in (L - r, L]$ y, al ser la sucesión creciente, todos sus elementos s_i con etiqueta i mayor que N, se encontrarán a la derecha de s_N y consecuentemente pertenecerán al intervalo I. Como I es un intervalo de radio arbitrario, hemos probado que $L = \lim_{i \to \infty} s_i$. $\triangleleft$

Proposición 4.6. Si A es un conjunto acotado de puntos de un intervalo cerrado $[a, b]$ y S es su mínima cota superior, entonces existe una sucesión no-decreciente de puntos de A que converge a S.

Demostración. Si $S \in A$, tomando la sucesión constante $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} = \{S\}_{i=1}^{\infty}$ tendremos una sucesión no-decreciente de puntos de A convergente a S. Si $S \notin A$ debe existir un elemento a_1 de A con $a_1 < S$. Como $S = \sup A$, existe $a_2 \in A$ con $a_1 < a_2 < S$ y $S - a_2 < \frac{1}{2}$ ya que si así no fuera, entonces $S - 1/2$ sería el supremum de A, lo cual no puede ser verdadero. Análogamente, y por la misma razón, deberá existir un elemento a_3 de A tal que $a_2 < a_3 < S$ y $S - a_3 < \frac{1}{3}$. Esto nos permite construir una sucesión creciente $a_1 < a_2 < \cdots < a_n < \cdots < S$ de elementos de A tales que $S - a_n < 1/n$ para cada natural n. Luego, $\lim_{n\to\infty} a_n = S$. ◁

4.3.1 Criterio de convergencia de Cauchy

El criterio de convergencia de Cauchy[2] proporciona una manera de constatar la convergencia de una sucesión sin que necesariamente se conozca su límite. Este es un resultado de gran utilidad en el análisis matemático y aquí lo presentamos en los términos siguientes.

Definición 4.3. Se dice que una sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisface la *propiedad de Cauchy* si para cada $r > 0$ existe una etiqueta N_r tal que para cualquier par de etiquetas $m, n > N_r$ se tiene que $|a_m - a_n| < r$.

Teorema 4.3. Una sucesión de números reales $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente si y sólo si satisface la propiedad de Cauchy.

Demostración. *Suficiencia:* supongamos que la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ satisface la propiedad de Cauchy. En particular, si tomamos $r = 1$ existe una etiqueta N_1 tal que si $m, n \geqslant N_1$ se cumple

$$|a_m - a_n| < 1,$$

es decir, en particular

$$|a_m - a_{N_1}| < 1 \text{ si } m > N_1,$$

lo que implica que

$$|a_m| < 1 + |a_{N_1}| \text{ si } m > N_1,$$

[2]Augustin Louis Cauchy (1789-1857), mencionado en el capítulo primero, quien fue pionero en el estudio de la convergencia y la divergencia de series infinitas; hizo también aportaciones en ecuaciones diferenciales y física matemática, entre otras áreas.

y entonces el número

$$M = \max\{|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{N_1-1}|, 1 + |a_{N_1}|\}$$

será tal que

$$-M \leqslant a_i \leqslant M \quad \text{para todo } i = 1, 2, \ldots,$$

lo cual significa que la sucesión es acotada y todos sus elementos pertenecen al intervalo cerrado $[-M, M]$. Luego, en virtud de la proposición 4.5, posee una subsucesión $\{a_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ convergente, digamos a un número L. Probaremos ahora que la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ también converge a L. Para ello consideremos el intervalo arbitrario $(L - r, L + r)$. En primer lugar, dado que la subsucesión $\{a_{m_i}\}_{i=1}^{\infty}$ converge a L, existirá una etiqueta N_r tal que si $i > N_r$, se tiene que

$$|a_{m_i} - L| < \frac{r}{2}.$$

Por otro lado, como la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es de Cauchy, existe una etiqueta W tal que si j y k son etiquetas con $j > W$ y $k > W$ entonces

$$|a_j - a_k| < \frac{r}{2}.$$

Tomemos $W > N_r$, $S > W$, y calculemos la distancia de a_S a L. Entonces, como también $m_W > W$,

$$\begin{aligned} |a_s - L| &\leqslant |a_s - a_{m_W} + a_{m_W} - L| \\ &\leqslant |a_s - a_{m_W}| + |a_{m_W} - L| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r, \end{aligned}$$

y habiendo tomado $r > 0$ arbitrario, se tiene que

$$\lim_{i\to\infty} a_i = L.$$

Necesidad: Esto quiere decir que si la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente, necesariamente es de Cauchy. Esto es más fácil de probar ya que, si $r > 0$, por ser $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ convergente, digamos a un número L, existe una etiqueta N_r tal que

$$|a_i - L| < \frac{r}{2} \text{ si } i > N_r.$$

Luego si j y k son dos etiquetas mayores que N_r se tendrá

$$|a_j - a_k| \leqslant |a_j - L| + |a_k - L| < \frac{r}{2} + \frac{r}{2} = r,$$

lo cual nos dice que la sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ tiene la propiedad de Cauchy. $\triangleleft$

4.4 Límite de una función en un punto

Definición 4.4. Sea $y = f(x)$ una función real definida en un intervalo abierto (a, b) y x_0 un punto del intervalo cerrado $[a, b]$. Diremos que el *límite de la función f cuando la variable x tiende a x_0 tiene el valor L* si para cada sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de (a, b), distintos de x_0, y que converge a x_0, se tiene que la sucesión $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a L. Simbólicamente, denotaremos lo anterior escribiendo

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Nota Importante. *Una definición equivalente fue dada alrededor de 1850 por Karl Weierstrass, llamada citerio ε-δ para la existencia del límite, y que enunciamos a continuación: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ si para cada $\varepsilon > 0$ existe un número $\delta > 0$ (que depende de ε y de x_0) tal que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \varepsilon$.*

En el caso de funciones $y = f(x)$ definidas en intervalos de la forma (a, ∞) se dirá que L es *el límite de f cuando la variable x tiende a* ∞, si para cada sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de (a, ∞) creciente y no acotada se tiene que la sucesión $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a L. Tal caso se denota

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L.$$

En lenguaje común, podemos decir que L es el límite de una función f cuando la variable independiente tiende al valor x_0, si al tomar valores de la variable independiente x cada vez más cercanos a x_0, los valores correspondientes $y = f(x)$ de la variable dependiente son "cada vez más cercanos a L". A la expresión "cada vez más cercanos" le hemos dado significado con el concepto de sucesión convergente y con la condición de que la aproximación al punto x_0 se haga mediante puntos distintos de él.

Nota Importante.

(a) *De acuerdo a la definición 4.4, el punto x_0 donde se define el límite de la función, no tiene que estar necesariamente en el dominio de la función; lo importante es que x_0 sea límite de puntos del dominio de la función. Por ejemplo, se puede hablar del límite de la función en los puntos extremos a y b, aunque la función sólo esté definida en (a, b).*

(b) *Cuando se dice que la variable independiente x toma valores cada vez más cercanos al valor x_0, se están considerando las dos posibilidades: que x se aproxime a x_0 por la izquierda y que se aproxime por la derecha. Si*

$\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que se aproxima a x_0 sólo por la izquierda (es decir, $x_n - x_0 < 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$) y la sucesión $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al número L^-, entonces escribimos

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L^-.$$

Si $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión que se aproxima a x_0 sólo por la derecha (es decir, $z_n - x_0 > 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$) y la sucesión $\{f(z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge al número L^+, entonces escribimos

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L^+.$$

(c) *Los números L^- y L^+ se llaman* límite por la izquierda *y* límite por la derecha*, respectivamente, de f en x_0.*

(d) *Para que el límite de una función no exista en un punto x_0, es suficiente que $L^+ \neq L^-$, o que uno de estos límites laterales no exista, o que ninguno exista, como se ilustra en el ejemplo 4.7.*

Ejemplo 4.7. Consideremos las funciones $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, definidas mediante

$$(a) \quad f_1(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 & \text{si} \quad x \geqslant 0 \end{cases},$$

$$(b) \quad f_2(x) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad x \leqslant 0 \\ 1/x & \text{si} \quad x > 0 \end{cases},$$

$$(c) \quad f_3(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases},$$

cuya gráficas aparecen en la figura 4.1. Tomemos las sucesiones

$$\{x_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{1}{i}\right\}_{i=1}^{\infty}, \qquad \{z_i\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\frac{-1}{i}\right\}_{i=1}^{\infty}.$$

Nótese que $x_i \to 0^+$ y $z_i \to 0^-$ si $i \to \infty$.

Calculamos las sucesiones correspondientes definidas con los valores de cada una de las funciones sobre estas sucesiones y obtenemos lo siguiente:

En el primero de los casos, $\{f_1(x_i)\}_{i=1}^{\infty} = \{1\}_{i=1}^{\infty} \to 1 = L^+$ si $i \to \infty$, y $\{f_1(z_i)\}_{i=1}^{\infty} = \{-1\}_{i=1}^{\infty} \to -1 = L^-$ si $i \to \infty$. Como $L^+ \neq L^-$, se concluye que $\lim\limits_{x \to 0} f_1(x)$ no existe.

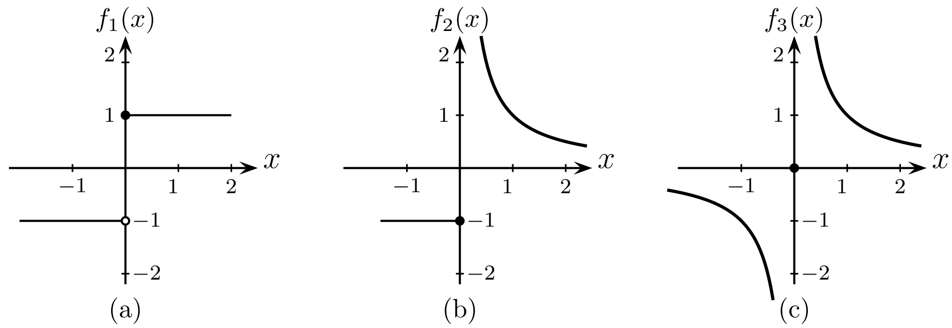

Figura 4.1: Funciones del ejemplo 4.7

En el segundo caso, $\{f_2(x_i)\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{x_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ no converge (es decir, L^+ no existe), mientras que $\{f_1(z_i)\}_{i=1}^{\infty} = \{-1\}_{i=1}^{\infty}$ converge a -1 $(= L^-)$ cuando $i \to \infty$; entonces $\lim\limits_{x\to 0} f_2(x)$ no existe.

En el último de los casos, las sucesiones $\{f_3(x_i)\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{x_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ y $\{f_3(z_i)\}_{i=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{1}{z_i}\right\}_{i=1}^{\infty}$ no convergen; luego $\lim\limits_{x\to 0} f_3(x)$ no existe. ◁

Ejemplo 4.8. La función $f(x) = x^2 + 2x + 3$ definida en $\mathbb{R}$ tiene por límite en el punto $x_0 = 2$ al valor 11 ya que si $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ converge a 2, la sucesión $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ es la sucesión

$$\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty} = \left\{x_i^2 + 2x_i + 3)\right\}_{i=1}^{\infty} = \left\{x_i^2\right\}_{i=1}^{\infty} + \{2x_i\}_{i=1}^{\infty} + \{3\}_{i=1}^{\infty},$$

la cual converge al valor 11 en virtud del teorema 4.1. ◁

Ejemplo 4.9. Límites trigonométricos básicos:

$$(a) \quad \lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0; \qquad (b) \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1;$$

$$(c) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1; \qquad (d) \quad \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0.$$

Para probar estas igualdades, considérese la figura 4.2.

(a) Por definición, las coordenadas del punto A (sobre el círculo unitario) son $(\cos x, \operatorname{sen} x)$, donde x es la longitud del arco AD. Se observa que el segmento $AB = \operatorname{sen} x$ no es mayor que x, la longitud del arco AD, para valores positivos pequeños de x. Por tanto

$$-x \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant x,$$

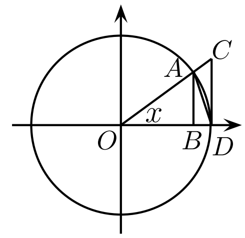

Figura 4.2: Límites trigonométricos del ejemplo 4.9

y

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen} x = 0$$

(ver ejercicio 4.6.5). Para valores pequeños y negativos de x tenemos:

$$x \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant -x,$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} \operatorname{sen} x = 0.$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \operatorname{sen} x = 0.$$

(b) Nótese que el punto B se aproxima al punto D cuando x se aproxima a 0 (por la izquierda o por la derecha). Luego,

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1.$$

(c) La siguiente desigualdad es obvia para valores pequeños de x :
área del triángulo $OAB \leqslant$ área del sector $OAD \leqslant$área del triángulo OCD, o sea,

$$\frac{1}{2}\cos x \operatorname{sen} x \leqslant \frac{x}{2} \leqslant \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}. \tag{4.5}$$

Supongamos que x es positivo. Multiplicando cada parte de la desigualdad (4.5) por $2/\operatorname{sen} x$ obtenemos

$$\cos x \leqslant \frac{x}{\operatorname{sen} x} \leqslant \frac{1}{\cos x}.$$

Entonces, en el límite tenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x}{\operatorname{sen} x} = 1,$$

y, al tomar los recíprocos,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Como

$$\frac{\operatorname{sen}(-x)}{-x} = \frac{\operatorname{sen} x}{x},$$

se deduce que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

Por tanto,

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1.$$

(d) Finalmente,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} &= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{x(1 + \cos x)} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} \frac{1}{1 + \cos x} \\ &= \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} \frac{\operatorname{sen} x}{1 + \cos x} = 1 \cdot \frac{0}{2} = 0. \ \triangleleft \end{aligned}$$

De la definición de límite de una función y las propiedades de las sucesiones convergentes respecto de las operaciones de suma y producto, se sigue el teorema siguiente, que justifica el penúltimo paso de la demostración anterior.

Teorema 4.4. Sean $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ y $g : (a, b) \to \mathbb{R}$ funciones reales y $x_0 \in [a, b]$. Entonces:

(a) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = M$, se cumple que

$$\lim_{x \to x_0} (f + g)(x) = L + M \quad \text{y} \quad \lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = LM.$$

(b) Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ y $L \neq 0$, se tiene que

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}.$$

4.5 Continuidad de funciones

El concepto de límite que hemos presentado nos permite definir en términos precisos la noción de continuidad en un punto para una función real de variable real. La continuidad de una función es una propiedad de carácter local, en tanto se refiere al valor en un punto y al comportamiento de la función alrededor de ese punto. En lenguaje llano, una función real de variable real $y = f(x)$ se dice *continua* en un punto x_0 de su dominio, si en puntos x cercanos a x_0 los valores de la función $y = f(x)$ son cercanos a $f(x_0)$. En términos del concepto de límite, la definición de continuidad se escribe así:

Definición 4.5. Una función real $y = f(x)$ definida en un intervalo I se dice *continua en un punto* $x_0 \in I$ si para cada sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de I convergente a x_0, la sucesión $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ es una sucesión convergente a $f(x_0)$. Es decir,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Si la función $f(x)$ es continua en cada uno de los puntos de su dominio I, se dice que la función es *continua en el intervalo* I.

Nota Importante. *La continuidad en un punto x_0 del dominio de una función puede no existir, ya sea porque el límite de la función en ese punto no exista (ver ejemplo 4.10), o sí exista, pero sea distinto del valor $f(x_0)$ de la función en el punto (ver ejemplo 4.11).*

Ejemplo 4.10. La función $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$$

es continua en $x_0 \neq 0$ y no es continua en $x_0 = 0$ pues el $\lim_{x \to 0} f(x)$ no existe. (La gráfica de $f(x)$ aparece en la figura 4.1(c).) $\triangleleft$

Ejemplo 4.11. La función $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ -1 & \text{si} \quad x = 0, \end{cases}$$

es continua en todo su dominio salvo en $x_0 = 0$ ya que $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$, que es distinto de $f(0) = -1$. $\triangleleft$

Ejemplo 4.12. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \text{ es racional} \\ 0 & \text{si} \quad x \text{ es irracional} \end{cases}$$

no es continua en punto alguno de $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

Enseguida probaremos que la propiedad de continuidad en un punto se preserva bajo las operaciones de suma, producto y composición de funciones.

Teorema 4.5. Para un intervalo I, sean $f : I \to \mathbb{R}$ y $g : I \to \mathbb{R}$ funciones reales y $x_0 \in I$.

(a) Si f y g son continuas en x_0, entonces las funciones suma y producto $f + g$ y $f \cdot g$ son continuas en x_0.

(b) Si $h : J \to \mathbb{R}$, $f(I) \subset J$, f es continua en x_0 y h es continua en $f(x_0)$, entonces la función composición $h \circ f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es continua en x_0.

Demostración. La prueba de (a) se sigue directamente de las propiedades de los límites de funciones respecto de la suma y producto de funciones. Para probar (b), tomemos una sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de I convergente a x_0. Como f es continua en x_0, se tiene que $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $f(x_0)$ y en vista de que h es una función continua en $f(x_0)$, tendremos que $\{h(f(x_i))\}_{i=1}^{\infty} = \{(h \circ f)(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ convergerá a $h(f(x_0)) = (h \circ f)(x_0)$. Esto prueba que siempre que una sucesión converja a x_0, la sucesión formada por sus imágenes bajo la función composición $h \circ f$ convergerá a $(h \circ f)(x_0)$, es decir $h \circ f$ es continua en x_0. $\triangleleft$

Una familia muy importante de funciones continuas son las llamadas funciones *lipschitzianas,*[3] que presentamos a continuación.

Definición 4.6. Una función real $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice *lipschitziana* si existe $L > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \leqslant L|x - y|$ para cualesquiera $x, y \in A$.

4.6 Continuidad en intervalos compactos

Concluimos este capítulo, enlistando y probando las propiedades principales de las funciones continuas definidas en un *intervalo compacto*, es decir, en un intervalo cerrado y acotado. La prueba de estas propiedades se basa generalmente en el principio de continuidad de la recta real y en la propiedad que tiene todo intervalo cerrado y acotado de contener el límite de cada sucesión convergente formada de puntos de ese intervalo.

Teorema 4.6. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua en $[a, b]$. Entonces:

(a) La función f es una función acotada en $[a, b]$, es decir, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leqslant M$ para todo $x \in [a, b]$.

(b) La función f alcanza en $[a, b]$ su supremum y su infimum, es decir, existen x_1 y $x_2 \in [a, b]$ tales que $f(x_1) \geqslant f(x)$ y $f(x_2) \leqslant f(x)$ para toda $x \in [a, b]$.

[3] Llamadas así en honor de Rudolf O. S. Lipschitz (1832-1903), matemático alemán, quien descubrió que esta propiedad garantiza la unicidad de la solución de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$.

(c) Si $f(a) > 0$ y $f(b) < 0$ entonces existe $x_c \in (a, b)$ tal que $f(x_c) = 0$ (llamada *propiedad del valor intermedio*).

(d) La función $f(x)$ es *uniformemente continua* en $[a, b]$, es decir, para cada $r > 0$ existe $\delta > 0$ tal que siempre que $x, z \in [a, b]$ con $|x - z| < \delta$, se cumple que $|f(x) - f(z)| < r$.

Demostración. Probaremos el inciso (a) por contradicción: supongamos que existiese una función f continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y ésta no fuera acotada; esto significaría que para cada número natural n, existiría un punto $c_n \in [a, b]$ tal que $|f(c_n)| > n$. Siendo $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión acotada, en virtud de la Proposición 4.5, podemos extraer de $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ una subsucesión $\left\{c_{m(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ convergente a un punto $c \in [a, b]$. Por otro lado, por construcción, la sucesión $\left\{f(c_{m(n)})\right\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente ya que $|f(c_{m(n)})| > m(n)$, lo cual da lugar a una contradicción. Luego, la suposición que hicimos al principio es falsa y entonces toda función continua en $[a, b]$ es acotada.

Para demostrar la validez del inciso (b), denotemos por

$$S = \sup\{f(x) \text{ para } x \in [a, b]\}.$$

Por la definición de supremum, existe una sucesión creciente $\{f(x_i)\}_{i=1}^{\infty}$ convergente a S. Consideremos ahora la sucesión $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Esta sucesión es un conjunto infinito de puntos de $[a, b]$ y por el mismo argumento que usamos en la prueba del inciso (a), podremos extraer de ella una subsucesión $\left\{x_{m(i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ convergente a un punto $x = c$. Por ser la función continua en c, tendremos que $\lim_{i\to\infty} f(x_{m(i)}) = f(c)$. Pero $\lim_{i\to\infty} f(x_{m(i)}) = \lim_{i\to\infty} f(x_i) = S$ por ser $\left\{x_{m(i)}\right\}_{i=1}^{\infty}$ subsucesión de $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$. Luego, $f(c) = S$, es decir el supremum S se alcanza en el punto $x = c$.

Para probar el inciso (c), realicemos el proceso siguiente: en un primer paso, determinemos el punto medio $m_1 = (a + b)/2$ de $[a, b]$. Si $f(m_1) = 0$, habremos probado el enunciado del teorema. Si $f(m_1) > 0$, consideramos el intervalo $[m_1, b] \subset [a, b]$, y si $f(m_1) < 0$, entonces consideraremos el intervalo $[a, m_1] \subset [a, b]$. Supongamos que $f(m_1) > 0$, en tal caso, determinemos enseguida el punto medio $m_2 = (b + m_1)/2$ de $[m_1, b]$ y evaluemos $f(m_2)$. Si $f(m_2) = 0$ habremos probado el inciso (c). Si por el contrario $f(m_2) > 0$, consideramos el intervalo $[m_2, b] \subset [m_1, b] \subset [a, b]$, y si $f(m_2) < 0$ entonces consideramos el intervalo $[a, m_2] \subset [a, m_1] \subset [a, b]$ y volvemos a tomar el punto medio m_3, y repetimos el proceso. Finalmente, habremos construido una sucesión I_n de intervalos cerrados anidados $I_n \subset I_{n-1} \subset I_{n-2} \subset \cdots \subset [a, b]$ de longitud $(b - a)/2^n$ y tales que el valor de f en el extremo izquierdo de cada intervalo es positivo y negativo en cada extremo derecho. Teniendo en cuenta que la sucesión $\{a_n\}$ formada con los extremos izquierdos de I_n y la sucesión $\{b_n\}$ formada con los extremos derechos de los intervalos I_n son sucesiones monótonas con $b_n - a_n < (b-a)/2^n$, ambas sucesiones deberán converger a un mismo punto c,

$$c = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n$$

y por la continuidad de f en c, deberemos tener

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n).$$

Como $f(a_n) > 0$ y $f(b_n) < 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, concluimos que simultáneamente se tendrá que $f(c) \geqslant 0$ y $f(c) \leqslant 0$ y por tanto $f(c) = 0$, con lo que se prueba el inciso (c).

La prueba de la continuidad uniforme la daremos también por contradicción. Supongamos así que lo afirmado en el inciso (d) no es cierto. Esto quiere decir que existirá un número $\varepsilon_0 > 0$ y dos sucesiones $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$y $\{b_i\}_{i=1}^{\infty}$ de elementos de $[a,b]$ tales que

$$b_i > a_i,\ b_i - a_i < \frac{1}{i},\ \text{y}\ \ |f(b_i) - f(a_i)| > \varepsilon_0 \text{ para } i = 1, 2, 3, \ldots$$

Repitiendo el argumento que utilizamos al probar el inciso (a), podemos afirmar la existencia de una sucesión formada con elementos de la forma $a_{m(i)}$ con $m(1) < m(2) < \cdots m(k) < \cdots$, la cual es convergente a algún número $c \in [a,b]$. Fijándonos ahora en la sucesión correspondiente $b_{m(i)}$, podemos asegurar que también convergerá al mismo número c ya que $b_{m(i)} - a_{m(i)} < 1/m(i)$. Por ser f continua en c, debemos tener que $\lim_{i\to\infty} f(a_{m(i)}) = \lim_{i\to\infty} f(b_{m(i)}) = f(c)$, que contradice el hecho de que $|f(b_{m(i)}) - f(a_{m(i)})| > \varepsilon_0$ para toda $i = 1, 2, 3, \ldots$ Por tanto la suposición hecha es falsa y lo afirmado en el inciso (d) es verdadero. $\triangleleft$

El resultado siguiente es consecuencia de la propiedad del valor intermedio para funciones continuas.

Corolario 4.1. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua e inyectiva, entonces f es monótona.

Demostración. Supongamos que f no es monótona en $[a,b]$. Entonces existen $a \leqslant x_1 < x_2 < x_3 \leqslant b$ tales que $f(x_1) < f(x_2)$ y $f(x_2) > f(x_3)$, o $f(x_1) > f(x_2)$ y $f(x_2) < f(x_3)$. Supongamos que se da el primer caso. Como no es posible que $f(x_3) = f(x_1)$, se tendrá que $f(x_3) > f(x_1)$, o $f(x_3) < f(x_1)$; en la primera de estas posibilidades podemos asegurar la existencia de un número c tal que $f(x_1) < f(x_3) < c < f(x_2)$. Consideremos la función continua $h(x) = f(x) - c$ y observemos que $h(x_1) < 0$, $h(x_2) > 0$ y $h(x_3) < 0$. Por la propiedad del valor intermedio, existirán números $y_c \in (x_1, x_2)$ y $z_c \in (x_2, x_3)$ tales que $h(y_c) = h(z_c) = 0$, pero esto implicaría que $f(y_c) = f(z_c)$, contrario a la suposición de que f es inyectiva. $\triangleleft$

Corolario 4.2. Si una función continua $f{:}[a,b] \to \mathbb{R}$ tiene inversa, ésta es continua.

NOTA IMPORTANTE.

(a) *En el teorema 4.6, la condición de que el dominio de continuidad de la función sea un intervalo cerrado es imprescindible. Basta considerar como contraejemplo la función* $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ *definida mediante*

$$f(x) = \frac{1}{x},$$

que obviamente ni es acotada ni es uniformemente continua en $(0,1)$.

(b) *La propiedad del valor intermedio da lugar al llamado "método de bisección" para determinar soluciones a ecuaciones de la forma* $f(x) = 0$ *con* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *una función continua. El método proporciona soluciones con el grado de aproximación que se desee y consiste de los siguientes pasos:*

1º *Encuentre* $a, b \in \mathbb{R}$ *con* $a < b$ *y tales que* $f(a) > 0$ *y* $f(b) < 0$. *En virtud de la propiedad del valor intermedio, existirá una solución a* $f(x) = 0$ *en* $[a, b]$.

2º *Tome el punto medio* $(a + b)/2$ *del intervalo* $[a, b]$ *y considere el valor* $f((a + b)/2)$. *Si* $f((a + b)/2) = 0$ *habremos encontrado una solución a la ecuación. Si* $f((a + b)/2) > 0$, *se considera el intervalo* $[(a + b)/2, b]$ *y por el mismo argumento, existirá en él una solución para la ecuación. En caso contrario, si* $f((a + b)/2) < 0$, *existirá una solución en el intervalo* $[a, (a + b)/2]$.

3º *Supongamos que* $f((a + b)/2) < 0$. *Tome el punto medio* $(3a + b)/4$ *del intervalo* $[a, (a + b)/2]$, *evalúe la función en ese punto y, según sea su signo, tome el intervalo* $[a, (3a + b)/4]$ *si* $f((3a + b)/4) < 0$ *o el intervalo* $[(3a + b)/4, (a + b)/2]$ *si se tiene que* $f((3a + b)/4) > 0$; *en el nuevo intervalo, que es de longitud* $(b - a)/8$, *deberá existir una solución.*

4º *Prosiguiendo con este proceso, en el* n*-ésimo paso se tendrá ubicada una solución en un intervalo de longitud* $(b - a)/2^n$, *lo que nos permite conocer una solución de la ecuación con un error menor que* $(b - a)/2^n$.

Ejemplo 4.13. Encuentre una solución para la ecuación $x^3 - 15x + 1 = 0$ con aproximación de $1/100$.

Solución:

1º Tomando $a = 0$ y $b = 1$, tenemos $f(0) = 1 > 0$ y $f(1) = -13 < 0$, y por ser $f(x) = x^3 - 15x + 1$ continua, existirá una solución para la ecuación en el intervalo $I_1 = [0, 1]$. Este primer paso, nos determina el número de etapas que serán necesarias para obtener una solución con un error pedido. En nuestro caso, deberemos llevar al cabo al menos 8 bisecciones para tener un error máximo de $\frac{1}{2^8} \left(< \frac{1}{100}\right)$.

2º El punto medio de I_1 es el punto $x = \frac{1}{2}$ y $f(\frac{1}{2}) < 0$; luego, habrá una solución en el intervalo $I_2 = [0, \frac{1}{2}]$.

3º El punto medio de I_2 es el punto $x = \frac{1}{4}$ y $f(\frac{1}{4}) < 0$; así, la solución se halla en $I_3 = [0, \frac{1}{4}]$.

4º El punto medio de I_3 es $x = \frac{1}{8}$ y $f(\frac{1}{8}) < 0$; luego, la solución se encuentra en $I_4 = [0, \frac{1}{8}]$.

5º El punto medio de I_4 es $x = \frac{1}{16}$ y $f(\frac{1}{16}) > 0$, y entonces la solución se localiza en el intervalo $I_5 = [\frac{1}{16}, \frac{1}{8}]$.

6º El punto medio de I_5 es $x = \frac{3}{32}$ y $f(\frac{3}{32}) < 0$, y la solución se encuentra en $I_6 = [\frac{1}{16}, \frac{3}{32}]$.

7º El punto medio de I_6 es $x = \frac{5}{64}$ y $f(\frac{5}{64}) < 0$; luego, la solución se ubica en $I_7 = [\frac{1}{16}, \frac{5}{64}]$

8º El punto medio de I_7 es $x = \frac{9}{128}$ con $f(\frac{9}{128}) < 0$ y tendremos una solución en $[\frac{8}{128}, \frac{9}{128}]$.

De aquí concluimos que el valor $x = \frac{17}{256}$ es un número que satisface la ecuación con un error menor que $1/2^8$, es decir, menor que $1/100$. ◁

Ejercicios y problemas del capítulo

Concepto de sucesión

4.6.1. Determine los primeros cinco elementos de cada una de las sucesiones siguientes.

(a) $\left\{\dfrac{i+1}{i^2+2}\right\}_{i=1}^{\infty}$; (b) $\left\{(-1)^i\right\}_{i=1}^{\infty}$; (c) $\{\operatorname{sen}(\pi i)\}_{i=1}^{\infty}$;

(d) $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$, donde $a_i = 0$ si i es impar y $a_i = \left(\dfrac{i}{2}\right)^2$ si i es par.

4.6.2. Explique por qué la sucesión $\left\{\operatorname{sen}(i^2+2)\right\}_{i=1}^{\infty}$ es subsucesión de $\{\operatorname{sen} i\}_{i=1}^{\infty}$ y diga qué lugar ocupa en la sucesión el octavo elemento de la subsucesión.

4.6.3. Escriba los primeros tres elementos de la subsucesión de la sucesión $\{\operatorname{sen}(i^2+i)\}_{i=1}^{\infty}$ generada por la elección creciente de etiquetas dada por la sucesión $\{i^3\}_{i=1}^{\infty}$. ¿Cuál es el octavo término de la subsucesión y qué lugar ocupa en la sucesión? ¿Cuál es el j-ésimo elemento de la subsucesión?

4.6.4. Escriba la definición de sucesión no convergente.

4.6.5. Considere la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $a_n = \sqrt{2}n - [\sqrt{2}n]$ (recuerde que, para cada número real x, el número $[x]$ es la parte entera de x, es decir, es el mayor entero menor o igual que x).

(a) Muestre que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada.

(b) Muestre que $a_{n+1} - a_n = \sqrt{2} - 1$ ó $\sqrt{2} - 2$.

4.6.6. Considere la sucesión $\left\{\dfrac{2i+3}{i+5}\right\}_{i=1}^{\infty}$. Encuentre una etiqueta a partir de la cual sus elementos distan de $L = 2$ en menos que 10^{-3}. Pruebe que $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = 2$.

Convergencia de sucesiones

4.6.7. Demuestre que toda subsucesión de una sucesión convergente $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ es convergente y tienen el mismo límite.

4.6.8. Dé un ejemplo de una sucesión no convergente que tenga subsucesiones convergentes y otro de una que no tenga subsucesiones convergentes.

4.6.9. Muestre que la sucesión $\{i^3\}_{i=1}^{\infty}$ es creciente.

4.6.10. Diga si la sucesión $\left\{\dfrac{n}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada. Si es así, encuentre una cota.

4.6.11. Sea $0 < t < \pi$ y considere la sucesión a_n definida de la siguiente forma: $a_n = nt - 2\pi k$, para n natural, donde $k \geqslant 0$ es el mayor entero tal que $nt - 2\pi k \geqslant 0$.

(a) Si $t = \sqrt{2}$, calcule a_3, a_{50} y a_{100}.

(b) Demuestre que la sucesión $\{\operatorname{sen} a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es convergente, pero tiene dos subsucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergentes.

4.6.12. Muestre que, para cada $t \in \mathbb{R} - \{0\}$, las sucesiones $\{\operatorname{sen} nt\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{\cos nt\}_{n=1}^{\infty}$ son divergentes.

4.6.13. Demuestre que las sucesiones $\left\{\left(\cos\dfrac{2\pi n}{3}\right)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ y $\left\{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\sqrt[n]{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ son divergentes.

4.6.14. Muestre que la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\dfrac{2n+3}{5n-6}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $\dfrac{2}{5}$ y encuentre una etiqueta N tal que $\left|a_k - \dfrac{2}{5}\right| < 10^{-6}$ si $k > N$.

4.6.15. Diga si las siguientes sucesiones son convergentes y determine su límite.

(a) $\left\{n^{\frac{1}{n}}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (b) $\left\{\dfrac{2n^2+n-3}{n^2+8n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (c) $\left\{\dfrac{n^2}{2^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$;

(d) $\left\{n \operatorname{sen} \dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (e) $\left\{\dfrac{n!}{n^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$; (f) $\left\{\dfrac{2n^4-7n}{n^2+3}\right\}_{n=1}^{\infty}$.

4.6.16. (a) Demuestre que la sucesión $\left\{\dfrac{1}{n+2} \operatorname{sen} n\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a cero.

(b) Encuentre una etiqueta N a partir de la cual los elementos de la sucesión pertenecen al intervalo $(-10^{-4}, 10^4)$.

4.6.17. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de números reales. Conteste Falso o Verdadero, según sea el caso.

(a) Si $a_n < 0$ para toda n y $a_n \to L$, entonces $L < 0$.

(b) Si $a_n \geq 0$ para toda n y $a_n \to L$, entonces $L \geq 0$.

(c) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, entonces es convergente.

(d) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es creciente y acotada, entonces es convergente.

(e) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada, entonces $\left\{\dfrac{1}{n}a_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

(f) Si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente, entonces $\{(-1)^n a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

4.6.18. Pruebe que si $a > 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

4.6.19. Sea una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ no acotada ni superior ni inferiormente y tal que $\lim\limits_{n\to\infty} (a_{n+1} - a_n) = 0$. Demuestre que todo número real es límite de una cierta subsucesión de la sucesión inicial. ¿Puede encontrar una sucesión con esas características?

4.6.20. Demuestre que si las sucesiones $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ tienen el mismo límite, entonces la sucesión $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ con

$$c_n = \begin{cases} a_{2k} & \text{si } \ n = 2k \\ b_{2k+1} & \text{si } \ n = 2k+1, \end{cases}$$

para $k = 1, 2, 3, \ldots$, también converge al mismo límite.

4.6.21. (a) Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión convergente de términos no negativos (es decir, $a_n \geqslant 0$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$). Demuestre que su límite es no negativo.

(b) Demuestre que si $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ son sucesiones convergentes y $a_n \leqslant b_n \leqslant c_n$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} c_n$. Deduzca que si $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = L$ entonces $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

4.6.22. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{n^2}{n^2-1} & \text{si } \ n = 3k \ \text{ para algún } \ k \text{ natural} \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{si } \ n = 3k+1 \text{ para algún } \ k \text{ natural} \\ \dfrac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+3}} & \text{si } \ n = 3k+2 \text{ para algún } k \text{ natural.} \end{cases}$$

Diga si la sucesión es convergente y, en caso afirmativo, encuentre el límite.

4.6.23. Sea $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $a_1 = 1$ y $a_n = \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) a_{n-1}$ para $n \geq 2$. Muestre que la sucesión es convergente.

4.6.24. (a) Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n^{200} + n^{100} + 1} - n^{100} = \dfrac{1}{2}$.

(b) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{sen}^2(\sqrt{n^{200} + n^{100} + 1})$.

4.6.25. Encuentre el límite de la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recursivamente por $a_1 = \sqrt{c}$, $a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$.

4.6.26. Argumente, en cada caso, por qué el límite tiene el valor propuesto.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^n + 5 \cdot 6^n}{3^n + 6^n} = 5$; ($b$) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[3]{n^2}\operatorname{sen} n^2}{n+1} = 0$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n^2+n} - n\right) = \dfrac{1}{2}$; ($d$) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

4.6.27. *Demuestre que toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergente tiene un término máximo o un término mínimo.

4.6.28. *Sea $c > 0$ y considere la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ definida recursivamente mediante

$$a_1 > 0, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}\left[a_n + \frac{c}{a_n}\right].$$

Demuestre que la sucesión es decreciente y que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \sqrt{c}$.

4.6.29. *Se dice que una sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de *variación acotada* si la sucesión $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, con $s_n = \mid a_2 - a_1 \mid + \mid a_3 - a_2 \mid + \cdots + \mid a_{n+1} - a_n \mid$, es acotada.

(a) Demuestre que toda sucesión de variación acotada es convergente.

(b) Demuestre que la afirmación recíproca también es válida; es decir, toda sucesión convergente es de variación acotada.

4.6.30. *Demuestre que toda sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ acotada posee una subsucesión no creciente o una no decreciente.

4.6.31. *Para cada sucesión real $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, considere su sucesión de promedios $s_n = \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$. Demuestre que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = L$.

4.6.32. (a) Dé un ejemplo de una sucesión divergente tal que $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{n}$ para cada n. (b) *Demuestre que si la sucesión $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ es tal que $|a_{n+1} - a_n| < \frac{1}{2^n}$, entonces es convergente.

4.6.33. *Demuestre que si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = g$ y $\lim_{n\to\infty} (b_1 + b_2 + \cdots + b_n) = \infty$, donde $b_n \geqslant 0$, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n}{b_1 + b_2 + \cdots b_n} = g$.

4.6.34. *Demuestre que si una sucesión de números racionales $\left\{\dfrac{p_n}{q_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge a un número irracional, entonces $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = \lim\limits_{n\to\infty} q_n = \infty$.

4.6.35. *Muestre que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^4 + 2^4 + 3^4 + \cdots + n^4}{n^5} = \dfrac{1}{5}$.

4.6.36. *Determine los límites siguientes:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2}\right)$;

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1^2}{n^3} + \dfrac{2^2}{n^3} + \cdots + \dfrac{(n-1)^2}{n^3}\right)$;

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2} + \dfrac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right)$;

(d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{2!} + \dfrac{2}{3!} + \cdots + \dfrac{n-1}{n!}\right)$;

(e) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \dfrac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \cdots + \dfrac{1}{n\cdot(n+1)\cdot(n+2)}\right)$.

4.6.37. *Analice la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$, donde

$$x_1 = \sqrt{a}, x_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}, \ldots, x_n = \underbrace{\sqrt{a + \sqrt{a + \cdots + \sqrt{a}}}}_{n \text{ raíces}}, \quad \text{con } a > 0.$$

Límite de funciones

4.6.38. Calcule los límites siguientes:

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{2x}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$;

(c) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+3x+1}{3x^3+2x+5}$; (d) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}$.

4.6.39. De las funciones siguientes, ¿cuál no tiene límite cuando $x \to 2$?

(a) $f(x)=\ln(1/x)$; (b) $f(x)=\operatorname{sen}(1/x)$;

(c) $f(x)=\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-4}$; (d) $f(x)=\dfrac{x+2}{x^2-x-2}$.

4.6.40. Determinar

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$; (b) $\displaystyle\lim_{x\to -2}\frac{|x+1|-1}{4-x^2}$.

4.6.41. Determinar $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$, donde

(a) $f(x)=\dfrac{100x^2+1}{x^2+100}$; (b) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+\sqrt{x+\sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$.

Límites y continuidad

4.6.42. Considere la función

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-a^2}{x-a} & \text{si } x\neq a,\\[2ex] 0 & \text{si } x=a.\end{cases}$$

(a) ¿Está f definida en $x=a$?; (b) ¿existe $\displaystyle\lim_{x\to a} f(x)$?; (c) ¿es f continua en $x=a$? ¿Por qué?

4.6.43. Sea f la función

$$f(x)=\begin{cases} ax & \text{si } x\leqslant 1\\ bx^2+x+1 & \text{si } x>1.\end{cases}$$

¿Para qué valores de a y b es continua la función en $x=1$?

4.6.44. Sea f la función

$$f(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 3 - x & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ x^2 + 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

(a) ¿Es f continua en $x = 0$? (b) ¿Es f continua en $x = 1$? En cada caso justifique su respuesta.

4.6.45. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x+y) = f(x)+f(y)$, para $x, y \in \mathbb{R}$. Demuestre que

(a) $f(n) = nf(1)$; (b) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n}f(1)$; ($c$) $f(x) = -f(-x)$;
(d) $f(x) = xf(1)$ para todo x real.

4.6.46. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) > 0$ para toda $x \in [a, b]$. Pruebe que existe $a > 0$ tal que $f(x) \geqslant a$ para toda $x \in [a, b]$.

4.6.47. (a) Demuestre que la suma y la composición de funciones lipschitzianas es lipschitziana. (b) Demuestre que si f y g son funciones acotadas y lipschitzianas en $A \subset \mathbb{R}$, entonces su producto es una función lipschitziana. (c) Demuestre que cada función lipschitziana es continua en todos los puntos de su dominio.

4.6.48. Sea $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ una sucesión real con $\lim\limits_{i\to\infty} a_i = L$. Pruebe que la sucesión $\{|a_i|\}_{i=1}^{\infty}$ converge a $|L|$.

4.6.49. Pruebe que si la función f es continua en $x = x_0$, también será continua en ese punto la función $|f|$.

4.6.50. Calcule los límites siguientes, si existen, y si no es el caso, diga por qué.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} x \operatorname{sen}(1/x)$; ($b$) $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sen}(1/x)$; ($c$) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2}$; ($d$) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x}$.

4.6.51. En cada caso, conteste Falso o Verdadero

(a) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$, entonces

(i) f está definida en $x = a$;

(ii) $f(a) = L$;

(iii) f es continua en $x = a$.

(b) Si f es continua en un intervalo J, entonces

(i) $y = f^2(x)$ es continua en J;

(ii) $y = f(x + 2)$ es continua en J.

(c) Si $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ es una función continua en (a, b), entonces

(i) f es no acotada;

(ii) f es acotada pero no alcanza su valor máximo en (a, b).

4.6.52. Aplicando la propiedad del valor intermedio para funciones continuas, demuestre que la ecuación $x^3 + x^2 - x - 4 = 0$ tiene una solución en $[1, 2]$.

4.6.53. Pruebe que una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona si y sólo si es uno a uno.

4.6.54. Sea f una función continua en $[0, 1]$ tal que $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$ para toda $x \in [0, 1]$. Demuestre que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = c$. (Sugerencia: aplique la propiedad del valor intermedio a la función $g(x) = f(x) - x$.)

4.6.55. *Explique por qué el límite de una sucesión convergente de números reales positivos es no-negativo.

4.6.56. *Pruebe que si una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene inversa, ésta es continua.

4.6.57. *Sea f la función definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \text{ es un número irracional} \\ \dfrac{1}{q} & \text{si } x = \dfrac{p}{q}, \quad \text{con } p \text{ y } q \text{ primos relativos.} \end{cases}$$

Demuestre que f es continua en los puntos irracionales y discontinua en los racionales.

4.6.58. *Sean f y g dos funciones continuas en el intervalo $[a, b]$, entonces la función $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ es continua.