Capítulo 3

Variables y funciones

El cambio y el movimiento son fenómenos que se refieren a la variación relativa de dos o más objetos o variables relacionadas entre sí. En particular, el cambio que describe y estudia el cálculo diferencial es el que se presenta entre variables que toman un continuo de valores numéricos reales. A tales variables se les denomina *variables reales* y a las relaciones entre ellas, *funciones reales.*

En este capítulo se introducen los conceptos fundamentales de variable real y función real de variable real y se definen las operaciones básicas entre éstas. Se introduce, además, el concepto de gráfica de una función, el cual permite identificar funciones con curvas en el plano cartesiano, estableciéndose el vínculo para la interpretación geométrica de los conceptos y procesos del cálculo.

Finalmente, se presentan algunas de las familias de funciones elementales más importantes en las aplicaciones.

3.1 Los conceptos de variable y de función

Una *variable* es una propiedad o un atributo que puede tomar uno o más valores dados por los elementos de un conjunto. Por ejemplo, la variable "estado civil de una persona", toma valores en el conjunto cuyos elementos son: soltero, casado, viudo, divorciado; la variable "estatura de una persona" toma valores numéricos. Las variables que interesan en el cálculo son aquellas que toman valores en un intervalo o continuo de números reales; a tales variables se les denomina *variables reales.* Como ejemplos de variables reales tenemos: la medida del paso del tiempo, la posición de un auto sobre una carretera con respecto a un punto fijo, la velocidad de un cuerpo en caída libre, etc. Al conjunto de los valores posibles que puede tomar una variable se le llama *dominio de la variable*, por ejemplo, la "longitud de la diagonal del cuadrado" es una variable real cuyo dominio es el conjunto de los números reales positivos, mientras que la variable "temperatura de un cuerpo", tiene como dominio el conjunto de los números reales y toma valores negativos para temperaturas bajo cero.

A las variables reales las denotaremos con letras como $x, y, z, t, \ldots$ Por ejemplo:

t : "tiempo transcurrido a partir de un instante dado",

x : "longitud del lado del cuadrado",

y : "área del cuadrado",

z : "número real mayor que cero y menor que uno".

NOTA IMPORTANTE. *El conjunto* {*soltero, casado, viudo, divorciado*}, *como dijimos, define los valores de la variable "estado civil de la persona"; así, en general, podemos identificar a cada variable real con el conjunto de sus valores.*

En los distintos campos del conocimiento y de la experiencia, encontramos pares o conjuntos de variables relacionadas entre sí, en el sentido de que los valores de algunas de ellas dependen de los valores de las otras.

Ejemplo 3.1. Consideremos las variables

x : "longitud del lado del cuadrado",

y : "área del cuadrado."

Estas dos variables numéricas están relacionadas en el sentido de que a cada valor de una de ellas corresponde un valor para la otra. Así, si la variable x toma el valor numérico a, el valor correspondiente de la variable y es a^2. En este caso, la relación f que se establece entre las variables y y x se simboliza mediante

$$f : A \to B,$$

donde A es el dominio de la variable x y B es el dominio de la variable y, en tanto que la regla de correspondencia que señala explícitamente la relación entre las variables x y y se denota

$$y = f(x),$$

de modo que $f(x)$ representa el valor o los valores de y que corresponden a cada valor de x; en este ejemplo, $y = f(x) = x^2$. Así, si el valor de la variable x es 30, el valor correspondiente de la variable y será 900. Esto se denota

$$y = f(30) = 900$$

y se interpreta diciendo: "cuando el valor de la variable x es 30, el valor de la variable y es igual a 900". $\triangleleft$

Cuando la relación entre dos variables x y y es tal que a cada valor de x le corresponde un único valor de y, se dice que y está en *función* de x. A la variable x se le llama *variable independiente* y la variable y se denomina *variable dependiente.* Es este tipo de relaciones entre variables reales las que son el objeto de estudio del cálculo y a las que dedicaremos este capítulo.

Definición 3.1. Una *función real de variable real*[1] es una relación f entre dos variables reales x y y, tal que a cada valor de la primera le hace corresponder un único valor de la segunda. Al dominio de la variable independiente x se le llama *dominio de la función* y se denomina *contradominio de la función* al dominio de la variable dependiente y.

Ejemplo 3.2. Sea x la variable "número real distinto de cero" y y la variable "número real". La regla que asocia a cada valor x el número $y = f(x) = 1/x$, define una función cuyo dominio es el conjunto de los números reales distintos de cero y cuyo contradominio es el conjunto de los números reales. $\triangleleft$

Nota Importante. *Para que una regla de correspondencia defina una función, a cada valor de la variable independiente debe corresponder un y sólo un valor de la variable dependiente. Por ejemplo, si x es la variable con dominio los números reales, la regla $y = f(x) = \sqrt{x}$, en general, no define de manera unívoca un valor para la variable y, ya que si el valor de x es un número negativo, no es posible extraer raíz cuadrada y por tanto no está definido el valor que le corresponde a la variable dependiente, lo mismo sucede si el valor de la variable independiente x es un número positivo, ya que existen dos valores posibles para $\sqrt{x}$, uno el negativo del otro, y la regla no especifica cuál de los dos valores tomar. Como se observa, en ambos casos el valor de la variable independiente x no determina de manera única el valor de la variable y. Una manera de definir correctamente la función "raíz cuadrada de x" es considerar como variable independiente la variable x = "número real mayor o igual a cero" y como regla de correspondencia la expresión*

$$y = f(x) = +\sqrt{x},$$

que nos dice que para cada valor de la variable x se tome la raíz cuadrada positiva de ese valor. Si no aparece un signo antes de una raíz cuadrada supondremos que tiene signo positivo.

Para denotar una función, es necesario señalar claramente sus distintos elementos, como son:

[1]La definición moderna de *función* se debe al matemático alemán de ascendencia belga J. P. G. Lejeune Dirichlet (1805-1859), quien la formuló en 1837.

(i) la variable independiente x y su dominio A,

(ii) la variable dependiente y y su dominio B, y

(iii) la regla de correspondencia $y = f(x)$ que permite conocer el valor de la variable dependiente para cada valor que tome la variable independiente.

De aquí en adelante, adoptando la notación establecida por el matemático J. L. Lagrange, denotaremos cada función real escribiendo

$$f : A \to B, \quad y = f(x),$$

donde A es el dominio de la variable independiente x o dominio de la función, B el dominio de la variable dependiente y o contradominio de la función y $y = f(x)$, la regla de correspondencia entre los valores de las variables. Cuando la situación anterior se presente, también diremos que "la variable y está en función de la variable x."

Una función f se puede también visualizar de forma mecánica como un dispositivo que recibe como entrada un valor de x, el cual procesa y da como resultado un valor de salida $f(x)$ que es el valor de la variable dependiente que corresponde a x, como se ilustra en la figura 3.1.

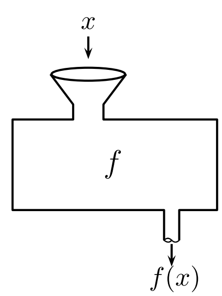


Figura 3.1: Función como proceso

Ejemplo 3.3. La función f con variable independiente x: "longitud del lado del cuadrado" y con variable dependiente y: "área del cuadrado", se escribe simbólicamente

$$f : [0, \infty) \to [0, \infty), \quad y = f(x) = x^2.$$

El símbolo $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ significa que la función asocia a cada valor del dominio $[0, \infty)$ de la variable x, un valor para y en el intervalo $[0, \infty)$, y en el segundo renglón se hace explícita la regla de correspondencia entre los valores de las variables, señalando que el valor de y correspondiente al valor x de la variable independiente, es igual a x^2. Note que, al escribir la función, podemos omitir del nombre de las variables, sobreentendiéndolas, y concentrarnos sólo en la regla de correspondencia. $\triangleleft$

Dada una función $f : A \to B$ y $x \in A$, al número $f(x)$ se le llama *imagen de x bajo f* y al conjunto

$$f(A) = \{f(a) \text{ con } \ a \in A\} \subset B$$

se le llama *imagen de la función f* y se denota $\operatorname{Im} f$.

Algunas veces, la regla de correspondencia de una función se expresa con distintas fórmulas, dependiendo del valor de la variable independiente.

Ejemplo 3.4. La función $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$, dada por

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \in [1, 2] \\ x^2 & \text{si } x \in (2, 3) \\ 2 & \text{si } x \in [3, 4], \end{cases}$$

está definida con tres expresiones distintas según dónde toma su valor la variable x. Note que la imagen de f es el conjunto $\{2\} \cup [3, 9)$. $\triangleleft$

Una variable real puede depender de dos o más variables reales.

Ejemplo 3.5. Dado un rectángulo, consideremos las variables

p : "área del rectángulo",

u : "largo del rectángulo", y

v : "ancho del rectángulo".

Entonces podemos escribir la variable p en función de las variables u y v de tal manera que se tiene una función de dos variables que se expresa en la forma

$$p : [0, \infty) \times [0, \infty) \to [0, \infty), \quad p(u, v) = u \cdot v. \triangleleft$$

Cuando el valor de una variable depende de los valores de dos o más variables reales, se dice que se tiene una *función de varias variables reales.*

Nota Importante. *Si bien al tener una función $y = f(x)$ a cada valor de la variable independiente x le corresponde un único valor $f(x)$ de la variable dependiente y, es posible que a valores distintos de x, la regla de correspondencia les asocie el mismo valor de la variable y. Por ejemplo, la función real*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad y = f(x) = x^2$$

le hace corresponder a cada par de valores a y $-a$ de la variable x, el mismo valor a^2 de la variable y.

Las funciones que a valores distintos de la variable independiente hacen corresponder valores distintos de la variable dependiente, juegan en la teoría un papel importante, en tanto permiten definir la regla de correspondencia inversa. Fijaremos este último concepto mediante la definición siguiente.

Definición 3.2. Una función real de variable real $f : A \to B$ con $y = f(x)$, se dice *inyectiva* (o *uno a uno*) si a valores distintos de la variable independiente les hace corresponder valores distintos de la variable dependiente. En lenguaje simbólico, esta definición se escribe:

$$f : A \to B, \text{ es inyectiva, o uno a uno, si}$$

$$a, b \in A \text{ con } a \neq b \text{ implica que } f(a) \neq f(b).$$

Note que si $y = f(x)$ es inyectiva, entonces para cada valor c de la variable y perteneciente a la imagen de la función $y = f(x)$, existe un único valor a de la variable independiente x tal que $f(a) = c$. Al único valor a de la variable x que corresponde al valor c de la variable y se le denota $a = f^{-1}(c)$. Esto determina una nueva función f^{-1} cuya variable independiente es y y su variable dependiente, x. A esta nueva función se le llama *función inversa de la función* $y = f(x)$ y se denota

$$f^{-1} : \operatorname{Im} f \subset B \to A, \quad x = f^{-1}(y).$$

Ejemplo 3.6. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida mediante la regla

$$y = f(x) = 3x + 5$$

es una función inyectiva, ya que si $a \neq b$, se tiene

$$f(a) - f(b) = 3a + 5 - 3b - 5 = 3(a - b) \neq 0.$$

En este caso, la función inversa $x = f^{-1}(y)$ toma la forma

$$x = f^{-1}(y) = \frac{y - 5}{3}$$

y tiene por dominio $\mathbb{R}$. $\triangleleft$

Ejemplo 3.7. La función $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 2$, es una función uno a uno y su función inversa está dada por

$$f^{-1} : (2, 3) \to (0, 1), \quad f^{-1}(y) = +\sqrt{y - 2}. \ \triangleleft$$

Ejemplo 3.8. La función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^3 + 1$ es una función uno a uno, como se verifica a continuación:

Si x_1 y x_2 son elementos distintos del dominio de la variable x, es decir $x_1 \neq x_2$, entonces los valores de la función $y = g(x)$ en esos puntos serán respectivamente

$$g(x_1) = x_1^3 + 1 \ \text{ y } \ g(x_2) = x_2^3 + 1.$$

Consecuentemente
$$g(x_1) - g(x_2) = x_1^3 - x_2^3 \neq 0,$$
puesto que $x_1 \neq x_2$, lo que significa que $g(x_1) \neq g(x_2)$, y en consecuencia, la función $y = g(x)$ es uno a uno. En este caso la función inversa $x = g^{-1}(y)$ está definida mediante la regla

$$x = g^{-1}(y) = \sqrt[3]{y-1}$$

y su dominio de definición es el conjunto

$$\text{Dominio de } g^{-1} = \operatorname{Im} g = \mathbb{R}. \triangleleft$$

Entre las principales funciones inyectivas o uno a uno, se encuentran las *funciones monótonas*, mismas que se clasifican en:

(i) *funciones crecientes*, definidas como aquellas funciones reales $f : A \to \mathbb{R}$ que preservan el orden de los valores de la variable independiente, es decir, para $x_1, x_2 \in A$ con $x_1 < x_2$ se tiene

$$f(x_1) < f(x_2), \quad \text{y}$$

(ii) *funciones decrecientes* si sus imágenes invierten el orden de los valores de la variable independiente, es decir, si $x_1 < x_2$,

$$f(x_1) > f(x_2).$$

Ejemplo 3.9. La función $f(x) = x^3$ es monótona creciente en $\mathbb{R}$ mientras que la función $g(x) = 1 - x^2$ es monótona decreciente en $[0, \infty)$. $\triangleleft$

3.1.1 Gráfica de una función

Una función real de variable real $f : A \to B$, se representa gráficamente por un conjunto de puntos en el plano mediante el llamado *método de coordenadas de Descartes.*[2] Este método consiste en fijar primeramente dos rectas numéricas perpendiculares, de modo que se corten en su punto correspondiente al número cero. A aquella de las rectas cuya parte positiva coincide con la parte positiva de la otra al girar noventa grados en el sentido positivo se le llama *eje de las abscisas* y a la otra se le llama *eje de las ordenadas.* Al plano, junto con las dos rectas así dispuestas, se le llama *plano cartesiano.* Cada punto P del plano cartesiano se identifica con la pareja ordenada de números (a, b) donde

[2]Por el filósofo y matemático francés René Descartes (1596-1650).

a, llamado la *abscisa de* P, es el número real correspondiente al punto sobre el eje de las abscisas donde corta la perpendicular bajada de P a ese eje, y b llamado la *ordenada de* P, es el número real correspondiente al punto sobre el eje de las ordenadas donde corta la perpendicular bajada de P a ese eje. A los números de la pareja ordenada (a, b) que identifica al punto P, se les llama *coordenadas de* P relativas al plano cartesiano dado.

La gráfica de $f : A \to B$ se construye de la manera siguiente: En la recta del eje de las abscisas se marca el dominio A de la variable independiente x. Para cada número real $a \in A$, se determina el punto en el plano cartesiano de abscisa a y ordenada $y = f(a)$. Este proceso determina el conjunto de puntos del plano denominado *gráfica de la función* f, definido así:

$$\mathrm{graf} f = \big\{(a, f(a)) \text{ con } a \in A\big\}.$$

En la figura 3.2 se ilustra este conjunto.

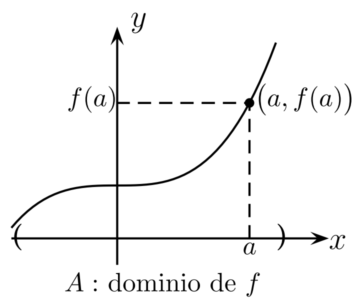


Figura 3.2: Gráfica de f

Ejemplo 3.10. En la figura 3.3 se muestra la gráfica de la función real

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 3 & \text{si } x \in [2, 3) \\ -x + 6 & \text{si } x \in [3, 4], \end{cases}$$

cuyo dominio es el intervalo $[2, 4]$. $\triangleleft$

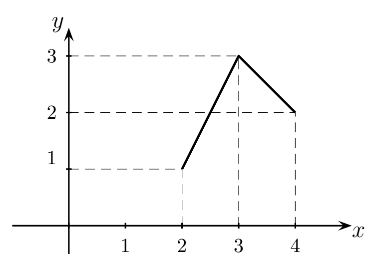


Figura 3.3: Gráfica de la función del ejemplo 3.10

Nota Importante. *La gráfica de una función sólo puede tener un punto sobre cada recta perpendicular al eje de las abscisas.*

3.2 Operaciones con funciones

1. Suma y multiplicación de funciones

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y consideremos dos funciones reales $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$.

(a) A la función $f + g : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \quad \text{para cada } x \in A,$$

se le llama *función suma* de las funciones f y g.

(b) A la función $f \cdot g : A \to \mathbb{R}$ definida por

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) \text{ para cada } x \in A$$

se le denomina *función multiplicación* o *función producto* de f y g. Para simplificar la notación, escribimos $f \cdot g$ en la forma fg.

Ejemplo 3.11. La función suma $f + g$, de las funciones $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ y $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = x^3 + 2x$, es la función $f + g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$(f+g)(x) = x^3 + x^2 + 3x + 1.$$

El valor de la función suma $f + g$ en $x = 2$ es

$$(f+g)(2) = f(2) + g(2) = 19. \triangleleft$$

Ejemplo 3.12. Para las funciones reales $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ y $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ definidas por $f(x) = x^2 + x + 1$ y $g(x) = x^3$, la función producto es la función $f \cdot g : (0,1) \to \mathbb{R}$

$$(f \cdot g)(x) = x^3(x^2 + x + 1). \triangleleft$$

Análogamente a la definición de suma y producto que dimos para dos funciones reales $f : A \to \mathbb{R}$ y $g : A \to \mathbb{R}$, definimos su *diferencia* $f - g : A \to \mathbb{R}$ y su *cociente* $\dfrac{f}{g} : \{x \in A \text{ con } g(x) \neq 0\} \to \mathbb{R}$ como dos nuevas funciones cuyas reglas de correspondencia son, respectivamente:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

y

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Ejemplo 3.13. El cociente de las funciones

$$f(x) = 2x + 1 \quad \text{y} \quad g(x) = x^2 - 1$$

está definido solamente para valores de la variable independiente distintos de 1 y -1. Es decir, la función cociente

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{2x+1}{x^2-1}$$

tiene por dominio el conjunto $\mathbb{R} - \{1, -1\}$. $\triangleleft$

2. La composición de funciones

Otra operación, propia de las funciones, es la llamada *composición* de funciones, que presentamos a continuación.

Si y denota una variable que depende de una variable x bajo cierta función $f : A \to \mathbb{R}$ y z es una variable que depende de y bajo otra función $g : B \to \mathbb{R}$, con $\mathrm{Im} f \subset B$, entonces para cada valor de la variable x en A, la aplicación de la regla de correspondencia $y = f(x)$ seguida de la regla de correspondencia $z = g(y)$, establece una regla de correspondencia o función entre la variable x y la variable z que se denota

$$g \circ f : A \to \mathbb{R}, \quad z = g(f(x)).$$

A la función $g \circ f : A \to \mathbb{R}$, se le llama *función composición* de f con g. Nótese que para que sea posible construir la función composición $g \circ f$, los valores $f(x)$ que toma la variable y deben pertenecer al dominio de la función $z = g(y)$. Podemos esquematizar la composición de funciones mediante el diagrama siguiente:

$$x \xrightarrow{f} y = f(x) \xrightarrow{g} z = g(f(x)).$$

Ejemplo 3.14. Sean las variables reales x, y, z y las funciones dadas por las reglas de correspondencia $y = f(x) = \sqrt{x+2}$ y $z = g(y) = y^2 + y + 1$.
La función composición $z = (g \circ f)(x) = g(f(x))$ toma la forma

$$\begin{aligned} z &= (g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{x+2}) \\ &= \sqrt{x+2} + x + 3. \ \triangleleft \end{aligned}$$

Ejemplo 3.15. Sean las variables

$$l : \text{“longitud de la circunferencia”},$$
$$r : \text{“longitud del radio del círculo”},$$
$$z : \text{“área del círculo”},$$

y consideremos las funciones

$$l = f(r) = 2\pi r \quad \text{y} \quad z = g(l) = \frac{l^2}{4\pi}$$

que expresan la longitud de la circunferencia como función del radio y el área del círculo como función de la longitud de la circunferencia, respectivamente; entonces la función composición

$$z = (g \circ f)(r) = g(f(r)) = g(2\pi r) = \pi r^2$$

expresa el área del círculo como función del radio. $\triangleleft$

Ejemplo 3.16. Considere a continuación las funciones reales de variable real $f : (0, 1) \to (5, 8)$ y $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$, definidas por $y = f(x) = x^2 + x + 5$ y $z = g(y) = y + 2$, respectivamente.

La función composición $g \circ f$, como función de la variable independiente x, es la función $g \circ f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\begin{aligned} z &= (g \circ f)(x) = g(f(x)) \\ &= g(x^2 + x + 5) \\ &= x^2 + x + 7. \end{aligned}$$

Así, por ejemplo, $(g \circ f)(2) = 13$. $\triangleleft$

Ejemplo 3.17. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son las funciones reales

$$f(x) = x^2 \quad \text{y} \quad g(y) = y + 1,$$

entonces $g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está dada por la expresión

$$(g \circ f)(x) = x^2 + 1,$$

mientras que la función $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se escribe como

$$(f \circ g)(y) = (y + 1)^2. \triangleleft$$

La operación de composición tiene las propiedades siguientes, suponiendo que las funciones cumplan con los requisitos para llevar a cabo esas operaciones:

(a) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$

(b) $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$.

3.3 Funciones racionales y trigonométricas

A las funciones reales de variable real definidas en toda la recta y de la forma

$$f(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$$

donde $a_1, \cdots, a_n$ son números reales, se les llama *funciones polinomiales.*

En particular, si

$$f(x) = ax + b \text{ con } a, b \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

la función se llama *función afín* (o *función lineal* si $b = 0$,) y si

$$f(x) = ax^2 + bx + c \;\text{ con } a, b, c \in \mathbb{R}, \quad a \neq 0,$$

la función se llama *función cuadrática.*

La suma, el producto y la composición de funciones polinomiales es una función polinomial.

Al cociente de dos funciones polinomiales se le conoce como *función racional*:

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n}{x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1}x + b_m},$$

y su dominio de definición es el conjunto de los números reales excepto las raíces del denominador $q(x)$, es decir, se excluyen los números $a \in \mathbb{R}$ tales que $q(a) = 0$.

Nótese que si el grado del polinomio $q(x)$ en el denominador es menor que el grado del polinomio $p(x)$ en el numerador, aplicando el algoritmo para la división de polinomios, se puede reducir la expresión para $r(x)$ a la forma

$$r(x) = a(x) + \frac{x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_{k-1}x + a_k}{x^s + b_1 x^{s-1} + \cdots + b_{s-1}x + b_s}$$

con $s \geq k$ y donde $a(x)$ es una función polinomial.

3.3.1 Medición de ángulos: radianes

En los cursos elementales de trigonometría, la unidad de medida para los ángulos es el grado, entendido como la medida del ángulo central que resulta de dividir el círculo en 360 partes iguales. Para efectos del cálculo, la medida de los ángulos se hace con números reales, para lo cual se asigna como medida de un ángulo el número real correspondiente a la longitud, con signo, del arco sobre la circunferencia de radio unitario que subtiende el ángulo referido, como

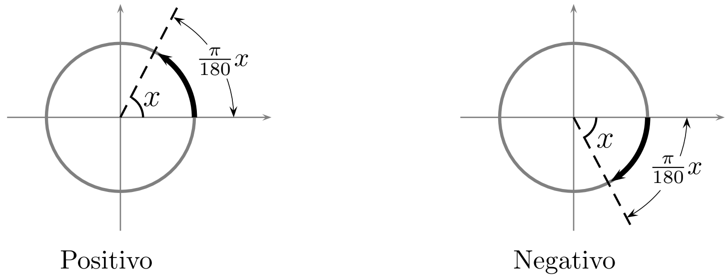


Figura 3.4: Signo de ángulos

se muestra en la figura 3.4. Se considera sentido positivo para el arco si se recorre en sentido contrario al de las manecillas del reloj.

A partir de la convención anterior, el ángulo de longitud de arco 2π es el ángulo de 360 grados. A la medida del ángulo que subtiende un arco de longitud 1 lo llamaremos *radián* y su medida en grados es de $\dfrac{360}{2\pi} \approx 57.29$ grados. En general, si el ángulo θ mide x grados, entonces su longitud de arco o medida en radianes será de $x\left(\dfrac{2\pi}{360}\right)$ radianes y, recíprocamente, si la longitud en radianes del ángulo θ es de y radianes, su medida en grados será de $y\left(\dfrac{360}{2\pi}\right)$ grados.

Al utilizar longitudes de arco para medir ángulos, tiene sentido hablar de ángulos de cualquier longitud de arco, tanto positiva como negativa.

Ejemplo 3.18. El ángulo de medida -100 radianes corresponde al que se obtiene al recorrer $\dfrac{100}{2\pi}$ veces la circunferencia unitaria en el sentido de las manecillas del reloj. $\triangleleft$

Ejemplo 3.19. Los ángulos de 30, 45 y 60 grados miden respectivamente $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{4}$ y $\dfrac{\pi}{3}$ radianes. $\triangleleft$

3.3.2 Las funciones trigonométricas

Consideremos en un plano cartesiano la circunferencia de centro el origen y radio unitario. Para cada número real x, consideremos el arco de circunferencia de longitud x, con extremo el punto inicial $A = (1, 0)$. Sea P_x el extremo final del arco $\widehat{AP_x}$ de longitud x. Se definen las funciones seno y coseno de la forma siguiente:

$$\operatorname{sen} : \mathbb{R} \to [-1, 1], \qquad \operatorname{sen} x = \text{ordenada de } P_x$$

y

$$\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1], \qquad \cos x = \text{abscisa de } P_x.$$

Ver figuras 3.5 y 3.6, respectivamente.

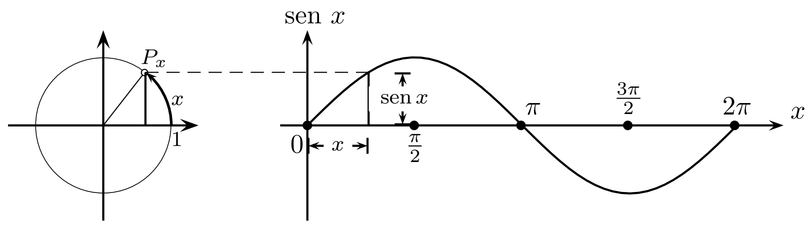


Figura 3.5: Gráfica de $\operatorname{sen} x$

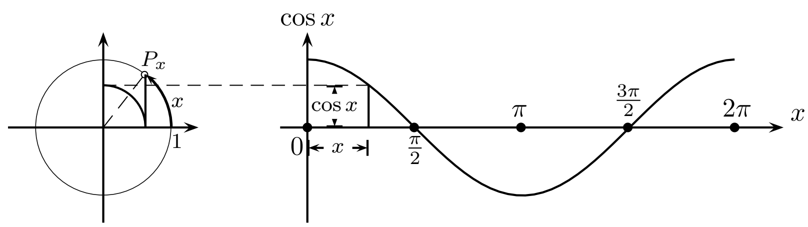


Figura 3.6: Gráfica de $\cos x$

Nota Importante. *Si AB es la hipotenusa de un triángulo rectángulo de vértices A, B y C, y si la medida del ángulo BAC es de x radianes, el valor de $\operatorname{sen} x$ es la razón entre el cateto BC, opuesto al ángulo x, y la hipotenusa AB, y el valor de $\cos x$ es la razón entre el cateto AC, adyacente al ángulo x, y la hipotenusa AB, como se muestra en la figura 3.7.*

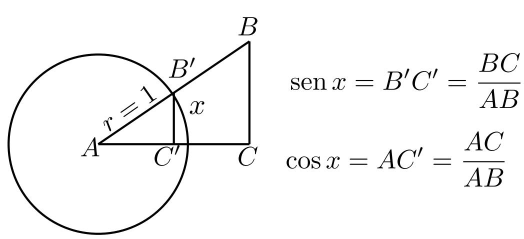


Figura 3.7: El seno y el coseno de x

Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ tienen las propiedades siguientes:

1. $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x, \quad \cos(-x) = \cos x$
2. $\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x$

3. $\operatorname{sen}(0) = 0, \quad \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad \operatorname{sen}\pi = 0$

4. $\cos(0) = 1, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad \cos(\pi) = -1$

5. $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x,$

   $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$

6. $\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \operatorname{sen} x, \quad \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x$

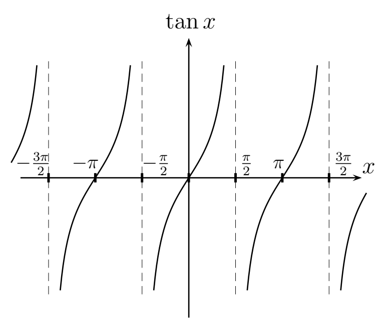
7. $\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$

A las funciones generadas mediante las operaciones entre las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ se les denomina *funciones trigonométricas* y tienen como propiedad fundamental su periodicidad (propiedad 2 de la lista anterior). A partir de las funciones seno y coseno se definen las siguientes cuatro funciones trigonométricas adicionales:

1. La función tangente

$$\tan : \mathbb{R} \setminus \{n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

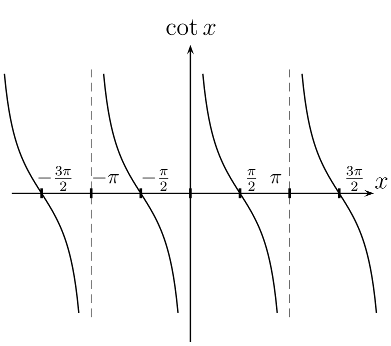
$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$$



2. La función cotangente

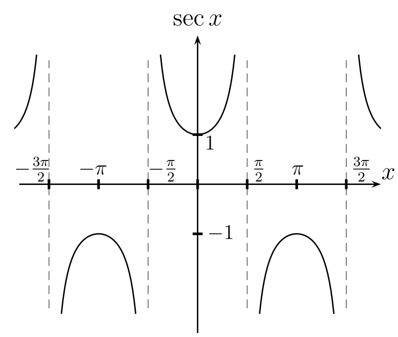
$$\cot : \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$



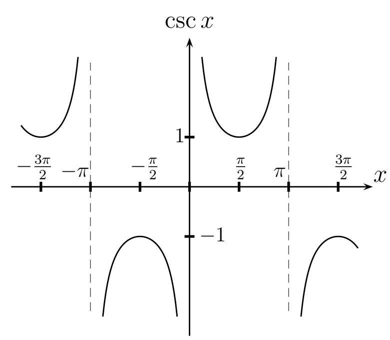
3. La función secante

$$\sec : \mathbb{R} \setminus \{n\pi \pm \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$
$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$



4. La función cosecante

$$\csc : \mathbb{R} \setminus \{n\pi, n \in \mathbb{Z}\} \to \mathbb{R}$$
$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$



3.3.3 Las funciones trigonométricas inversas

La función $f(x) = \operatorname{sen} x$ es uno a uno en cada uno de los intervalos abiertos

$$I_n = \left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{con } n \in \mathbb{Z},$$

por lo cual en cada intervalo I_n existe su función inversa, llamada *función arco seno*,

$$\text{arcsen } : (-1,1) \to \left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$
$$\operatorname{arcsen} x = y, \text{ donde } \operatorname{sen} y = x.$$

Análogamente, la función $f(x) = \cos x$ es uno a uno en cada uno de los intervalos

$$J_n = (n\pi, n\pi + \pi) \text{ con } n \in \mathbb{Z},$$

y en cada intervalo J_n está definida la función inversa de $\cos x$ que se llama *función arco coseno,*

$$\arccos : (-1, 1) \to (n\pi, n\pi + \pi),$$

$$\arccos x = y, \text{ donde } \cos y = x.$$

Las gráficas correspondientes a los intervalo I_0 y J_0 de estas funciones aparecen en las figuras 3.8(a) y 3.8(b), respectivamente.

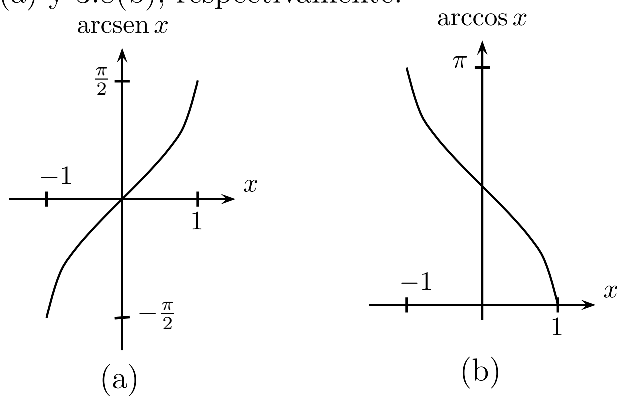


Figura 3.8: Las funciones arcsen$x$ y arccos$x$

La función $f(x) = \tan x$ es también uno a uno en los intervalos abiertos I_n, por lo que existe su función inversa, llamada *función arco tangente*, en cada intervalo I_n :

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left(n\pi - \frac{\pi}{2}, n\pi + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\arctan x = y, \text{ donde } \tan y = x.$$

La gráfica de la función $\arctan x$ correspondiente al intervalo I_0 se muestra en la figura 3.9

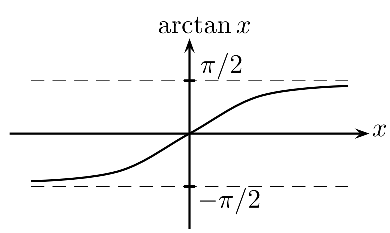


Figura 3.9: La función $f(x) = \arctan x$

De manera similar se definen las funciones inversas de las funciones trigonométricas $\cot x$, $\sec x$ y $\csc x$, en aquellos dominios en los que estas funciones sean inyectivas.

Ejercicios y problemas del capítulo

Conceptos de variable y de función

3.3.1. Considere la regla de correspondencia f que asocia a cada persona con su madre.

(a) ¿Define f una función? Si f define una función, (b) ¿cuál es su dominio?; (c) ¿cuál es su imagen?; (d) ¿es esta función uno a uno?

3.3.2. Considere las variables reales siguientes:

$x =$ "longitud del lado del triángulo equilátero";

$y =$ "área del triángulo equilátero";

$z =$ "perímetro del triángulo equilátero";

$w =$ "medida de la altura del triángulo equilátero".

Escriba:

(a) la variable y en función de la variable x; (b) la variable y en función de la variable z; (c) la variable w en función de la variable y; (d) la variable x en función de la variable z; (e) la variable x en función de la variable y.

3.3.3. Considere la regla de correspondencia $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$.

(a) ¿Cuál debe ser el dominio de la variable independiente x para que la regla defina una función real de variable real?

(b) ¿Cuál es la imagen de la función?

3.3.4. Exprese el área A de los triángulos isósceles de perímetro 10 como función de la longitud ℓ de los lados iguales. Señale el dominio de la función y la regla que la define.

3.3.5. Exprese el área A de los triángulos isósceles de perímetro 10 como función del ángulo θ entre los lados iguales. Señale el dominio de la función y la regla que la define.

3.3.6. Para cada recta en el plano que pasa por el punto $(1, 2)$ exprese el valor de la ordenada del punto de intersección de esa recta con el eje de las ordenadas en función de la pendiente de la recta.

3.3.7. Exprese el área A de una esfera como función de su volumen V.

3.3.8. Considere la familia de parábolas $y = x^2 + cx + 2$. Exprese la suma de las abscisas de los puntos de intersección de cada parábola con el semieje positivo de las x en función del parámetro c. Señale el dominio de la función y diga si la función es uno a uno.

3.3.9. Exprese la regla de correspondencia o función $y = f(x)$ entre la variable x y la variable y en los casos siguientes:

(a) $x =$"medida del ángulo que forman los lados iguales de un triángulo isósceles de perímetro 12", $y =$"área de un triángulo isósceles de perímetro 12";

(b) $x =$ "área de una esfera", $y =$ "medida del radio de una esfera".

3.3.10. ¿Cuál es la imagen de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \dfrac{x-1}{|x|+1}$?

Gráficas

3.3.11. A partir de la gráfica de la función $y = f(x)$, que se muestra en la figura 3.10 conteste las preguntas siguientes:

(a) ¿Cuál es el dominio de f?; (b) ¿cuál es el contradominio de f?; (c) ¿en cuál intervalo es f creciente?; (d) ¿en cuál intervalo es decreciente?; (e) ¿para qué intervalos (a, b) de su dominio tiene f función inversa?; (f) si tiene inversa, ¿cuál es el dominio y cuál el contradominio de la inversa?

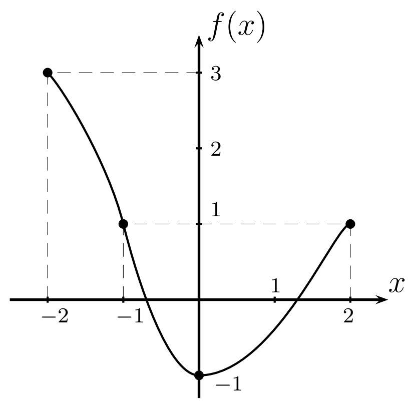


Figura 3.10: Gráfica de la función del problema 3.3.11.

3.3.12. Dibuje la gráfica de cada una de las siguientes funciones con dominio y contradominio el conjunto de los números reales.

(a) $f(x) = |2x + 3|$; (b) $f(x) = [x]$ =máximo entero menor o igual a x;

(c) $f(x) = x - [x]$; (d) $f(x) = x + |x^2 + 3x + 1|$.

3.3.13. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ toma los valores $f(0) = 1$ y $f(2) = 1$ y su gráfica está formada de segmentos de recta con pendiente -1 si $x < 0$, pendiente 0 en $[0, 2]$ y pendiente 1 si $x > 2$. Dibuje la gráfica de la función g en cada uno de los casos siguientes:

(a) $g(x) = f(-x)$; (b) $g(x) = -f(-x)$; (c) $g(x) = f(2x)$;

(d) $g(x) = f(x + 2)$; (e) $g(x) = f(3x - 2)$.

3.3.14. Considere la función sgn : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Grafique $y = f(x)$ en cada caso:
(a) $f(x) = x\operatorname{sgn}(x)$; (b) $f(x) = (3x+2)(\operatorname{sgn}(3x+2)+5)$.

3.3.15. *Considere la gráfica de una función $f : (a,b) \to \mathbb{R}$. Escriba la función g cuya gráfica se obtiene de la gráfica de f como se dice a continuación.

(a) Trasladando graf$f$ dos unidades hacia arriba; (b) trasladando graf$f$ tres unidades a la izquierda; (c) reflejando graf$f$ sobre el eje de las abscisas; (d) reflejando graf$f$ sobre el eje de las ordenadas; (e) encogiendo graf$f$ por un factor de 2 y trasladando a la derecha 3 unidades.

Propiedades

3.3.16. Pruebe que las funciones siguientes son uno a uno (es decir, inyectivas) y determine su función inversa.

(a) $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ y = h(x) = 2x+3$; (b) $f : \mathbb{R} \to [1,\infty),\ y = f(x) = x^2 + x + 1$;

(c) $l : [0,2] \to \mathbb{R},\ y = l(x) = x^3 - 1$.

3.3.17. Pruebe que toda función monótona (creciente o decreciente) es uno a uno.

3.3.18. ¿Qué relación deben satisfacer los coeficientes a, b, c para que la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax^2 + bx + c$ sea uno a uno?

3.3.19. Conteste Falso o Verdadero:

(a) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son crecientes, entonces $f \cdot g$ es creciente.

(b) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es uno a uno, entonces $f \circ g$ es uno a uno.

(c) Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ son uno a uno, entonces $f \cdot g$ es uno a uno.

3.3.20. Decimos que una función f definida en todo $\mathbb{R}$ es una *función par* cuando $f(x) = f(-x)$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Análogamente, se dice que es una *función impar* cuando $f(x) = -f(-x)$.

(a) ¿Para qué valores del número natural n la función $f(x) = x^n$ es una función impar?

(b) Pruebe que para cada función $f(x)$, la función $p(x) = \dfrac{1}{2}\left(f(x) + f(-x)\right)$ es una función par.

(c) Pruebe que toda función definida en $\mathbb{R}$ se puede escribir como suma de una función par y una función impar.

3.3.21. *Establezca una función $f : A \to B$ uno a uno y sobre para los conjuntos A y B siguientes.

(a) $A = (0, 1)$ y $B = (0, \infty)$; (b) $A = (0, \infty)$ y $B = (-\infty, \infty)$;

(c) $A = (a, b)$ y $B = (c, d)$; (d) $A = (0, 1)$ y $B = [0, 1]$;

(e) $A = (0, 1)$ y $B = (0, \infty)$.

Operaciones

3.3.22. En cada caso, elija la respuesta correcta para la función involucrada.

(a) $f \circ g = h$, para $g(x) = 2x + 1$ y $h(x) = 4x^2 + 4x + 7$.

(i) $f(x) = x^2 - x + 7$; (ii) $f(x) = x^2 + x + 6$;

(iii) $f(x) = (x - 1)^2 + 7$.

(b) $f \circ g = h$, para $f(x) = 3x + 5$ y $h(x) = 3x^2 + 3x + 2$.

(i) $g(x) = x^2 + x - 1$; (ii) $g(x) = x^2 + x + 6$;

(iii) $g(x) = (x - 3)^2 + (x - 3) + 2$.

3.3.23. Sean las funciones reales de variable real $f(x) = ax + b$ y $g(x) = cx + d$ donde a, b, c y d son números reales con $a \neq 0$ y $d \neq 0$. Diga para qué valores de a, b, c y d se tiene

(a) $f \circ g = g \circ f$; (b) $f \circ g = f$; (c) $f \circ g = f + g$.

3.3.24. Sea $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función racional $h(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 3}{x^4 + 3}$.

(a) Encuentre los valores de x tales que $h(x) = 0$;

(b) Encuentre la imagen de h.

3.3.25. *Sea $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función uno a uno y positiva y sea $f^{-1}(y)$ su función inversa. En cada uno de los casos planteados determine la inversa de la función g.

(a) $g(x) = f(1/x)$; (b) $g(x) = [f(x)]^2$; (c) $g(x) = f(\sqrt{f(x) + 1})$.

3.3.26. *Para cada función $f : A \to B$ y $C \subset B$, se define la *imagen inversa* de C bajo f como el subconjunto $f^{-1}(C) = \{x \in A \text{ tales que } f(x) \in C\}$. Pruebe que para cada par de subconjuntos C, E de B se tiene

(a) $f^{-1}(C \cup E) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(E)$; ($b$) $f^{-1}(C \cap E) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(E)$;

(c) $f^{-1}(B - C) = A - f^{-1}(C)$.

Funciones trigonométricas

3.3.27. Exprese en grados la medida de los ángulos que subtienden arcos en la circunferencia unitaria de longitud: (a) 20 radianes, (b) -12 radianes, (c) $\dfrac{\pi}{6}$ radianes, (d) 7π radianes.

3.3.28. A partir de las propiedades de las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, deduzca las fórmulas trigonométricas siguientes.

(a) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$; (b) $\tan^2(x) = \sec^2(x) - 1$;

(c) $\tan(x \pm y) = \dfrac{\tan x + \tan y}{1 \mp \tan x \tan y}$.

3.3.29. Determine los intervalos en los cuales las funciones $\tan x, \sec x, \csc x$ y $\cot x$ tienen función inversa.

3.3.30. *Aplicando la fórmula $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \operatorname{sen} y \cos x$, pruebe que

$$|a \operatorname{sen} \theta + b \cos \theta| \leqslant \sqrt{a^2 + b^2}$$

para cualesquiera $a, b, \theta \in \mathbb{R}$.

Funciones trigonométricas inversas

3.3.31. Deduzca las fórmulas trigonométricas siguientes:

(a) $\cos(\operatorname{arcsen}(y)) = \pm\sqrt{1-y^2}$; (b) $\operatorname{sen}(\arccos(y)) = \pm\sqrt{1-y^2}$;

(c) $\tan(\operatorname{arcsen}(x)) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; (d) $\operatorname{arccsc}(\tan x) = \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

3.3.32. Calcule los valores de las funciones siguientes:

(a) $\tan\left(\arccos \dfrac{1}{2}\right)$; (b) $\sec\big(\arctan 2\big)$.