Capítulo 2

Los números reales

El sistema de los números reales es la estructura algebraica y geométrica adecuada para la definición de los conceptos del cálculo diferencial e integral. La presentación que aquí se hace está basada en el concepto de expansión decimal, utilizado en la vida diaria para representar números y magnitudes, y operarlos. Así, en este capítulo cada número real se identifica con una sucesión infinita de dígitos separados por un punto decimal y el conjunto de tales objetos resulta ser una extensión del conjunto de los números racionales, los cuales quedan identificados con las llamadas expansiones periódicas. Las operaciones de suma y multiplicación, así como la relación de orden en los números racionales se extienden de manera natural, preservando sus propiedades, al conjunto de los números reales.

La propiedad que distingue al sistema de los números reales del sistema de los números racionales es la propiedad de continuidad o completez. Esta propiedad es la que permite dar un sentido preciso a los conceptos fundamentales de límite y continuidad, sobre los cuales se desarrolla el cálculo diferencial e integral, que sirve para describir los fenómenos de cambio y movimiento continuos, así como para el cálculo de áreas y volúmenes.

2.1 Expansiones decimales

Desde la escuela primaria, hemos aprendido a representar cantidades mediante números expresados en el sistema decimal, es decir, mediante la utilización de sucesiones de los dígitos $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, que forman lo que llamamos la expansión decimal del número de que se trate.

Las expansiones decimales a cuyo uso nos acostumbramos en los primeros niveles de educación, sólo constan de un número finito de dígitos separados por un punto decimal. Por ejemplo, la expansión

$$A = 123.7584$$

representa al número

$$A = 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 + 7 \cdot 10^{-1} + 5 \cdot 10^{-2} + 8 \cdot 10^{-3} + 4 \cdot 10^{-4}.$$

Para ese tipo de expansiones, se desarrollan algoritmos para realizar las operaciones básicas de la aritmética y posteriormente, ya en la escuela secundaria, se incluyen expansiones negativas, sobre las cuales se extienden las operaciones aritméticas valiéndose de la regla de los signos

$$(-A) \cdot (-B) = +(A \cdot B)$$
$$(-A) \cdot (+B) = -(A \cdot B),$$

para cada par de expansiones decimales A, B.

Otro tipo de expansiones que también nos son familiares, son las que aparecen al construir la representación decimal de los *números racionales,* o sea, los que pueden escribirse en la forma m/n, donde m y n son enteros, con $n \neq 0$, y que resultan ser *expansiones infinitas y periódicas,* pues tienen la propiedad de presentar un bloque de dígitos que se repite indefinidamente a la derecha a partir de un cierto lugar de la expansión. Por ejemplo, el número

$$1/3 = 0.3333 \cdots 3 \cdots$$

o el número

$$29/7 = 4.142857142857 \cdots 142857 \cdots$$

El conjunto de los números racionales se denota con $\mathbb{Q}$.

Ejemplo 2.1. Para ilustrar cómo se genera la expansión decimal periódica de un número racional, construyamos paso a paso, como ejemplo, la expansión decimal del número racional

$$D = 4/7$$

aplicando el algoritmo de la división que aprendimos en la escuela primaria. Al realizar esa operación, vamos obteniendo en cada paso un dígito del cociente y un residuo r mayor o igual a cero y menor que el divisor 7, de tal manera que al efectuar a lo más 7 veces el procedimiento de división, forzosamente tendrá que repetirse, por primera vez, alguno de los residuos obtenidos en los pasos anteriores, con la consiguiente repetición de los dígitos correspondientes en la expansión decimal del cociente que se está construyendo. Así, en el caso de $4/7$, al aplicar el algoritmo de la división, tal como se muestra en la figura, se obtienen, en el primer paso, 0 unidades en el cociente y residuo 4; en el segundo paso se obtienen 5 décimos en el cociente y residuo 5; en el tercer paso se obtienen 7 centésimos en el cociente y residuo 1, y así, sucesivamente, hasta llegar al séptimo paso, en el que se obtienen 8 millonésimos en el cociente y residuo 4, tal como lo tuvimos en el primer paso. Luego, a partir del octavo paso, se repite la sucesión de residuos, dando lugar a una repetición del bloque de dígitos 571428, obteniéndose así la expansión decimal que representa al número $4/7$:

$$\frac{4}{7} = 0.571428571428\cdots571428\cdots$$

$$\begin{array}{rl}
 & 0.571428\widehat{571428}\cdots \longleftarrow \text{Bloque que se repite} \\
 & 7\,\big)\,4 \\
\text{Primer residuo} \longrightarrow & 40 \\
 & \;\;50 \\
 & \;\;\;\;10 \\
 & \;\;\;\;\;\;30 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;20 \\
 & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;60 \\
\text{Se repite} \longrightarrow & \;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;40.\ \triangleleft
\end{array}$$

En este punto, lo notable no sólo es que la expansión decimal de todo número racional sea una expansión periódica, sino que más aún, cada expansión decimal periódica es la expansión decimal de algún número racional, estableciéndose así una correspondencia entre ambos conjuntos de objetos. Enseguida mostramos, con un ejemplo, cómo se encuentra el número racional que corresponde a una expansión periódica dada.

Ejemplo 2.2. Si queremos encontrar el número racional que corresponde a la expansión decimal periódica

$$D = -2.83434\cdots34\cdots,$$

procedemos a multiplicarla por 10 y luego por 1000 y obtenemos las siguientes expresiones, que tienen los mismos dígitos a la derecha del punto decimal

$$\begin{aligned} 10\cdot D &= \quad -28.3434\cdots34\cdots \\ 1000\cdot D &= -2834.3434\cdots34\cdots \end{aligned}$$

Al restar la primera expansión de la segunda, obtenemos

$$990\cdot D = -2806,$$

por lo que

$$D = -\frac{2806}{990}.\ \triangleleft$$

Notación: escribiremos las expansiones decimales periódicas en forma simplificada omitiendo los dígitos después de la primera aparición del bloque de dígitos que se repite y marcando éste con una línea superior. Por ejemplo, la expresión $3.23\overline{45}$ representa la expansión decimal periódica $3.234545\cdots45\cdots$

A los números que no se pueden expresar como una razón o cociente de números enteros se les llama *números irracionales* y por lo que acabamos de mostrar, sus expansiones decimales no pueden ser periódicas. El conjunto de los números irracionales se denota con $\mathbb{I}$. Un ejemplo de número irracional es la raíz cuadrada de 2. Esta afirmación se justifica en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.3. Para probar que $\sqrt{2}$ no puede expresarse como cociente de dos números naturales, argumentaremos por contradicción, es decir, supondremos que es cierto lo contrario, que existen números primos relativos a, b (es decir, sin divisores comunes) tales que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}.$$

Elevando al cuadrado, tenemos que

$$2 = \frac{a^2}{b^2},$$

o, equivalentemente,

$$2b^2 = a^2. \tag{2.1}$$

Pero (2.1) implica que el número a^2 es un número par, por lo que a debe ser un número par (ya que el cuadrado de un número par es un número par y el cuadrado de un número impar es impar). Por tanto, a es de la forma

$$a = 2c, \tag{2.2}$$

para algún número entero c. Sustituyendo ahora (2.2) en (2.1), tenemos

$$2b^2 = 4c^2,$$

y, consecuentemente,

$$b^2 = 2c^2,$$

es decir, b^2 es un número par y por tanto b tiene que ser a su vez un número par y, por consiguiente, tanto a como b son números pares, lo cual contradice nuestra suposición inicial de que a y b no tenían divisores en común. Luego, la suposición nos lleva a una contradicción y, entonces, es falsa; por tanto, $\sqrt{2}$ no es un número racional. $\triangleleft$

Es relativamente sencillo generar números irracionales, como se muestra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 2.4. La expansiones decimales

$$A = 23.010010001 \cdots 1 \overbrace{00 \cdots 0}^{i \text{ veces}} 1 \overbrace{00 \cdots 0}^{(i+1) \text{ veces}} 1 \cdots$$

$$B = -2.454554555 \cdots 4 \overbrace{55 \cdots 5}^{i \text{ veces}} 4 \overbrace{55 \cdots 5}^{(i+1) \text{ veces}} 4 \cdots$$

corresponden a números irracionales. $\triangleleft$

Tomando en cuenta la discusión anterior, tenemos la definición siguiente.

Definición 2.1. Una *expansión decimal* A, es una expresión de la forma

$$A = \pm a_k a_{k-1} \cdots a_1 a_0 . b_1 b_2 \cdots b_{r-1} b_r \cdots$$

donde $a_k, a_{k-1}, \ldots, a_0$ y $b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}, b_r, \cdots$ son algunos de los dígitos 0, 1, 2, ..., 8, 9. Al punto después del dígito a_0 se le llama *punto decimal* de la expansión. Si la expansión decimal va precedida del signo $+$ se dice que es *positiva* y si va precedida del signo $-$, se le llama *negativa.*

NOTA IMPORTANTE. *Cada expansión decimal se extiende infinitamente a la derecha del punto decimal, mientras que a la izquierda de éste sólo tiene un número finito de dígitos.*

2.2 El Sistema de los Números Reales

Utilizaremos las expansiones decimales para definir los números reales.

Definición 2.2. El *conjunto de los números reales,* denotado $\mathbb{R}$, es el conjunto de las expansiones decimales, en el que se establece el siguiente criterio de igualdad: Dos expansiones decimales A y B son iguales (representan el mismo número real) si se presenta alguna de las dos situaciones siguientes:

(i) A y B constan de los mismos dígitos en el mismo orden, o

(ii) A y B constan de los mismos dígitos hasta un cierto lugar r y enseguida la expansión de uno de ellos continúa en la forma

$$\pm a_k a_{k-1} \cdots a_0 . b_0 b_1 \cdots b_r b_{r+1} \overline{9},$$

con $b_{r+1} \neq 9$, mientras que la expansión del otro es de la forma

$$\pm a_k a_{k-1} \cdots a_0 . b_0 b_1 \cdots b_r (b_{r+1} + 1) \overline{0}$$

Ejemplo 2.5. Las expansiones $1.34\overline{9}$ y $1.35\overline{0}$ son, por definición, iguales y representan el mismo número real. $\triangleleft$

NOTA IMPORTANTE. *En general, en la definición de las operaciones y propiedades de los números reales siempre evitaremos escribir expansiones decimales con bloques repetidos de nueves.*

2.2.1 Operaciones con los números reales

Las operaciones con los números reales, son las usuales de suma y multiplicación que empezamos a manejar desde la escuela primaria. De hecho, en la escuela secundaria aprendemos los métodos o algoritmos para sumar y multiplicar expansiones decimales finitas tanto positivas como negativas y sabemos cómo construir la expansión decimal correspondiente a la suma o al producto, a partir de la suma y producto de los dígitos y la posición que éstos ocupan en las expansiones decimales que se pretende operar.

Antes de introducir las operaciones entre expansiones decimales infinitas, para cada expansión $A = \pm a_k a_{k-1} \cdots a_0.b_1 \cdots b_r b_{r+1} \cdots$ definimos su *expansión truncada de orden* r, con $r \geqslant 0$, como la expansión decimal periódica

$$A_r = \pm a_k a_{k-1} \cdots a_0.b_1 \cdots b_r \overline{0}$$

que consta de los mismos dígitos que la expansión de A hasta el lugar r después del punto decimal, y todos los dígitos siguientes a la derecha son cero. La expansión truncada de orden r se puede escribir también en términos de sumas de potencias del número 10 en la forma usual

$$\begin{aligned} A_r &= \pm a_k a_{k-1} \cdots a_0.b_1 \cdots b_r \overline{0} \\ &= \pm \left(a_k 10^k + a_{k-1} 10^{k-1} + \cdots + a_1 10 + a_0 + \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_r}{10^r} \right). \end{aligned}$$

Nota Importante. *Un número real está totalmente determinado si se conocen sus expansiones truncadas de cualquier orden y viceversa. Observe que la expansión decimal truncada de orden cero es el número entero a la izquierda del punto decimal de la expansión decimal inicial.*

Para sumar dos expansiones decimales $A = \pm a_k a_{k-1} \cdots a_0.b_1 \cdots b_r b_{r+1} \cdots$ y $B = \pm c_j c_{j-1} \cdots c_0.d_1 \cdots d_r d_{r+1} \cdots$ y formar la expansión decimal correspondiente a la suma $A+B$, se procede como sigue: Para cada orden $r = 0, 1, 2, \cdots$ la expansión truncada de orden r de la suma $A+B$ se define como la expansión truncada de orden r de la suma de las expansiones truncadas de orden $r+1$ de A y B, es decir:

$$(A+B)_r = (A_{r+1} + B_{r+1})_r.$$

Ejemplo 2.6. La expansión suma $A + B$ para las expansiones decimales $A = 2.959595 \cdots$ y $B = 1.2020020002 \cdots$, tiene por expansiones decimales truncadas de los distintos órdenes, las siguientes:

$$\begin{aligned} (A+B)_0 &= 4.\overline{0} \\ (A+B)_1 &= 4.1\overline{0} \\ (A+B)_2 &= 4.16\overline{0} \\ (A+B)_3 &= 4.165\overline{0} \\ (A+B)_4 &= 4.1659\overline{0} \\ &\vdots \end{aligned}$$

que se forman sumando, de acuerdo a la definición, las expansiones truncadas correspondientes de los números dados inicialmente. ◁

De modo análogo, para multiplicar las dos expansiones decimales A y B y formar la expansión decimal correspondiente al producto $A \cdot B$, se procede como sigue:

(i) Se determina cuántos dígitos a la izquierda del punto decimal tiene cada uno de los factores. Digamos que A tiene m dígitos y B tiene n dígitos a la izquierda del punto decimal.

(ii) Se multiplica la expansión truncada de orden $n+1$ de A con la expansión truncada de orden $m+1$ de B y la expansión truncada de orden cero del producto de estas será la expansión truncada de orden cero de la expansión decimal de $A \cdot B$,

(iii) Para determinar la expansión truncada de orden $r > 0$ de $A \cdot B$, se multiplica las expansión truncada de orden $n+r+1$ de A por la expansión truncada de orden $m+r+1$ de B y la expansión truncada de orden r de ese producto de expansiones truncadas se toma como la expansión truncada de orden r del producto $A \cdot B$, es decir:

$$(A \cdot B)_r = (A_{n+r+1} \cdot B_{m+r+1})_r.$$

Ejemplo 2.7. Para multiplicar las expansiones decimales

$$\begin{aligned} A &= 12.\overline{34}, \\ B &= -253.2020020002\cdots, \end{aligned}$$

las expansiones truncadas de $A \cdot B$ se determinan de acuerdo a la definición anterior, en la forma siguiente:

$$\begin{aligned} (A \cdot B)_0 &= -3125.\overline{0}, \\ (A \cdot B)_1 &= -3125.3\overline{0}, \\ (A \cdot B)_2 &= -3125.38\overline{0}, \\ (A \cdot B)_3 &= -3125.382\overline{0}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

y así, sucesivamente. $\triangleleft$

A partir de las definiciones de suma y multiplicación de los números reales, dadas en términos de sus expansiones, enlistamos sus propiedades principales.

Sean A, B, C números reales y $+$, $\cdot$ las operaciones de suma y multiplicación. Entonces se cumple:

(S1) $A + B = B + A$ (Conmutatividad de la suma)

(S2) $A + (B + C) = (A + B) + C$ (Asociatividad de la suma)

(S3) $0 + A = A$ (Existencia de neutro bajo la suma)

(S4) $A + (-A) = 0$ (Existencia de inversos aditivos bajo la suma)

(M1) $A \cdot B = B \cdot A$ (Conmutatividad de la multiplicación)

(M2) $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$ (Asociatividad de la multiplicación)

(M3) $1 \cdot A = A$ (Existencia de neutro bajo la multiplicación)

(M4) Si $A \neq 0$ existe A^{-1} tal que $A \cdot A^{-1} = 1$
(Existencia de inversos multiplicativos)

(M5) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$
(Distributividad de la multiplicación respecto a la suma)

Cuando un conjunto S posee dos operaciones (suma y multiplicación) que tienen las propiedades (S1)–(S4) y (M1)–(M5), arriba mencionadas, se dice que tiene estructura algebraica de *campo* y así, se habla del *campo de los números reales*.

2.2.2 El orden de los números reales

El conjunto de los números reales se descompone en tres subconjuntos mutuamente ajenos:

(i) los reales positivos, $\mathbb{R}^+$, formado por las expansiones decimales positivas,

(ii) los reales negativos, $\mathbb{R}^-$, formado por las expansiones decimales negativas, y

(iii) el conjunto $\{0\}$ formado por la expansión cero.

La descomposición anterior da lugar a la llamada *ley de tricotomía* para el orden, que estipula que cada número real A cumple una y sólo una de las siguientes afirmaciones: (a) A es positivo, (b) A es negativo, (c) A es el número cero.

El conjunto $\mathbb{R}^+$ de los reales positivos tiene la propiedad de que tanto la suma como la multiplicación de cualesquiera dos de sus elementos, es nuevamente un real positivo.

Definición 2.3. Se dice que un número real A es *mayor que* el número real B (o equivalentemente, que B es *menor que* A) si $A - B$ es un real positivo. Para denotar que A es mayor que B escribiremos $A > B$.

Nótese que, según la definición 2.3, todo número real negativo es menor que cero.

En términos de sus expansiones decimales respectivas, una expansión positiva A es mayor que otra expansión positiva B si al recorrer sus dígitos de izquierda a derecha existe un lugar k, tal que ambas constan de los mismos dígitos hasta ese lugar y el dígito $k+1$ de A es mayor que el dígito $k+1$ de B.

De las propiedades de los números reales positivos, se deduce la validez de la siguiente proposición:

Proposición 2.1.

(a) Si $A > B$ y $C > D$, entonces $A + C > B + D$.

(b) Si $A > B$ y $C > 0$ entonces $A \cdot C > B \cdot C$.

(c) Si $A > B$ y $C < 0$ entonces $A \cdot C < B \cdot C$.

Demostración. Para probar (a), tenemos que si $A > B$ y $C > D$, por definición, esto significa que $A - B \in \mathbb{R}^+$ y $C - D \in \mathbb{R}^+$. Luego, de las propiedades de los números positivos, concluimos que $(A-B)+(C-D) \in \mathbb{R}^+$. Por tanto $(A + C) - (B + D) \in \mathbb{R}^+$, lo cual significa que

$$(A + C) > (B + D).$$

Para probar (b), basta notar que si $A > B$ y $C > 0$ se tiene que $A - B \in \mathbb{R}^+$ y de las propiedades de los números positivos se sigue que $(A - B) \cdot C > 0$, es decir, $A \cdot C - B \cdot C > 0$ o equivalentemente, $A \cdot C > B \cdot C$.

Finalmente, para demostrar la validez de (c), observamos que si $A - B \in \mathbb{R}^+$ y $C \in \mathbb{R}^-$ se tiene que $-C \in \mathbb{R}^+$ y $(A-B)\cdot(-C) \in \mathbb{R}^+$, por lo que $A\cdot C < B\cdot C$. $\triangleleft$

Otra propiedad importante que posee la relación de orden entre los números reales, es la propiedad de *arquimedianidad*[1] que se enuncia en los términos siguientes:

Propiedad de Arquimedianidad: si A y B son números reales tales que $0 < A < B$, entonces existe un número natural n tal que $n \cdot A > B$.

En el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales, tanto el subconjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ como el subconjunto de los números irracionales $\mathbb{I}$, se distribuyen de manera *densa* en $\mathbb{R}$. Esto quiere decir, que dados dos números reales distintos $A < B$, siempre existen números racionales y números irracionales

[1] Así llamada en honor de Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.).

que son mayores que A y menores que B. Esto significa que tanto los racionales como los irracionales se encuentran tan cerca como se quiera de cualquier número real.

Ejemplo 2.8. Si $A = 2.34526789\cdots$ y $B = 2.34612387\cdots$, entonces $A < B$ y la expansión decimal $C = 2.346\overline{0}$ es un número racional mayor que A y menor que B, mientras que el número $D = 2.346001000100001\cdots$ que no muestra ningún bloque de dígitos que se repita, es un número irracional mayor que A y menor que B. $\triangleleft$

Haciendo uso de los conceptos de orden entre los números reales, se introduce la definición de *intervalo abierto con extremo izquierdo A y extremo derecho B* como el subconjunto de números reales dado por

$$(A, B) = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } A < x < B\}$$

y la definición de *intervalo cerrado con extremo izquierdo A y extremo derecho B* como el subconjunto de números reales dado por

$$[A, B] = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } A \leqslant x \leqslant B\}.$$

Análogamente, se definen los intervalos

$$\begin{aligned}
(A, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } x > A\}, \\
(-\infty, A) &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } x < A\}, \\
[A, \infty) &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } x \geqslant A\}, \\
(-\infty, A] &= \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } x \leqslant A\}.
\end{aligned}$$

2.2.3 Valor absoluto de un número real

Introduciremos ahora el concepto de *métrica* o de *distancia* entre los números reales. Para ello, presentamos el concepto de *valor absoluto* de un número real mediante la definición siguiente.

Definición 2.4. Si A es un número real, el *valor absoluto* de A se define como el número $|A|$ tal que:

$$|A| = \begin{cases} A & \text{si } A \geqslant 0, \\ -A & \text{si } A < 0. \end{cases}$$

Note que el valor absoluto de un número es siempre un número no-negativo.

Ejemplo 2.9. $|2.\overline{31}| = 2.\overline{31}$, $\quad |-12.54230\cdots| = 12.54230\cdots$ $\triangleleft$

El valor absoluto de un número real tiene las propiedades que se enuncian en la proposición que sigue.

Proposición 2.2. Los enunciados siguientes son verdaderos:

(a) $|A \cdot B| = |A||B|$ para cualesquiera A, $B \in \mathbb{R}$.

(b) Si $|B| < A$, entonces $-A < B$ y $B < A$; recíprocamente, si $-A < B$ y $B < A$, entonces $|B| < A$.

(c) Si $|B| > A$, entonces $A < B$ ó $B < -A$; recíprocamente, si $A < B$ o $B < -A$, entonces $|B| > A$.

(d) $|A + B| \leqslant |A| + |B|$, para cualesquiera $A, B \in \mathbb{R}$.

(Desigualdad del triángulo)

Demostración. La demostración de los incisos (a), (b) y (c) se sigue directamente de la definición de valor absoluto. La demostración de la desigualdad del triángulo es como sigue: primero, tenemos que para cualesquiera $A, B \in \mathbb{R}$,

$$-|A| \leqslant A \leqslant |A|, \qquad -|B| \leqslant B \leqslant |B|.$$

Enseguida, sumando término a término, tenemos

$$-(|A| + |B|) \leqslant A + B \leqslant |A| + |B|,$$

lo cual significa, en virtud de (b), que $$|A + B| \leqslant |A| + |B|,$$
como se afirma en (d). ◁

La *distancia*, $d(A, B)$, entre dos números reales A y B se define como el valor absoluto de la diferencia de los dos números, esto es

$$d(A, B) = |A - B|.$$

De las propiedades del valor absoluto se deducen las siguientes propiedades para la distancia entre los números reales:
Para cualesquiera números reales A, B y C se cumple:

(i) $d(A, B) \geqslant 0$ y $d(A, B) = 0$ si y sólo si $A = B$ (Positividad definida)

(ii) $d(A, B) = d(B, A)$ (Simetría)

(iii) $d(A, B) \leqslant d(A, C) + d(C, B)$ (Desigualdad del triángulo)

Enseguida presentamos dos ejemplos sobre la aplicación de las propiedades del valor absoluto de un número.

Ejemplo 2.10. Represente, como unión de intervalos, el conjunto $\mathcal{A}$ de los números reales x tales que

$$|3x + 2| \leqslant 8 \quad \text{y} \quad |-x + 3| > 1.$$

Solución. Consideremos primero el conjunto de los números reales x tales que
$$|3x+2| \leqslant 8.$$
De acuerdo al punto 2 de la proposición 2.2, esto es equivalente a
$$3x+2 \leqslant 8 \quad \text{y} \quad 3x+2 \geqslant -8,$$
lo cual implica que
$$3x \leqslant 6 \quad \text{y} \quad 3x \geqslant -10,$$
por lo que
$$x \leqslant 2 \quad \text{y} \quad x \geqslant -\frac{10}{3}.$$
Resumiendo, hemos probado que si x es tal que $|3x+2| \leqslant 8$, entonces
$$x \in \left[-\frac{10}{3}, 2\right].$$
Por otro lado, si un número real x satisface la desigualdad
$$|-x+3| > 1,$$
entonces debe satisfacer las desigualdades
$$-x+3 > 1 \qquad \text{o} \qquad -x+3 < -1,$$
lo cual implica que
$$-x > -2 \qquad \text{o} \qquad -x < -4,$$
es decir,
$$x \in (-\infty, 2) \cup (4, \infty).$$
Finalmente, los números reales x que satisfacen ambas desigualdades serán aquellos en la intersección del intervalo $[-10/3, 2]$ con el conjunto $(-\infty, 2) \cup (4, \infty)$. Es decir,
$$\mathcal{A} = \left[-\frac{10}{3}, 2\right] \cap ((-\infty, 2) \cup (4, \infty)) = \left[-\frac{10}{3}, 2\right). \ \triangleleft$$

Ejemplo 2.11. Escriba como unión de intervalos el conjunto
$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } 1 < |-2x+3| \leqslant 2\}.$$

Solución. Si $x \in \mathcal{A}$, entonces
$$|-2x+3| \leqslant 2 \quad \text{y} \quad |-2x+3| > 1.$$
Si $|-2x+3| \leqslant 2$, entonces
$$-2x+3 \leqslant 2 \quad \text{y} \quad -2x+3 \geqslant -2.$$
Sumando -3 a ambos lados en cada desigualdad y luego dividiendo por -2, se obtiene
$$x \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad x \leqslant \frac{5}{2},$$

o, lo que es lo mismo,

$$x \in \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right].$$

Por otro lado, si $|-2x+3| > 1$, se tiene que

$$-2x + 3 > 1 \quad \text{o} \quad -2x + 3 < -1,$$

lo cual implica que

$$x < 1 \qquad \text{o} \qquad x > 2,$$

y por tanto,

$$x \in (-\infty, 1) \cup (2, \infty).$$

De lo anterior deducimos que

$$\mathcal{A} = \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] \bigcap \big((-\infty, 1) \cup (2, \infty)\big) = \left[\frac{1}{2}, 1\right) \bigcup \left(2, \frac{5}{2}\right]. \triangleleft$$

2.3 Completez de los números reales

La propiedad que hace del sistema de los números reales un sistema numérico apropiado para representar variables que toman un continuo de valores, es la llamada *propiedad de completez* (o de continuidad). Para darnos una idea del significado de esta propiedad, podemos tomar el tiempo y su transcurrir como un ejemplo de variable continua.

Se dice que el tiempo transcurre continuamente en el sentido de que suponemos que se compone de instantes que tienen un orden o dirección, de tal manera que dados dos instantes distintos de tiempo se puede decir cuándo uno de ellos es posterior al otro. Más aún, dados dos instantes, éstos definen un lapso de tiempo que transcurre continuamente del primer instante al segundo; continuamente quiere decir que si ese lapso se descompusiera en dos conjuntos de instantes, uno de los cuales consta de instantes posteriores a todos los del otro, entonces existe siempre un instante que es posterior a todos los demás del primero y anterior a todos los demás del segundo.

Siendo el tiempo la variable con respecto a la cual se da el movimiento, sus valores requieren pertenecer a un conjunto numérico que permita representar estas características de orden y continuidad en el transcurrir del tiempo. Ese conjunto es el conjunto de los números reales, cuyas propiedades captan fielmente estas características del tiempo y, en general, de las variables que se involucran en las relaciones cuyos cambios son de carácter continuo.

Así, identificando los instantes con los números reales, la propiedad de continuidad o completez de los números reales se puede plantear de la manera siguiente: para cada conjunto de números reales acotado superiormente existe un único primer número real que es mayor o igual que todos esos números, y es menor o igual que cada número mayor que todos los números del conjunto acotado inicial. Planteado en términos matemáticos, definimos, enunciamos y demostramos lo siguiente.

Definición 2.5. Un conjunto $\mathcal{A}$ no vacío de números reales se dice *acotado superiormente* por $M \in \mathbb{R}$ si

$$x \leqslant M \text{ para todo } x \in \mathcal{A}.$$

Al número M se le llama una *cota superior* para $\mathcal{A}$.

Análogamente, se dice que un conjunto $\mathcal{A}$ de números reales está *acotado inferiormente* por $N \in \mathbb{R}$ si

$$N \leqslant x \quad \text{para todo } x \in A.$$

Al número N se le llama una *cota inferior* para el conjunto A.

Teorema 2.1. *(Propiedad de completez de los números reales)* Para cada subconjunto $\mathcal{A}$ no vacío de números reales acotado superiormente, existe un número real S tal que:

(i) S es cota superior de $\mathcal{A}$.
(ii) S es menor o igual que cualquier otra cota superior de $\mathcal{A}$.

Al número S se le denomina *mínima cota superior* o *supremum* de $\mathcal{A}$ y se denota

$$S = \sup \mathcal{A}.$$

Análogamente, para cada subconjunto $\mathcal{A}$ no vacío de números reales acotado inferiormente, existe un número real I tal que:

(i) I es cota inferior de $\mathcal{A}$.
(ii) I es mayor o igual que cualquier otra cota inferior de $\mathcal{A}$.

Al número real I se le denomina *máxima cota inferior* o *infimum* de $\mathcal{A}$ y se denota

$$I = \inf \mathcal{A}.$$

Demostración. Daremos la construcción, paso a paso, del supremum para cualquier subconjunto de reales positivos acotados superiormente. Esto es suficiente para probar la propiedad de completez, pues para conjuntos arbitrarios acotados inferiormente, la construcción se puede hacer de la misma forma con modificaciones mínimas.

Sea $\mathcal{A}$ un conjunto no vacío de expansiones decimales positivas acotadas superiormente. Mostraremos la existencia del supremum de $\mathcal{A}$ mediante la siguiente construcción.

Primer paso: Siendo $\mathcal{A}$ acotado superiormente, la parte entera de los elementos de $\mathcal{A}$ es un conjunto de números enteros superiormente y de los cuales podemos sin ambigüedad, determinar el entero mayor. Ese número será la parte entera del supremum S de $\mathcal{A}$.

Segundo paso: Enseguida determinamos el subconjunto $\mathcal{A}_1$ de $\mathcal{A}$ formado de los elementos de $\mathcal{A}$ cuya parte entera es igual al máximo valor que toma la parte entera de los elementos de $\mathcal{A}$ y que se determinó en el paso anterior. (Note que todos los elementos de $\mathcal{A}_1$ tienen la misma parte entera.) Ahora nos fijamos en el primer dígito después del punto decimal de los elementos de $\mathcal{A}_1$ y tomamos el dígito mayor (esto último se consigue sin problema pues sólo se tiene que escoger entre los diez dígitos posibles). Ese dígito mayor será el primer dígito del supremum S después del punto decimal.

Tercer paso: Enseguida determinamos el subconjunto $\mathcal{A}_2$ de $\mathcal{A}_1$ formado de los elementos de $\mathcal{A}_1$ cuyo primer dígito después del punto decimal es igual al máximo valor que toma ese primer dígito en los elementos de $\mathcal{A}_1$ y que se determinó en el paso anterior. (Note que los elementos de $\mathcal{A}_2$ todos tienen la misma parte entera y el mismo primer dígito después del punto decimal). Ahora nos fijamos en el segundo dígito a la derecha del punto decimal de los elementos de $\mathcal{A}_2$ y tomamos el dígito mayor, ésto último se consigue sin problema pues sólo se tiene que escoger entre los diez dígitos posibles. Ese dígito mayor será el segundo dígito de S después del punto decimal.

Repitiendo el procedimiento anterior, se va construyendo de manera sucesiva la expansión decimal correspondiente al supremum de $\mathcal{A}$, lo que prueba que el conjunto de los números reales posee la propiedad de continuidad. $\triangleleft$

La propiedad de completez se puede establecer también sin hacer referencia explícita al supremum o al infimum, como lo haremos a continuación.

Propiedad de completez de los números reales (segunda versión): si $I_n = [a_n, b_n]$, para $n = 1, 2, 3, \ldots$, es una sucesión de intervalos cerrados de $\mathbb{R}$ tales que

$$I_{n+1} \subset I_n \text{ para cada } n = 1, 2, 3, \ldots,$$

entonces la intersección de todos ellos es un conjunto no vacío; es decir,

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \phi.$$

En particular, si para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ se tiene que

$$b_n - a_n = \left(\frac{1}{10}\right)^n,$$

entonces existe un único número real P que pertenece a cada uno de los intervalos, es decir, tal que $P = \cap_{n=1}^{\infty} I_n$.

Nota Importante. *Si $\mathcal{A}$ es un conjunto de expansiones decimales periódicas acotado superiormente, su supremum no necesariamente será una expansión periódica, como se ilustra en el ejemplo siguiente.*

Ejemplo 2.12. El conjunto de expansiones decimales periódicas de la forma

$$\begin{array}{l} 0.1\overline{0} \\ 0.1011\overline{0} \\ 0.10110111\overline{0} \\ 0.1011011101111\overline{0} \\ \vdots \end{array}$$

constituye un conjunto acotado superiormente por el número 1 y su supremum es la expansión decimal no periódica

$$0.10110111011110\cdots10\overbrace{111\cdots1}^{i \text{ veces}}0\overbrace{111\cdots1}^{(i+1) \text{ veces}}0\cdots$$

Este ejemplo nos muestra que el conjunto de los números reales, a diferencia del campo de los racionales, es un conjunto continuo o “sin cortes”. $\triangleleft$

2.4 La Recta Real

El sistema de los números reales que hemos presentado, tiene como modelo geométrico el conjunto de puntos de una recta ideal L, sobre la cual se han identificado un punto arbitrario A con el número real cero y otro punto arbitrario B, a la derecha del anterior, con el número real 1.

Antes de establecer la correspondencia entre las expansiones decimales y los puntos de la recta L, recordaremos el procedimiento para dividir con regla y compás un segmento de recta $\overline{AB}$ en diez subsegmentos iguales. El procedimiento es como sigue: Se traza en el plano una recta M distinta de L y que la corte en el punto A. Con el compás se toma una distancia arbitraria d y con esa misma abertura y punto inicial A se trazan consecutivamente sobre M los diez puntos $C_1, C_2, ..., C_{10}$, como se muestra en la figura 2.1.

Enseguida se traza la recta que pasa por B y C_{10} y las rectas paralelas a esa recta que pasan por $C_1, C_2, \ldots, C_9$ y se determinan sus puntos de corte $O_1, O_2, \ldots, O_9$ con el segmento AB. Como los triángulos AO_iC_i con $i = 1, 2, \ldots, 9$ son triángulos semejantes (debido a que tienen los mismos ángulos), entonces los puntos $O_1, O_2, \ldots, O_9$ dividen a AB en diez segmentos de igual longitud.

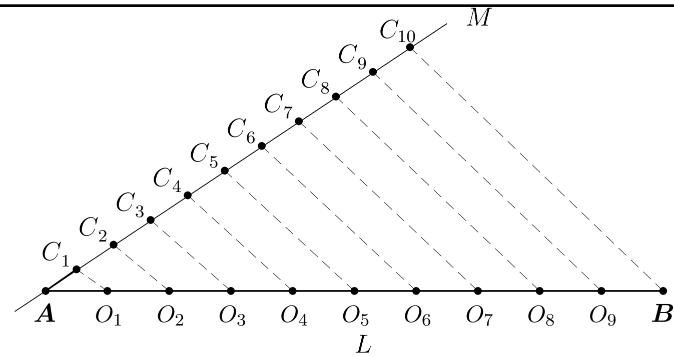

Figura 2.1: División de un segmento en 10 partes iguales

Procedamos ahora a identificar los puntos de la recta ideal L con el conjunto de las expansiones decimales. Mostraremos primero cómo a cada uno de los puntos de L, a la derecha del punto cero, se le asocia una expansión decimal positiva y, de manera recíproca, cómo a cada expansión decimal positiva le corresponde un único punto de la recta. La identificación de la parte de la recta a la izquierda del punto cero con las expansiones decimales negativas se hace de manera análoga.

Tomando el compás con abertura igual a la distancia entre los puntos asociados al cero y al uno, y marcando con esa abertura sucesivamente hacia la derecha, se fijan los puntos correspondientes a los números naturales y con ellos, los extremos de los intervalos de la forma $[a, a+1]$ con a un número natural. Enseguida, realizando el procedimiento con regla y compás dado anteriormente, se subdivide cada intervalo $[a, a+1]$, en diez subintervalos de longitud $1/10$ de la forma $[a + b_1/10, a + (b_1 + 1)/10]$ con $b_1 = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Luego, se toma cada uno de esos intervalos para obtener los subintervalos de longitud $1/10^2$, de la misma forma: $[a+b_1/10+b_2/10^2, a+b_1/10+(b_2+1)/10^2]$ con $b_1, b_2 = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Repitiendo este procedimiento k veces, se determinan todos los intervalos con extremos racionales de la forma

$$[a.b_1b_2 \cdots b_{k-1}b_k\ ,\ a.b_1b_2 \cdots b_{k-1}(b_k + 1)]$$

con a entero y $b_1, b_2, \cdots, b_k = 0, 1, 2, \ldots, 9$. Note que al ir tomando k los valores $0, 1, 2, 3, \ldots$, se obtendrán todos los intervalos que tienen por extremos los puntos asociados a las expansiones truncadas positivas.

Habiéndose construido los intervalos anteriores sobre la recta ideal, se procede a asociar a cada expansión decimal $a.b_1b_2 \cdots b_k \cdots$ el punto P de la recta ideal que se encuentra en la intersección de los intervalos cerrados anidados

$$[a.b_1, a.(b_1 + 1)], [a.b_1b_2, a.b_1(b_2 + 1)], [a.b_1b_2b_3, a.b_1b_2(b_3 + 1)],$$

etcétera, formados con los dígitos correspondientes de la expansión decimal inicial. Aquí suponemos que la recta ideal tiene la propiedad de que la intersección de intervalos anidados de longitud cada vez más pequeña e igual a una potencia de $1/10$, tienen por intersección un punto. Esta última, es una manera de suponer que la recta ideal no tiene agujeros, es decir, que se forma de un continuo de puntos. A dicha recta también se le llama la *recta real,* o *recta numérica.*

Recíprocamente, a cada punto P de la recta ideal se le asocia la expansión construida en la forma siguiente: Primero se determina a qué intervalo de longitud 1 y de la forma $[a, a+1]$, con a entero, pertenece el punto P. Esto determina la parte entera de la expansión decimal correspondiente a P. A continuación se divide el intervalo anterior en diez subintervalos de longitud $1/10$ de la forma $[a + b_1/10, a + (b_1 + 1)/10]$ para $b_1 = 0, 1, 2, \ldots, 9$ y se determina el valor del dígito b_1 tal que $P \in [a + b_1/10, a + (b_1 + 1)/10]$. Este dígito b_1 será el primer dígito a la derecha del punto de la expansión decimal asociada a P. A continuación se repite el proceso anterior, subdividiendo en cada paso al intervalo anterior en diez subintervalos y agregando a la derecha de la expansión en formación, el dígito correspondiente al extremo izquierdo del subintervalo al cual pertenece P. Este proceso nos permite conocer cada uno de los dígitos de la expansión decimal asociada a P y, por tanto, el número real asociado a P.

Ejercicios y problemas del capítulo

Los números naturales

2.4.1. Pruebe que el producto de dos números naturales pares es par, que el de dos números naturales impares es impar y que el de un número par por uno impar es par.

2.4.2. Muestre que el producto de dos números naturales que no son divisibles por 3 no es divisible por 3.

2.4.3. Sea $x^3 + px^2 + qx + r = 0$ una ecuación de tercer grado con p, q y r números naturales. Pruebe que si α es un número racional que es solución de la ecuación, entonces α es entero y divide al término independiente r.

2.4.4. Sean $p(x) = x^5 + 2x^4 - 6x^3 + x - 6$ y $q(x) = x^3 - 8x^2 + 4$. Encuentre polinomios $m(x)$ y $r(x)$ tales que $p(x) = q(x)m(x) + r(x)$, con grado de $r(x) <$ grado de $q(x)$.

2.4.5. *Principio de inducción: Si un subconjunto C de números naturales cumple que: (i) el número 1 pertenece a C y (ii) $k \in C$ implica que $k + 1 \in C$, entonces $C = \mathbb{N}$.

Aplicando el Principio de inducción, demuestre la validez de las fórmulas siguientes para cada número natural n:

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$;

(b) $\dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{3^2} + \cdots + \dfrac{2}{3^n} = 1 - \dfrac{1}{3^n}$;

(c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;

(d) $1 + 3 + 5 + \cdots + (2n-1) = n^2$;

(e) $\dfrac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dfrac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$;

(f) $n < 2^n$.

Definición de número real

2.4.6. Escriba la expansión decimal correspondiente a los números racionales siguientes y determine, en cada caso, el bloque de dígitos que se repite:
(a) $\dfrac{23}{7}$; (b) $-\dfrac{57}{4}$; (c) $\dfrac{2491}{990}$.

2.4.7. Expese como un cociente los números racionales cuyas expansiones decimales son
(a) $A = 2.34\overline{210}$; (b) $B = 37.2856\overline{0}$; (c) $C = -13.3\overline{45}$.

2.4.8. Demuestre que el número $\sqrt{8}$ no es un número racional.

2.4.9. Demuestre que $\sqrt{5}$ y $\sqrt{3}$ no son números racionales.

2.4.10. Pruebe que el conjunto de números de la forma $a+b\sqrt{2}$ con $a, b \in \mathbb{Q}$ forman un campo que contiene a $\sqrt{2}$.

2.4.11. *Pruebe que si b es un primo relativo de 10, entonces el periodo de la expansión decimal del número a/b empieza justo enseguida del punto decimal.

Operaciones con números reales

2.4.12. Partiendo de las expansiones decimales $A = 2.3458\overline{0}$, $B = -3.2568\overline{0}$ y $C = -1.35802\overline{0}$, calcule las expansiones decimales de $A + B$, $A \cdot B$, $B \cdot C$ y $B - C$.

2.4.13. Calcule la expansión decimal completa de la suma $p + q$ de los números racionales p, q cuyas expansiones decimales son $p = 2.\overline{34}$, $q = -3.\overline{5}$.

2.4.14. Encuentre la expansión truncada de orden 5 de la suma $A + B$ de los números reales $A = 1.28288288828888\cdots$, y $B = 12.\overline{253}$.

2.4.15. Conteste Verdadero o Falso en cada reactivo.

(a) Si A es un número real distinto de cero, entonces existe otro número real B tal que $A \cdot B = 2$.

(b) Existe un número real A tal que $A^2 + A + 1 = 0$.

(c) El producto de dos números reales irracionales es un número irracional.

Densidad de los números reales

2.4.16. Sean p y q dos números racionales con $p < q$. Encuentre un número racional r tal que $p < r < q$.

2.4.17. Dé la expansión decimal de un número irracional entre los números $0.0001\overline{0}$ y $0.001\overline{0}$.

2.4.18. Sea $A = 2.13113\overline{0}$, encuentre un racional cuya distancia a A sea menor que $1/10^4$. Encuentre un irracional con la misma propiedad.

2.4.19. Muestre que entre cada par de números racionales distintos siempre hay un número irracional y que entre cada par de irracionales distintos existe siempre un número racional.

Propiedad de orden en los números reales

2.4.20. Conteste Verdadero o Falso en cada reactivo.

(a) Si A y B son números reales con $A < B$, entonces $A < \dfrac{A+B}{2} < B$.

(b) Si $A^2 \leqslant A$, entonces $|A| \leqslant 1$.

2.4.21. Demuestre que si A es un número real distinto de cero, entonces $A^2 > 0$.

2.4.22. Demuestre que $||A| - |B|| \leqslant |A - B|$ para cualesquiera $A, B \in \mathbb{R}$.

2.4.23. Exprese el conjunto $A = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } |2x+1| \leqslant 3 \text{ y } |x-1| > 1\}$ como unión de intervalos.

2.4.24. Escriba como unión de intervalos ajenos los conjuntos siguientes:

(a) $\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } |4x+1| - |x-1| > x-2\}$;

(b) $\mathcal{B} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } |x-3| \leqslant 2|x|\}$;

(c) $\mathcal{C} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } |2x-3| > 2 \text{ y } |x-5| < 1\}$;

(d) $\mathcal{D} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } |x-2| < 1 \text{ y } |2x-1| > 2\}$;

(e) $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } 1 < |3x+2| \leqslant 5\}$;

(f) $\mathcal{F} = \{x \in \mathbb{R} \text{ tales que } x > 0 \text{ y } |x-3| > 2|x|\}$.

Completez de los números reales

2.4.25. Proporcione un conjunto acotado de expansiones decimales periódicas cuyo infimum y cuyo supremum no sean expansiones decimales periódicas.

2.4.26. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son conjuntos de números reales acotados superiormente, demuestre las afirmaciones siguientes:

(a) $\sup \mathcal{A} \leqslant \sup \mathcal{B}$, para $\mathcal{A} \subset \mathcal{B} \subset \mathbb{R}$; ($b$) $\sup(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \sup \mathcal{A} + \sup \mathcal{B}$;

(c) $\sup \mathcal{A} = -\inf(-\mathcal{A})$; ($d$) $\inf(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \inf \mathcal{A} + \inf \mathcal{B}$.

En (a) y (d), $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ denota el conjunto de los números reales de la forma $a+b$, con $a \in \mathcal{A}$ y $b \in \mathcal{B}$. En (c), $-\mathcal{A}$ denota el conjunto de los números reales de la forma $-a$, con $a \in \mathcal{A}$.

2.4.27. *Sea $\mathcal{A}$ el conjunto de las expansiones decimales que no contienen al dígito 5.

(a) Pruebe que $\mathcal{A}^c$ es unión ajena de intervalos de la forma $[a, b)$ con $b > a$.

(b) Pruebe que $\mathcal{A}$ no contiene ningún intervalo abierto.

(c) Pruebe que $\mathcal{A}$ contiene números racionales e irracionales.