Capítulo 1

Una historia breve del cálculo

1.1 El siglo XVII: Newton y Leibniz

El Cálculo diferencial e integral ha sido reconocido como el instrumento más efectivo para la investigación científica y el desarrollo tecnológico que jamás hayan producido las matemáticas. Concebido para el estudio del cambio, el movimiento y la medición de áreas y volúmenes, el cálculo es la invención que caracteriza la revolución científica del siglo XVII. Su creación se debe al trabajo independiente de dos matemáticos, el inglés Isaac Newton (1642-1727) y el alemán Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), quienes publicaron sus investigaciones entre los años de 1680 y 1690. Leibniz en 1684, en la revista *Acta Eruditorum*, y Newton en 1687, en su gran obra *Principia Mathematica Philosophiae Naturalis*.

Isaac Newton
(1642–1727)

Gotfried Whilhelm Leibniz
(1646–1716)

El cálculo se desarrolló a partir de las técnicas infinitesimales utilizadas para resolver dos tipos de problemas: el cálculo de áreas y volúmenes y el cálculo de tangentes a curvas. Arquímedes de Siracusa (287-212 a. C.), desde tiempos antiguos, había realizado los avances más significativos sobre esos problemas, aplicando el método exhaustivo o de agotamiento para la determinación de áreas y volúmenes y obteniendo importantes resultados sobre el cálculo de tangentes para ciertas curvas particulares. En la primera mitad del siglo XVII, se renovó el interés por esos problemas clásicos y varios matemáticos como Bonaventura Cavalieri (1598-1647), John Wallis (1616-1703), Pierre de Fermat (1601-1665), Gilles de Roberval (1602-1675) e Isaac Barrow (1630-1677), lograron avances que prepararon el camino para la obra de Leibniz y Newton.

A partir de la utilización del método cartesiano[1] para sintetizar los resultados y técnicas desarrollados previamente para el cálculo de áreas y tangentes de curvas, Newton y Leibniz inventaron los métodos y algoritmos que hacen del cálculo una herramienta aplicable a clases generales de problemas. Sus contribuciones en la creación del cálculo difieren en origen, desarrollo e influencia y merecen ser tratadas separadamente.

Newton, hijo de granjeros, nació en Lincolnshire, Inglaterra, en el día de Navidad de 1642, según el calendario juliano, todavía en uso en Inglaterra, llegó en 1669 a ocupar, en la Universidad de Cambridge, la Cátedra Lucasiana como profesor de matemáticas. En sus primeras investigaciones introdujo las series infinitas de potencias en una variable x para reformular resultados previos de John Wallis, y bajo la influencia de su profesor Isaac Barrow, utilizó infinitesimales para mostrar la relación inversa entre el cálculo de áreas y el cálculo de tangentes. Las operaciones de derivación e integración de funciones y su relación recíproca, emergen como un proceso analítico que puede ser aplicado al estudio general de las curvas.

En la presentación de sus ideas, Newton recurre a argumentos basados en el movimiento y la dinámica de los cuerpos. Así, las variables son vistas como algo que cambia o fluye con el tiempo (*fluente*) y a su derivada o razón de cambio con respecto al tiempo la llama su *fluxión*. El problema básico del cálculo es, para Newton, el estudio de las relaciones entre fluentes y sus fluxiones. En 1671, Newton concluye su tratado sobre el método de fluxiones, que es publicado hasta 1736, casi diez años después de su muerte, ocurrida en 1727.

En su libro *Principios Matemáticos de la Filosofía Natural*, publicado en 1687, Newton estudia la dinámica de las partículas y establece las bases matemáticas para el cálculo de razones de cambio mediante una teoría geométrica de los límites. Utilizando estos conceptos, desarrolla su teoría de la gravitación y reformula las leyes de Kepler para el movimiento de los cuerpos celestes. En su libro, Newton expresa magnitudes y razones de cambio en

[1]Por René Descartes (1596-1650), quien inventó la geometría analítica, independientemente de Pierre de Fermat, y la dió a conocer en 1637 en su obra *La Géométrie*.

términos de cantidades geométricas, tanto de tipo finito como infinitesimal, tratando deliberadamente de evitar el uso del lenguaje algebraico. Esta reticencia de Newton a usar los métodos algebraicos, limitó su influencia en el campo de las matemáticas e hizo necesario reformular sus contribuciones en términos del cálculo de Leibniz.

G. W. Leibniz fue el hijo de un profesor de filosofía y nació en la ciudad de Leipzig, Alemania, en 1646. Ingresó a la universidad a la edad de quince años y obtuvo el doctorado en filosofía a la edad de 21 años. El interés de Leibniz por las matemáticas nació en 1672 durante una visita a París, donde el matemático holandés Christiaan Huygens (1629-1695) lo introdujo al estudio de la teoría de curvas. Después de varios años de estudio bajo la dirección de Huygens, Leibniz investigó las relaciones entre la suma y la diferencia de sucesiones infinitas de números y dedujo varias fórmulas famosas.

Leibniz se interesó en las cuestiones de lógica y de notación para la investigación formal, y su cálculo infinitesimal es el ejemplo supremo, en todas las ciencias y las matemáticas, de un sistema de notación y terminología perfectamente adaptado a su objeto de estudio. En el sentido anterior, Leibniz formalizó, con su notación, las propiedades y reglas fundamentales de los procesos de derivación e integración, haciendo de su aplicación a los más variados problemas, un ejercicio de rutina que un estudiante puede aprender desde sus primeros años. Su primera publicación sobre el cálculo diferencial apareció en 1684, en el *Acta Eruditorum*, bajo el título *Un nuevo método para máximos y mínimos así como para el cálculo de tangentes que incluyen cantidades tanto fraccionales como irracionales y un notable tipo de cálculo para todo esto.* En este artículo, Leibniz introduce la diferencial dx y las reglas básicas del cálculo diferencial $\mathrm{d}(x+y) = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y$ y $\mathrm{d}(xy) = x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}x$. Dos años después, publica su segundo artículo *Sobre una geometría oculta*, donde introduce y explica el significado del símbolo $\int$ de integración y aplica el poder del cálculo para estudiar curvas trascendentes y deriva una fórmula analítica para la cicloide.

El vigoroso empuje de Leibniz al estudio y desarrollo del nuevo cálculo, el espíritu didáctico de sus escritos y su habilidad para relacionarse con otros investigadores contribuyeron a fortalecer su gran influencia en las matemáticas. Mantuvo una estrecha colaboración con otros estudiosos de su época, incluyendo los hermanos Johann (1667-1748) y Jakob Bernoulli (1654-1705), quienes se convirtieron en los principales usuarios, investigadores y promotores del nuevo método, Pierre Varignon y Guillaume François Antoine de L'Hospital (1661-1704), este último, autor del primer libro de texto de cálculo diferencial, publicado en 1696 y producto de las lecciones que recibió de parte de Johann Bernoulli. En 1700, Leibniz convence a Federico I de Prusia para crear la Academia de Ciencias de Brandenburgo (después Real Academia de Berlín) de la cual será su presidente vitalicio. En contraste, el aislamiento y la lentitud mostrada por Newton para difundir sus ideas y descubrimientos redujo su presencia en las matemáticas europeas de ese tiempo y aunque un buen número de matemáticos ingleses continuó desarrollando el cálculo, su programa resultó inferior al desarrollado por Leibniz.

1.2 El siglo XVIII: Euler y Lagrange

El siglo XVIII es denominado "El siglo del Análisis Matemático". De 1700 a 1800 se dió la consolidación del cálculo y sus aplicaciones a las ciencias naturales, particularmente a la Mecánica. Con ese desarrollo, vino la especialización y el nacimiento de nuevas ramas de las matemáticas, tales como: la Teoría de ecuaciones diferenciales, ordinarias y parciales, el Cálculo de variaciones, la Teoría de series y la Geometría diferencial. Las aplicaciones del análisis incluyen ahora la Teoría de vibraciones, la Dinámica de partículas, la Teoría de cuerpos rígidos, la Mecánica de cuerpos elásticos y deformables y la Mecánica de fluidos. A partir de entonces, se distinguen las matemáticas puras de las matemáticas aplicadas.

El desarrollo del análisis matemático en el siglo XVIII está documentado en los trabajos presentados en las Academias de París, Berlín, San Petersburgo y otras, así como en los tratados expositorios publicados en forma independiente. Las figuras dominantes de este periodo son el matemático suizo Leonhard Euler (1707-1783) y el matemático italo-francés Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

Leonhard Euler
(1707–1783)

Joseph Louis Lagrange
(1736-1813)

Euler nació en Basilea, Suiza, donde completó se educación universitaria a la edad de quince años. Es considerado el matemático más prolífico de todos los tiempos, sus obras abarcan casi setenta y cinco volúmenes y contienen contribuciones fundamentales a casi todas las ramas de las matemáticas y sus aplicaciones. La carrera profesional de Euler se desarrolló durante dos largos periodos en la Real Academia de San Petersburgo, Rusia (1727-1741 y 1766-1783) y un periodo intermedio en la Academia de Berlín (1741-1766).

La obra de Euler en dos volúmenes intitulada *Introducción al análisis infinitesimal*, publicada en 1748, da lugar al nacimiento del llamado Análisis matemático como rama de esta disciplina, análoga al Álgebra y la Geometría. El Análisis matemático es construido a partir del concepto fundamental de función y de los procesos infinitos desarrollados para la representación y estudio de las funciones. En esa gran obra, por primera vez se presenta el estudio sistemático de las funciones exponenciales y de las funciones trigonométricas como funciones numéricas, así como el estudio de las funciones transcendentes elementales mediante sus desarrollos en series infinitas. A esa primera obra de Euler, siguieron dos obras más, en 1755 y 1768, sobre el cálculo diferencial e integral, respectivamente, que constituyen la fuente original de los actuales libros y textos sobre el cálculo y las ecuaciones diferenciales.

El enfoque analítico de Euler recibió un gran impulso de parte de la otra gran figura del siglo XVIII, el matemático Joseph Louis Lagrange, quien a la muerte de Euler, en 1783, lo reemplazó como el matemático líder de Europa. Aplicando métodos puramente analíticos, Lagrange extendió y perfeccionó el Cálculo de variaciones y a partir de sus aplicaciones a la mecánica, sentó los fundamentos de la llamada Mecánica analítica. En 1788 se publicó su famoso tratado *Mecánica analítica* en donde, aplicando las ideas del cálculo de variaciones, presentó los fundamentos analíticos de la mecánica. En el prefacio de su tratado, Lagrange declara que en su exposición sólo recurre a argumentos analíticos, sin dibujos, figuras o razonamientos mecánicos; es decir, Lagrange hace de la mecánica una rama del análisis matemático.

Para fines del siglo XVIII había preocupación en Europa por los fundamentos del cálculo y del análisis. Los argumentos basados en la teoría de fluxiones de Newton y en la idea de infinitamente pequeño, mostraban serias inconsistencias que fueron puntualmente señaladas por el obispo anglicano irlandés George Berkeley (1685-1753) en 1734. Afrontando esta situación, Lagrange publicó en 1797 su obra *Teoría de funciones analíticas* en la cual pretende presentar un desarrollo completo del cálculo de funciones sin recurrir a los conceptos de límite o de cantidad infinitesimal. El enfoque de Lagrange se basa en considerar que las funciones son representables como series de potencias, cuyos coeficientes definen las derivadas de los distintos órdenes. En este tratado, Lagrange sienta las bases para la aproximación de funciones por polinomios y da la forma del residuo denominada Residuo de Lagrange.

1.3 El siglo XIX: Cauchy, Riemann y Weierstrass

Al finalizar el siglo XVIII, los matemáticos habían ya detectado distintas limitaciones e incongruencias en las bases sobre las que se había desarrollado hasta entonces el cálculo diferencial e integral. Los trabajos de Jean D'Alembert

(1717-1783) sobre la cuerda vibrante y de Joseph Fourier (1768-1830) sobre la Teoría analítica del calor, de 1807, remitían a la necesidad de considerar clases más amplias de funciones que las meramente representables como series de potencias a la manera de Lagrange. En ese momento, emerge la necesidad de aclarar las propiedades de continuidad y de integrabilidad de las funciones, así como las condiciones de convergencia para series de funciones.


Augustin Louis Cauchy (1789–1857)


Bernhard Riemann (1826–1866)


Karl Weierstrass (1815-1897)

El concepto de continuidad de una función aparece explícitamente definido, por primera vez, en el trabajo del matemático checo Bernhard Bolzano (1781-1848), pero es el matemático francés Augustin Louis Cauchy (1789-1857) quien desarrolla en su generalidad la teoría de funciones continuas y formula los conceptos y procesos fundamentales del cálculo para ese tipo de funciones en los términos en que actualmente se presentan. En sus tres grandes obras *Curso de análisis* (1821), *Resumen de lecciones sobre el cálculo infinitesimal* (1822) y *Lecciones sobre el cálculo diferencial* (1829), Cauchy hace una exposición rigurosa del cálculo basándose en el concepto fundamental de límite de una función. En particular, define la derivada de una función como el límite de cocientes de los incrementos de las variables y demuestra sus distintas propiedades; presenta el teorema del valor medio y sus aplicaciones a la aproximación de funciones por polinomios; establece rigurosamente los criterios para la existencia de máximos y mínimos de funciones; define la integral definida de una función continua en un intervalo mediante el límite de sumas asociadas a particiones de ese intervalo; y formula, con todo rigor, el llamado teorema fundamental del cálculo, estableciendo la relación inversa que existe entre los procesos de derivación e integración de funciones.

El siguiente avance en la evolución histórica del cálculo, se debe a Bernhard F. Riemann (1826-1866), quien introdujo las funciones esencialmente discontinuas en el desarrollo del cálculo, extendiendo el proceso de integración a este tipo de funciones, con importantes consecuencias sobre los conceptos primarios de longitud, área y volumen de conjuntos.

A pesar de los grandes esfuerzos por dotar al análisis matemático de bases sólidas, a mediados del siglo XIX varias suposiciones sobre la estructura de los números reales utilizadas en la prueba de las propiedades importantes de las funciones continuas, y otras suposiciones, como por ejemplo la existencia de derivada en casi todos los puntos para toda función continua, son señaladas críticamente y desmentidas por contundentes contraejemplos dados por matemáticos como el mismo Bolzano y el alemán Karl Weierstrass (1815-1897) quienes, por ejemplo, logran exhibir funciones continuas que no poseen derivada en punto alguno. Ese tipo de situaciones, obliga a los matemáticos al estudio y construcción del sistema de los números reales a partir del sistema de los números naturales. El año de 1872 registra la publicación, casi simultánea, de construcciones de los números reales debidas a Georg Cantor (1845-1918), Richard Dedekind (1831-1916) y Edward Heine (1821-1881), basadas en los conceptos de límite y sucesiones, previamente desarrollados.

La construcción de los números reales es el paso decisivo hacia la aritmetización del análisis matemático, que permite al mismo Karl Weierstrass dar la definición de límite en términos de las meras estructuras algebraicas y de orden de los números reales, y con ello los conceptos y procesos propios del cálculo quedan debidamente justificados y adquieren la presentación definitiva con que hoy son expuestos en los libros de texto y demás trabajos matemáticos.

1.4 El siglo xx: Lebesgue y Robinson

Finalmente, es de señalar que el siglo xx registra dos nuevos avances importantes en el desarrollo del análisis: la llamada integral de Lebesgue, debida al francés Henri Lebesgue (1875-1941), y el Análisis no estándar, debido básicamente al matemático Abraham Robinson (1918-1974), nacido en Alemania, de familia judía, formado en Israel y con carrera profesional en Canadá y Estados Unidos.

El concepto de integral desarrollado por Cauchy se aplica a funciones continuas, pero aunque éste fue generalizado después, por Riemann, a funciones con cierto tipo de discontinuidades, el espacio de las funciones integrables no es cerrado bajo los procesos de convergencia y de límite de sucesiones de funciones, lo que restringe su aplicablidad a otras ramas de la matemática.

Basado en trabajos del italiano Giuseppe Peano (1858-1932) y del francés Camille Jordan (1838-1922), Henri Lebesgue logró dar, en 1920, una definición de conjunto medible y de medida que generalizan, en la recta, las nociones de intervalo y de longitud de un intervalo, respectivamente. Con base en estos nuevos conceptos, Lebesgue introdujo una nueva clase de funciones llamadas funciones medibles, para las cuales adquiere sentido una nueva definición de integral, definida como el límite de integrales de funciones que toman valores constantes en conjuntos medibles. En este sentido, la integral de Lebesgue es una generalización de la integral de Riemann, que se obtiene como el límite de integrales de funciones que toman valores constantes sobre intervalos.

Henri Lebesgue
(1875–1941)

Abraham Robinson
(1918–1974)

La clase de las funciones integrables en el sentido de Lebesgue tiene propiedades inmejorables para los propósitos del análisis matemático en tanto que límites de sucesiones y series convergentes de funciones de este tipo resultan ser también funciones integrables. La nueva teoría de la medida e integración sienta las bases para el desarrollo de la Teoría matemática de la probabilidad y la Estadística, que tanta importancia tienen en la ciencia actual.

El otro desarrollo importante del análisis del siglo XX fué presentado en 1960 por Abraham Robinson, seguido de su libro *Análisis no estándar*, en el que se retoma el problema de la aritmetización del análisis a partir del concepto de número y de magnitud infinitamente pequeña. A partir de construcciones basadas en la teoría de conjuntos, Robinson introdujo el concepto de número hiperreal con lo que logra dar un significado preciso a los "infinitamente pequeños" que Euler usaba en sus argumentos y demostraciones. Con ello, los procesos de límite y de convergencia del análisis son sustituidos por operaciones y procedimientos meramente algebraicos en la clase de los números hiperreales.

Aunque la nueva formulación de Robinson da lugar a un cálculo más simple, la construcción de los números hiperreales es muy elaborada y los libros en los que se expone el cálculo no estándar no han logrado tener éxito en los niveles matemáticos medio y básico.