Universidad de Sonora
División de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemáticas

Notas para el

Taller de entrenamiento de la Preselección
Sonora 2002

Álgebra y Teoría de Números

Autor: M.C. Eduardo Tellechea Armenta

Hermosillo, Sonora ***Junio de 2002***

CONTENIDO

INTRODUCCION.

Este material sirve de base para el entrenamiento a la Preselección Estatal de la Olimpiada Mexicana de Matemáticas, en lo que respecta al tema de Álgebra y Teoría de Números. El trabajo inicia con los problemas aplicados en los años 2000, 2001 y 2002 en los correspondientes Concursos Preselectivos dentro de las actividades del Concurso Regional de Física y Matemáticas organizados por la Universidad de Sonora. Posteriormente se discute una larga lista de problemas de Olimpiadas Nacionales de México, Argentina, España, etc., con el fin de que los estudiantes que resulten seleccionados para representar a nuestro estado en el concurso nacional, tengan una panorámica del tipo de problemas a los que se enfrentará.
Asimismo en este material se presenta a los estudiantes preseleccionados para la Olimpiada Estatal de Matemáticas, una breve exposición de los temas de Divisibilidad y Congruencias, así como una amplia gama de problemas tanto resueltos como propuestos. Los problemas seleccionados son a todos los niveles: Estatal, Nacional y de Olimpiadas Internacionales. Se optó por que este material de la Teoría de Números formara parte del entrenamiento a la Preselección Estatal, debido a que no forman parte de la currícula de bachillerato en nuestro estado y es material de exámenes en concursos nacionales e internacionales.

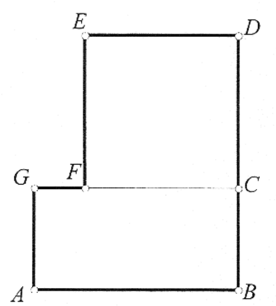
Eduardo Tellechea Armenta
Profesor Titular del Departamento de Matemáticas
Universidad de Sonora.
Junio de 2002

Problemas de los Concursos Regionales de Física y Matemáticas

Preselectivo de Matemáticas 2002

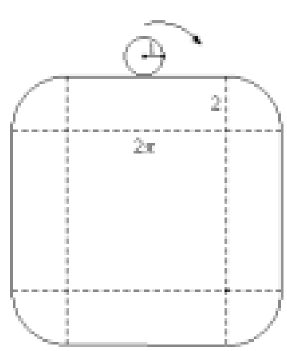
Los siguientes _ocho_ problemas fueron aplicados en el **Concurso Preselectivo** de Matemáticas realizado dentro del marco del **XXXIV CONCURSO REGIONAL DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS**, realizado en la Universidad de Sonora durante el mes de mayo de 2002.

1. El rectángulo ABCG y el cuadrado CDEF tienen el mismo perímetro. AB = 2 AG. La figura de vértices ABDEFG tiene 72 cm de perímetro. ¿Cuánto miden los lados del cuadrado CDEF? ¿Cuánto miden los lados del rectángulo ABCG?



2. Ana y Beto van a hacer un mismo recorrido de 120 km por carretera. Ana viaja a una velocidad constante de 80 km/h y Beto viaja a una velocidad también constante de 60 km/h. Si salen del mismo lugar (pero no al mismo tiempo) y se encuentran a la mitad del recorrido, ¿cuántos minutos antes salió Beto que Ana?.

3. Un cuadrado de 2π cm de lado se ha "redondeado" agregando un marco de 2 cm de ancho y poniendo en las esquinas cuartos de círculo de 2 cm de radio. Alrededor de él gira una rueda de 1 cm de radio (la rueda siempre toca el cuadrado redondeado). ¿Cuántas vueltas completas da la rueda sobre sí misma al dar una vuelta completa alrededor del cuadrado redondeado?



4. Los comerciantes Álvarez y Blanco tienen cada uno la misma cantidad de kilogramos de sal en bolsas de 50 kg. Álvarez vende las bolsas enteras, cada una a \$ 36. Blanco fracciona la sal en bolsitas de medio kilo y al embolsarla pierde el 4% del total; si vende cada bolsita a \$0.40 obtiene \$192 por la venta de todas. Con respecto a lo obtenido por Blanco, ¿qué tanto por ciento menos obtiene Álvarez?

5. Hallar todas las ternas x, y, z, de números reales que satisfacen el sistema:
$$x(x + y + z) = 26$$
$$y(x + y + z) = 27$$
$$z(x + y + z) = 28$$

6. Los enteros positivos se escriben en orden sucesivo por renglones según la siguiente regla: En el primer renglón va únicamente el 1; después, a partir del segundo renglón, en cada renglón se escribe doble cantidad de números que en el renglón anterior (para ilustrar, en la figura se escribieron los tres primeros renglones). ¿En qué número de renglón queda escrito el 2002 ?

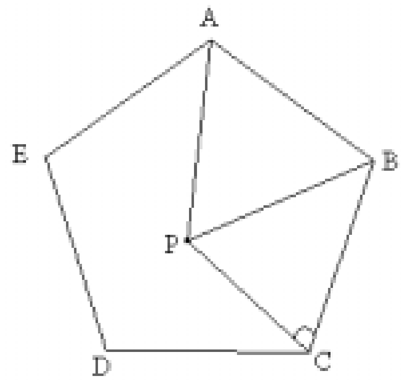
1
2 3
4 5 6 7

7. ¿Cuál es la cifra decimal que ocupa el lugar 2002 en el desarrollo decimal de 4/101? (por ejemplo, en el desarrollo decimal de $\pi = 3.14159...$, las cifras decimales son las que aparecen a la derecha del punto decimal y los lugares que ocupan son: el lugar 1 lo ocupa el 1, el lugar 2 lo ocupa el 4, el lugar 3 lo ocupa el 1, etc).

8. El ángulo A del triángulo isósceles ABC mide 2/5 de un ángulo recto, siendo iguales sus ángulos B y C. La bisectriz de su ángulo C corta al lado opuesto en el punto D. Calcular las medidas de los ángulos del triángulo BCD. Expresar la medida del lado BC en función de la medida b del lado AC, sin que en la expresión aparezcan razones trigonométricas.

9. Los números fraccionarios y positivos a, b, c, d y e satisfacen las siguientes relaciones:
$$a \,.\, b = 1,\ \ b \,.\, c = 4,\ \ c \,.\, d = 9,\ \ d \,.\, e = 16 \ \text{ y } \ e \,.\, a = 25$$
Hallar a, b, c, d y e.

10. En la figura siguiente ABCDE representa un pentágono regular (de 1 m de lado) y ABP es un triángulo equilátero. ¿Cuántos grados mide el ángulo BCP ?



11. Con tres dígitos distintos se forman los seis números de tres cifras distintas. Si se suman estos seis números el resultado es 4218. La suma de los tres números más grandes menos la suma de los tres más chicos es igual a 792. Hallar los tres dígitos.

12. Del conjunto de los números naturales se suprimieron los cuadrados perfectos y los cubos perfectos. De los números que quedaron (sin suprimir) consideramos los 2002 números más chicos. Hallar el mayor de estos 2002 números.
    ACLARACIÓN: Los cuadrados perfectos son los números que se obtienen al elevar al cuadrado los números naturales y los cubos perfectos son los números que se obtienen al elevar al cubo los números naturales.

13. Se escriben en sucesión todos los números del 1 al 2002, en orden, uno a continuación del otro, para formar un número muy grande al que llamaremos G (es decir, G = 1234567891011121314...20012002). ¿Cuál es la cifra central de G? y ¿a qué número de los de la sucesión corresponde esa cifra?

14. Determinar todos los números naturales n, de tal manera que n y $(n + 475)$ sean ambos cuadrados perfectos.
    ACLARACIÓN: Los cuadrados perfectos son los números que se obtienen al elevar al cuadrado los números naturales.

A continuación se presenta una colección de 48 problemas con solución o guía de solución. Se recomienda que el estudiante intente resolverlo sin ver la solución.

<u>Preselectivo de Matemáticas 2001</u>

Los siguientes <u>*ocho*</u> problemas fueron aplicados en el **Concurso Preselectivo** de Matemáticas realizado dentro del marco del **XXXIII CONCURSO REGIONAL DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS**, realizado en la Universidad de Sonora durante el mes de mayo de 2001.

Problema 1. Un pastel se corta quitando cada vez la tercera parte de la cantidad de pastel que hay en el momento de cortar. Si el primer corte se hace con el pastel completo, ¿qué fracción del pastel original quedó después de cortar 4 veces?.

Solución.
Después del primer corte queda: 1-1/3 =2/3 del pastel.
Después del segundo corte queda: 2/3 – (1/3)(2/3) = 4/9 del pastel.
Después del tercer corte queda: 4/9 – (1/3)(4/9) = 8/27 del pastel.
Después del cuarto corte queda: 8/27 – (1/3)(8/27) = **16/81 del pastel**.

Problema 2. Un auditorio tiene 75 filas con 43 asientos cada una. El total de los asientos está numerado de izquierda a derecha, comenzando por la primera fila y hacia atrás. ¿En qué número de fila está el asiento número 2001?, ¿qué lugar ocupa en esa fila el asiento mencionado?.

Solución.
Observe que el numero de fila que ocupa un asiento es el residuo de dividir el número del asiento entre 43 y el número que ocupa en esa fila es el cociente incrementado en una unidad, es decir como 2001 = (43)(46) + 23, concluimos que el asiento 2001 se encuentra en **la fila número 47 ocupando el lugar 23**.

Problema 3. En el avión que salió de Hermosillo había 30 mujeres y algunos hombres. Cuando hizo escala en Guadalajara subieron 26 hombres y 26 mujeres y no bajó nadie. Al despegar nuevamente, el número de mujeres era dos quintas partes del número total de pasajeros. ¿Cuántos hombres había entre los pasajeros del avión antes de la escala en Guadalajara?.

Solución.
Sea x el número de hombres en avión, que salió de Hermosillo.

Al salir de Hermosillo había 30 mujeres y x hombres
En la escala de Guadalajara había 56 mujeres y (x + 26) hombres, por lo tanto:

$$56 = \frac{2}{5}(82 + x)$$

de donde obtenemos el valor **$x = 58$**

Problema 4. Si efectuamos el producto de todos los números impares comprendidos entre el 1 y 2001, ¿cuál es la cifra de las unidades del número así obtenido?.

Solución.
1 x 3 = 3
1 x 3 x 5 = 15

y a partir de aquí, vemos que el producto de todos los impares (es impar) y además múltiplo de 5, por lo que **<u>la última cifra de este producto será 5.</u>**

<u>Problema 5</u>. En el pizarrón está escrito un número de tres cifras, todas distintas. Ana Intercambia la primera cifra con la última. La suma del número escrito en el pizarrón más el número de Ana es igual a 92 veces la suma de las dígitos del número escrito en el pizarrón. Determinar todos los posibles valores del número escrito en el pizarrón.

Solución.
Sea *abc* el número de tres dígitos escrito en el pizarrón.

$$abc + cba = 92(a+b+c)$$

Expresando los números de tres dígitos en notación decimal, tendremos la ecuación:

$$100a + 10b + c + 100c + 10b + a = 92(a + b + c)$$

resolviendo esta ecuación tenemos:

$$9a + 9c = 72b, \text{ o equivalentemente } \quad a + c = 8b$$

Como a, b y c son los dígitos del 0 al 9, b sólo puede tomar los valores 1 y 2.

<u>Caso 1</u>. Si $b = 1$, $a + c = 8$ y entonces las posibilidades para a y c respectivamente serán:

$$a = 2,\ 6,\ 3,\ 5 \quad \text{y} \quad c = 6,\ 2,\ 5,\ 3$$

siendo los números buscados en este caso: 216, 612, 513 y 315.

<u>Caso 1</u>. Si $b = 2$, $a + c = 16$ y entonces las posibilidades para a y c respectivamente serán:

$$a = 9{,}7 \quad \text{y} \quad c = 7,\ 9$$

siendo en este caso dos posibilidades: 927 y 729.

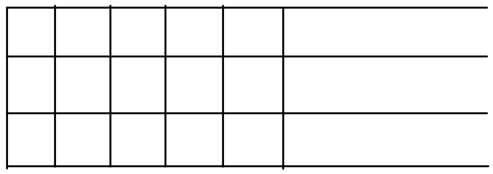
De acuerdo a los casos 1 y 2, **<u>los números buscados son: 216, 612, 315, 513, 729 y 927</u>**.

<u>Problema 6</u>. Alicia va al club cada día; Beatriz va cada dos días; Carlos va cada tres; Daniel cada cuatro; Enrique cada cinco; Francisco cada seis y Gabriela cada 7. Si hoy están todos en el club, ¿dentro de cuántos días será la primera vez que vuelven a reunirse?

Solución.
La próxima vez que se reúnan será de m días, donde m es el mínimo común múltiplo de 2, 3, 4, 5, 6 y 7. Por lo tanto $m = 420$. **<u>Así pues se volverán a reunir dentro de 420 días.</u>**

<u>Problema 7</u>. Sea n un número natural. Se tiene un rectángulo de 3xn , cuadriculado en cuadritos de 1x1. Denominamos puntos de la cuadrícula a los puntos donde se cortan dos líneas del cuadriculado, o una línea del cuadriculado con un lado del rectángulo, o dos lados del rectángulo. Si se cuentan todos los cuadrados de todos los tamaños posibles que tienen sus cuatro vértices en puntos de la cuadrícula, se obtienen 950 cuadrados. Hallar el valor de n.

Solución.



Para n = 1 habrá sólo 3 de 1x1.
Para n = 2 habrá: 6 de 1x1 y 2 de 2x2.
Para n = 3 habrá: 9 de 1x1, 4 de 2x2 y 1 de 3x3.
Para n = 4 habrá: 12 de 1x1, 6 de 2x2   y 2 de 3x3
.....
Siguiendo con esta relación:
Para *n* habrá: 3*n* de 1x1,   2(*n*-1) de 2x2 y   (*n*-2) de 3x3.

$$3n + 2(n-1) + (n-2) = 950$$
$$6n = 954$$
$$n = 159$$

es decir para *n* = 159 habrá 950 cuadritos.

<u>Problema 8</u>. Ana y Luis forman parte de un grupo de niños y niñas que visitan un parque de diversiones. Si cada niño paga $19 y cada niña paga $13. ¿Cuántos niños y cuántas niñas entraron al parque si en total, gastaron $323 ?.

Solución.
Sea *H* el número de niños y *M* el número de niñas. Tenemos que encontrar las soluciones enteras y positivas de la siguiente ecuación:
Observe que ni *H* ni *M* pueden tomar el valor cero.

$$19H + 13M = 323$$

despejando *H* obtenemos:

$$H = \frac{323 - 13M}{19}$$

Tomando en cuenta que 323 es divisible entre 19, entonces 13*M* tiene que ser múltiplo de 19 y menor que 323, lo cual se cumple sólo para *M* = 19. En consecuencia *H* = 4. **<u>Así pues al parque entraron 19 niñas y 4 niños.</u>**

<u>Preselectivo de Matemáticas 2000</u>

Los siguientes *<u>seis</u>* problemas fueron aplicados en el **Concurso Preselectivo** de Matemáticas realizado dentro del marco del **XXXII CONCURSO REGIONAL DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS**, realizado en la Universidad de Sonora durante el mes de mayo de 2000.

Problema 9. En la Biblioteca, un tercio de los libros son de Matemáticas, hay 30 libros de Español, 24 de Ciencias Sociales y hay tantos libros de Ciencias Naturales como de Español. ¿Cuántos libros de Matemáticas hay?.

Solución:
Sea T = Total de libros, M = No. de libros de Matemáticas.

$$30 + 24 + 30 + T/3 = T \Rightarrow T = 126.$$

$$\text{Como } T/3 = M \Rightarrow M = 42.$$

Problema 10. En un gimnasio hay 35 filas con 45 casilleros cada una, numerados de izquierda a derecha y hacia arriba. ¿En qué fila y en qué columna se encuentra el casillero número 827?.

Solución: Considérese la siguiente ilustración para los casilleros.

etc	etc	etc		etc
...	...	...	...	...
136	etc	etc		etc
91	92	93		135
46	47	48		90
1	2	3		45

Obsérvese que para localizar la columna en que se encuentre un casillero, basta encontrar el residuo que deja ese número al dividirse entre 45, es decir, el casillero No. 827 se encontrará en la columna No. 17, pues $827 = (45)(18) + 17$.

Asimismo para localizar la fila, el cociente incrementado en una unidad nos da el número de la fila en que se encuentra, en este caso en la fila número 19.

Por lo tanto el casillero 827 se encuentra el la fila No. 19 y columna No. 17

Problema 11. Al aumentar en la misma proporción la longitud de los lados de un cuadrado, su área aumenta un 69%. ¿En qué porcentaje aumenta su lado?.

Solución:

Sea a = lado del cuadrado inicial, y a' el lado del cuadrado incrementado.

Si el área se incrementa un 69%, entonces el área incrementada será

$$a^2 + \frac{(a^2)(69)}{100}$$

por lo que

$$a' = \sqrt{a^2 + \frac{(a^2)(69)}{100}} = a\sqrt{1 + \frac{69}{100}} = a\sqrt{\frac{169}{100}} = \frac{13a}{10}$$

Como a, se incrementó a 13a/100, si le llamamos x al porcentaje de aumento, entonces

$$a + \frac{ax}{100} = \frac{13a}{100} \quad \Rightarrow \quad x = 100(\frac{13}{10} - 1) = 100(\frac{3}{10}) = 30$$

En consecuencia, el lado se incrementó un 30%

<u>Problema 12</u>. En un concurso de Matemáticas, 3 problemas, *A*,*B*,*C* son propuestos. Los 25 participantes resuelven al menos un problema cada uno. De todos los que no resolvieron *A*, el número de estudiantes que resolvieron *B* es el doble de los que resolvieron *C*. El número de estudiantes que resolvieron sólo *A* es uno más que el número de estudiantes que resolvieron *A* y al menos otro problema. De todos los estudiantes que resolvieron justo un problema, la mitad no resuelve el *A*. ¿Cuántos estudiantes resuelven sólo *B*?.

Solución:
Sean *a,b,c, ab, bc, ac y abc* el número de estudiantes que resolvieron sólo *A, B, C,* *A* y *B*, *B* y *C*, *A* y *C*, *A* y *B* y *C*, respectivamente.

Observación: <u>*xy* no significa el producto de *x* con *y*, sino el No. de alumnos que resolvieron simultáneamente el problema *X* y el problema *Y*.</u>

$bc = b - 2c$,

$a - 1 = ab + ac + abc$

$a = b + c$

$a + b + c + ab + ac + bc + abc = 25$

de aquí tenemos que:

$bc = 26 - 3a \Rightarrow a \leq 8$,

pero $bc = b - 2c = a - 3c \Rightarrow 4a - 3c = 26$, pero $c \leq 2$, para que a sea entero es necesario que $c = 2$, luego $a = 8$ y por lo tanto $b = 6$.

Finalmente sólo 6 alumnos resolvieron únicamente el problema *B*.

<u>Problema 13.</u> Hallar los dígitos a y b tales que el número de 5 cifras $2a4b2$ es múltiplo de 9. Dar todas las posibilidades.

Solución:
Como $2a4b2$ es múltiplo de 9, la suma de sus dígitos también lo es, es decir,

$$8 + a + b = 9k \qquad a, b \in \{ 0,1,2, \ldots , 9 \}$$

lo cual nos lleva a las siguientes dos posibilidades para $a + b$:

1. $a + b = 1 \Rightarrow (a , b)$ es (0 , 1) ó (1, 0) obteniendo los números:

20412 y 21402

2. $a + b = 10 \Rightarrow$ (a , b) es (9, 1), (1, 9) , (8, 2), (2, 8) , (7, 3), (3, 7), (4, 6), (6, 4) , (5, 5) obteniendo los números:

29412, 21492, 28422, 22482, 27432, 23472, 24462, 26442 y 25452

Problema 14. Escribe todos los números mayores que 6,000 y menores que 10,000 que tienen el producto de sus dígitos igual a 343.

Solución.
Como la factorización de $343 = 7^3$ y los números buscados son de cuatro cifras, las únicas posibilidades son:

7771, 7717 y 7177

Problemas diversos de Álgebra y Teoría de Números

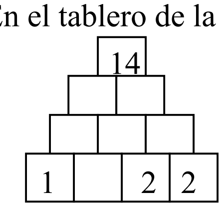
Problema 15. ¿Cuántas cifras tiene el número $2^{35} \times 5^{38}$?

Solución.

$$2^{35} \times 5^{38} = 2^{35} \times 5^{35} \times 5^{3} = 10^{35} \times 125 = 125000...0$$

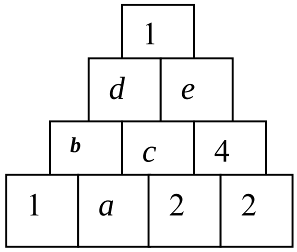
125 con 35 ceros al final nos dan 38 cifras.

Problema 16 En el tablero de la figura hay cuatro casillas ocupadas



Escribir en cada una de las casillas vacías un número (no necesariamente entero) de modo que una vez completo el tablero con los 10 números, se verifique que el número escrito en cada casilla sea igual a la suma de los dos números escritos en las dos casillas sobre las que está apoyada.

Solución.
Llamémosles a al número faltante en la casilla de la última fila.



El resto de las casillas faltantes las podemos escribir el términos de a, obteniendo $a = 5/3$ y en consecuencia $b = 8/3$, $c = 11/3$, $d = 19/3$ y $e = 23/3$

Problema 17. Escrito el triángulo aritmético:

0 1 2 3 4 .... 1991 1992 1993
.
1 3 5 7 .... 398 3985
.. 3
4 8 12 796
. 8
....

donde cada número es la suma de los dos que tiene encima (cada fila tiene un número menos y en la última sólo hay un número). Razonar que el último número es múltiplo de 1993.

Solución.
Si representamos los elementos de la primera fila por a_0, a_1, a_2, ...
los elementos de la segunda serán: $a_0 + a_1$, $a_1 + a_2$, $a_2 + a_3$, ...
los de la tercera serán : $a_0 + 2a_1 + a_1$, $a_1 + 2a_2 + a_3$, ...
para la cuarta : $a_0 + 3a_1 + 3a_1 + a_1$, $a_1 + 3a_2 + 3a_3 + a_4$,............
Supongamos que los dos primeros elementos $b_{p,0}$ y $b_{p,1}$ de la fila p-ésima son:

$$b_{p,0} = \binom{p-1}{0}a_0 + \binom{p-1}{1}a_1 + \ldots\ldots + \binom{p-1}{p-1}a_{p-1} \quad ;$$

$$b_{p,1} = \binom{p-1}{0}a_1 + \binom{p-1}{1}a_2 + \ldots\ldots + \binom{p-1}{p-1}a_p$$

entonces, el primer elemento de la fila siguiente será :

$$b_{p+1,0}=\binom{p}{0}a_0+\binom{p}{1}a_1+.......+\binom{p}{p}a_p \qquad (*)$$

en nuestro caso la primera fila tiene 1994 elementos, la segunda 1993, ... y la última corresponde a p + 1 = 1994 y su único elemento será

$$b_{1994}=\binom{1993}{0}\bullet 0+\binom{1993}{1}\bullet 1+.......+\binom{1993}{1993}\bullet 1993$$

Al ser 1993 primo, $\binom{1993}{k}$ es múltiplo de 1993 para todo k menor que 1993 y por tanto b_{1993} es múltiplo de 1993.

Problema 18. Demostrar que si entre los infinitos términos de una progresión aritmética de números enteros positivos hay un cuadrado perfecto, entonces infinitos términos de la progresión son cuadrados perfectos.

Solución

Bastará probar que a partir de un cuadrado perfecto podemos construir otro. Sea la progresión:

$$a^2,\ a^2+d,\ a^2+2d,\ ......,a^2+kd......$$

Como $(a+d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 = a^2 + (2a+d)d$, basta tomar $k = 2a + d$ para obtener otro cuadrado en la progresión.

Problema 19. Los números naturales a y b son tales que: $\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$ es entero.

Demostrar que el máximo común divisor de a y b no es mayor que $\sqrt{a+b}$

Solución:

Se tiene:

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}=\frac{a^2+b^2+a+b}{ab}.$$

Sea d = m.c.d (a,b). Como ab es divisible por d^2, entonces a^2+b^2+ab es divisible por d^2 y también lo son $a^2 + b^2$ y $a + b$, y al ser a y b naturales, se tiene :

$$a+b\ge d^2\Leftrightarrow\sqrt{a+b}\ge d$$

Problema 20. Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1, y que la suma de los términos de lugar par vale +1.

Solución:

Sea la progresión a, $a+d$, $a+2d$, ..., $a+99d$, entonces tenemos que hallar:

$S = a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 + \ldots + (a + 99d)^2 = 100a^2 + 2ad\,(1 + 2 + \ldots + 99) + d^2\,(1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2)$.

Para calcular a y d resolvemos el sistema: $\begin{cases} (a+a+99d)50=-1 \\ (a+d+a+99d)25=1 \end{cases}$ que operado y resuelto sale:
a = -2,98; d = 0,06.
El resto es fácil de calcular. Los paréntesis son progresiones de primer y segundo orden.

$$1 + 2 + \ldots + 99 = 4950; \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2 = 328350.$$

El resultado final es $S = 299{,}98$

<u>Problema 21</u>. Sea p un número primo. Determinar todos los enteros $k \in Z$ tales que $\sqrt{k^2 - kp}$ es natural.

Solución: Pongamos $\sqrt{k^2 - kp} = n \Leftrightarrow k^2 - pk - n^2 = 0 \Rightarrow k = \dfrac{p \pm \sqrt{p^2 + 4n^2}}{2}(1)$.
El radicando ha de ser cuadrado perfecto, llamémosle a. Se tiene:

$$p^2 + 4n^2 = a^2 \Leftrightarrow p^2 = (a+2n)(a-2n).$$

Como p es primo y $a + 2n \geq a - 2n$, sólo hay dos posibilidades:
1) $a + 2n = p^2$ y $a - 2n = 1$
2) $a + 2n = p$ y $a - 2n = p$
En el caso 1) $a = \dfrac{p^2+1}{2}$; $n = \dfrac{p^2-1}{4}$, lo que exige $p \neq 2$ (n natural).
En el caso 2) resulta $a = p$; $n = 0$.
Sustituyendo los valores de a en (1) y operando queda:
Si $p = 2$, entonces $k = 2$ o $k = 0$
Su $p \neq 2$ entonces quedan los cuatro valores:

$$k_1 = \left(\frac{p+1}{2}\right)^2, k_2 = -\left(\frac{p-1}{2}\right)^2, k_3 = p, k_4 = 0$$

<u>Problema 22</u>.(Olimpiada Nacional España, 1998) Hallar todos los números naturales de 4 cifras, escritos en base 10, que sean iguales al cubo de la suma de sus cifras.

Solución:
Sea n un número verificando el enunciado, y s la suma de sus cifras.
Como $1000 \leq n \leq 9999$ y $n = s^3$, resulta

$$11 \leq s \leq 21 \qquad (1)$$

Si $n = xyzt$, tenemos:

$$1000x + 100y + 10z + t = s^3 \qquad (2)$$
$$x + y + z + t = s$$

restando queda:

$$999x + 99y + 9z = s^3 - s \qquad (3)$$

cuyo segundo miembro ha de ser múltiplo de 9 (por serlo el primero) y, habida cuenta de que

$$s^3 - s = (s - 1)\, s\, (s + 1)$$

y por (1), sólo hay tres valores de $s^3 - s$ que son múltiplos de 9:

$$16 \cdot 17 \cdot 18; \quad 17 \cdot 18 \cdot 19 \ \text{ y } \ 18 \cdot 19 \cdot 20$$

sustituimos en (3) y analizamos cada caso.

1º

$$999x + 99y + 9z = 16 \cdot 17 \cdot 18 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 544$$

resulta inmediatamente $x = 4$; $y = 9$; $z = 1$, valores que llevados a (2) con $s = 17$ se obtiene $t = 3$ y finalmente $n = 4913$

2º

$$999x + 99y + 9z = 17 \cdot 18 \cdot 19 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 646$$

de donde $x = 5$; $y = 8$; $z = 3$, valores que llevados a (2) con $s = 18$ se obtiene $t = 2$ y finalmente
$n = 5832$

3º

$$999x + 99y + 9z = 18 \cdot 19 \cdot 20 \Leftrightarrow 111x + 11y + z = 760$$

resulta $x = 6$; $y = 8$; $z = 6$, valores que llevados a (2) con $s = 19$ resulta una contradicción.

Resumiendo, las únicas soluciones son

4913 y **5832**

***Problema 23*.** Hallar todas las funciones $f : N \to N$ estrictamente crecientes y tales que:

$$f(n + f(n)) = 2\, f(n)$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Solución:

Supongamos $f(1) = b$. Entonces, $f(1 + b) = 2b$, como f es estrictamente creciente, se tiene:

$$b = f(1) < f(1 +1) < \ldots < f(1+b) = 2b = b + b.$$

y resulta que $f(1), f(2),\ldots f(1+ b)$ son $b + 1$ naturales, distintos, el primero vale b y el último $2b$, por tanto han de ser consecutivos.
resulta entonces:

$$f(1) = b,\ f(2) = 1 + b,\ f(3) = 2 + b,\ldots\ldots,\ f(1 + b) = b + b.$$

En general, para $n > 1$, si $f(n) = c$, $f(n + c) = 2c = c + c$ y resulta que:

$c = f(n) < f(n + 1) < \ldots < f(n + c) = c + c$ y los números $f(n), f(n + 1), \ldots, f(n + c)$ son consecutivos.
Así pues,

$$f(n) = n - 1 + f(1)$$

Problema 24 (*Olimpiada Nacional España, 2000*)
Demuestra que no existe ninguna función $\boldsymbol{f} : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ que cumpla: $f(f(n)) = n+1$.

Solución.
Supongamos que exista $f : N \to N \mid f\left(f\left(n\right)\right) = n+1$.
Se tiene que $f(0) = a \in N$. Por el enunciado:

$$f\left(f\left(0\right)\right) = 1; \quad f\left(f\left(0\right)\right) = f\left(a\right) = 1$$

del mismo modo, $f(1) = a + 1$, $f(a + 1) = 2$, $f(2) = a + 2$,........
Supongamos que $f(n - 1) = a + n - 1$, entonces $f(a + n -1) = a + n$ luego hemos probado por inducción que

$$f\left(\left(n\right)\right) = f\left(a+n\right) = 2a+n$$

entonces,

$$2a+n = n+1 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \notin N$$

hemos llegado a una contradicción y la condición supuesta es falsa con lo que queda demostrado la inexistencia de la función f.

Problema 25. (Olimpiada Nacional España, 1999)
Probar que existe una sucesión de enteros positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ tal que

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2$$

es un cuadrado perfecto para todo entero positivo n.

Solución:
Lo haremos por inducción sobre n, para n = 2 basta tomar $a_1 = 3$; $a_2 = 4$ con $3^2 + 4^2 = 5^2$.

Supongamos que $a_1^2 + a_2^2 + \ldots\ldots + a_n^2 = k^2$. Veamos que podemos encontrar un entero positivo a_{n+1} tal que $k^2 + a_{n+1}^2 = p^2$.

En efecto, $k^2 = p^2 - a_{n+1}^2 = (p + a_{n+1})(p - a_{n-1})$.

Pongamos $a = p + a_{n+1}$; $b = p - a_{n+1}$.

Tenemos: $p = \dfrac{a+b}{2}$; $a_{n+1} = \dfrac{a-b}{2}$; $k^2 = ab$.

La última expresión exige que a y b son de la misma paridad. Distinguiremos dos casos

1.- a y b son pares, entonces $k^2 = 4m$. Tomado $a = 2m$; $b = 2$ queda:

$$p = m + 1 = \frac{k^2}{4} + 1; \quad a_{n+1} = m - 1 = \frac{k^2}{4} - 1$$

2.- a y b son impares, entonces $k^2 = 2m + 1$. Tomando $a = 2m + 1$, $b = 1$ queda:

$$p = m + 1 = \frac{k^2 - 1}{2} + 1; \quad a_{n+1} = m = \frac{k^2 - 1}{2}$$

En ambos casos hemos encontrado a_{n+1} entero verificando el enunciado.

<u>Problema 26</u>. Calcular la suma de los cuadrados de los cien primeros términos de una progresión aritmética, sabiendo que la suma de ellos vale -1, y que la suma de los términos de lugar par vale +1.

Solución

Sea la progresión a, $a + d$, $a + 2d$, ..., $a + 99d$, entonces tenemos que hallar:

$S = a^2 + (a + d)^2 + (a + 2d)^2 + \ldots + (a + 99d)^2 = 100a^2 + 2ad\,(1 + 2 + \ldots + 99) + d^2\,(1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2)$.

Para calcular a y d resolvemos el sistema: $\begin{cases} (a + a + 99d)50 = -1 \\ (a + d + a + 99d)25 = 1 \end{cases}$ que operado y resuelto sale:

$a = -2{,}98$; $d = 0{,}06$.

El resto es fácil de calcular. Los paréntesis son progresiones de primer y segundo orden.

$$1 + 2 + \ldots + 99 = 4950; \quad 1^2 + 2^2 + \ldots + 99^2 = 328350.$$

El resultado final es $S = 299{,}98$

<u>Problemas de Congruencias</u>

<u>Problema 27.</u> Demuestre que si $(n,7) = 1$ entonces $7 \mid (n^{12} - 1)$

Solución: Obsérvese que no podemos aplicar directamente el teorema de Fermat pues $n^{13-1} \equiv 1 \pmod{13}$ y lo que queremos es congruencia módulo 7.

Si $(n,7) = 1$, entonces 7 no divide al entero n , y por el teorema de Fermat $n^{7\text{-}1} \equiv 1 \ (\text{mod}_7)$ Es decir $n^6 \equiv 1 \ (\text{mod}_7)$. Si elevamos al cuadrado en ambos miembros de la congruencia, tendremos que $(n^6)^2 \equiv (1)^2 \ (\text{mod}_7)$, es decir $n^{12} \equiv 1 \ (\text{mod}_7)$, lo cual significa que $7 \mid (n^{12} - 1)$.

<u>Problema 28</u>. Determine para que enteros positivos n, $2^n - 1$ es divisible por 7.
Solución: Si $n = 3k$ por lo siguiente:

a) Si $n = 3k \Rightarrow 2^n = (2^3)^k = 8^k \equiv 1^k \equiv 1 \ (\text{mod}_7) \Rightarrow 7 \mid (2^n - 1)$
b) $n = 3k + 1 \Rightarrow 2^n = (2^3)^k (2) = 8^k (2) \equiv 2 \ (\text{mod}_7)$.
c) $n = 3k + 2 \Rightarrow 2^n \equiv 4 \ (\text{mod}_7)$

<u>Problema 29</u>. Pruebe que $2^n + 1$ nunca es divisible por 7.
Solución: Del ejercicio anterior se observa que para cualquier entero n, $2^n \equiv 1$ ó 2 ó 4 (mod_7) y por lo tanto 2^n no es congruente con -1 módulo 7 y como $-1 \equiv 6 \ (\text{mod}_7)$,
2^n no es congruente con 6 módulo 7 y en consecuencia $2^n + 1$ no podrá ser congruente con 7 módulo 7.

<u>Problema 30.</u> Demuestre que si 5 no es un divisor de n, entonces $n^8 \equiv 2001 (\text{mod}_5)$.
Solución: Por el teorema de Fermat, $n^6 \equiv 1 \ (\text{mod}_7)$, y $1 \equiv 1996 \ (\text{mod}_7)$

<u>Problema 31.</u> Demuestre que la suma de los cubos de tres enteros consecutivos es congruente con cero módulo 9.
Solución: Sean $(n\text{-}1)$, n y $(n+1)$ los tres enteros consecutivos.

$$(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 = n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1 = 3n^3 + 6n = 3n(n^2 + 2)$$

a) Si $3|n$ entonces $9 \mid 3n$ y por lo tanto $9|3n(n^2 + 2)$.
b) Si $3 \nmid n$ entonces $n = 3k + 1$ ó $n = 3k + 2$

$n = 3k + 1 \Rightarrow n^2 + 2 = 9k^2 + 9k + 3$ y por lo tanto $3|(n^2 + 2)$.
$n = 3k + 2 \Rightarrow n^2 + 2 = 9k^2 + 12k + 6$ y por lo tanto $3|(n^2 + 2)$.

Y en cualquier caso se cumple que $9 \mid 3n(n^2 + 2)$.

<u>Problema 32.</u> Determine para que enteros positivos n, $2^n + 1$ es divisible por 3.
Solución: $2 \equiv -1 \ (\text{mod}_3) \Rightarrow 2^n \equiv (-1)^n \ (\text{mod}_3) \Rightarrow 2^n + 1 \equiv (-1)^n + 1 \ (\text{mod}_3)$ y como $(-1)^n + 1 \equiv 0 \ (\text{mod}_3)$ si y sólo si n es impar, $2^n + 1$ es divisible por 3 si y sólo si n es impar.

<u>Problema 33</u>. Demuestre que

$$3^n \equiv \begin{cases} 3 \ (\text{mod}_5) & si \quad n \equiv 1 \ (\text{mod}_4) \\ 4 \ (\text{mod}_5) & si \quad n \equiv 2 \ (\text{mod}_4) \\ 2 \ (\text{mod}_5) & si \quad n \equiv 3 \ (\text{mod}_4) \\ 1 \ (\text{mod}_5) & si \quad n \equiv 0 \ (\text{mod}_4) \end{cases}$$

Solución: Probaremos sólo la primera, el resto se deja como ejercicio,

$n \equiv 1 \, (mod_4) \Rightarrow 4|(n-1) \Rightarrow n-1 = 4k$ y como $3^4 \equiv 1 \, (mod_5)$, entonces
$(3^4)^k \equiv 1 \, (mod_5) \Rightarrow (3^{4k})(3) \equiv (1)(3) \, (mod_5)$, es decir, $3^{4k+1} \equiv 3 \, (mod_5)$, probándose de esta manera que :

$$n \equiv 1 \, (mod_4) \;\; \Rightarrow \;\; 3^n \equiv 3 \, (mod_5)$$

Problema 34. Demuestre que si m es un entero, entonces

$$m^2 \equiv 0,1,4 \;\; (mod_8)$$

es decir, el cuadrado de todo entero, al dividirse entre 8 deja como posibles residuos 0, 1 ó 4.
Solución: Todo entero m es de la forma

$$m = 8k + r \quad \text{donde } r = 0,1,2,...,7$$
$$m^2 = 64k^2 + 16kr + r^2$$

es decir,

$$m^2 \equiv r^2 \, (mod_8)$$

donde r^2 toma los valores 0,1, 4, 9,16, 25, 36, 49
pero como $9 \equiv 1 \, (mod_8)$, $16 \equiv 1 \, (mod_8)$, $25 \equiv 1 \, (mod_8)$, $36 \equiv 4 \, (mod_8)$ y $49 \equiv 1 \, (mod_8)$, concluimos $m^2 \equiv 0,1,4 \;\; (mod_8)$

Problema 35. Pruebe que $3^{308} + 2^{308}$ es múltiplo de 97.
Solución. Como 308 = (4)(77) y $3^4 + 2^4 = 97$, se tiene que

$$3^4 \equiv -2^4 \, (mod_{\,97})$$

elevando en ambos lados a la potencia impar 77, obtenemos:

$$(3^4)^{77} \equiv (-2^4)^{77} \, (mod_{\,97})$$

es decir $3^{308} \equiv -2^{308} \, (mod_{\,97})$ y en consecuencia
97 es un divisor de $3^{308} + 2^{308}$.

Problema 36. (*Olimpiada Nacional España, 2001*)
Los números enteros desde 1 hasta 9 se distribuyen en las casillas de una tabla 3x3. Después se suman seis números de tres cifras: los tres que se leen en filas y los tres que se leen en columnas.
¿Hay alguna distribución para la cual el valor de esa suma sea 2001?

Solución
Consideremos la distribución:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Resulta:

$$S = abc + def + ghi + adg + beh + cfi =$$
$$100\,(a + c + b + a + d + g) + 10(d + e + f + b + e + h) + (g + h + i + c + f + i) =$$
$$200\,a + 110b + 101c + 110d + 20e + 11f + 101g + 11h + 2i$$

Módulo 9 tenemos:

$$S \equiv 2(a + b + c+....h + i) \equiv 90 \equiv 0$$

Como 2001 no es múltiplo de 9, no habrá ninguna distribución para la que la suma indicada tome el valor 2001.

Problema 37. Demuestre que para todo entero no negativo n, 17 es un divisor de $3^{4n+2} + 2^{6n+3}$.

Solución: Para n = 0 se cumple que $3^2 + 2^3 = 17$ lo cual significa que $3^2 + 2^3 \equiv 0 \pmod{17}$ es decir $3^2 \equiv -2^3 \pmod{17}$. Si elevamos a la potencia impar 2n + 1, obtendremos

$$(3^2)^{2n+1} \equiv (-2^3)^{2n+1} \pmod{17}$$

$$3^{4n+2} \equiv -2^{6n+3} \pmod{17}$$

$$3^{4n+2} + 2^{6n+3} \equiv 0 \pmod{17}$$

lo cual significa que 17 es un divisor de $3^{4n+2} + 2^{6n+3}$.

Problema 38. Si n es un entero que no es divisible por 5, entonces al dividir $n^4 - 1991$ por 5, el residuo es cero.

Solución: Como 5 no divide a n, por el Teorema de Fermat $n^4 \equiv 1 \pmod 5$, pero como $1 \equiv 1991 \pmod 5$, entonces $n^4 \equiv 1991 \pmod 5$, o bien $n^4 - 1991 \equiv 0 \pmod 5$; lo cual significa que al dividir $n^4 - 1991$ entre 5 dejará residuo cero.

Problema 39. Sean x, y, z números enteros tales que $x^3 + y^3 - z^3$ es múltiplo de 7. Demuestre que uno de los tres números es divisible por 7.

Solución. Al dividir un entero n entre 7 deja como posibles residuos a 0,1,2,3,4,5 y 6, es decir , todo entero n satisface:

$$n \equiv r \pmod 7 \text{ con } r \in \{0,1,2,..,6\}$$

y en consecuencia el cubo satisfará:

$$n^3 \equiv r^3 \pmod 7 \text{ con } r \in \{0,1,2,..,6\}$$

pero los cubos de estos residuos son congruentes módulo 7 con 0, 1 ó -1 (Verifíquelo).
Así pues para cualquier entero n se cumple:

$$n^3 \equiv 0, 1 \text{ ó } -1 \pmod 7$$

Si ninguno de los números x, y, z fuera divisible por 7, entonces

$$x^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$$
$$y^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$$
$$z^3 \equiv \pm 1 \pmod 7$$

y como ninguna combinación de tres números del conjunto {1,-1} da cero, $x^3 + y^3 - z^3$ no podrá se congruente con cero módulo 7 y por lo tanto no sería divisible por 7, en consecuencia por lo menos uno de los tres números debe ser divisible por 7.

Problema 40. ***(Olimpiada Nacional Mexicana)*** Demuestre que para todo entero no negativo n, se cumple que $(n^3-n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ es múltiplo de 3804.

Solución:

Como n^3-n = (n - 1)(n)(n + 1), es múltiplo de 6 y el número $5^{8n+4} + 3^{4n+2}$ es par, por ser suma de impares, y 3804 = sólo restaría probar que 317 | $(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$, lo cual es completamente análogo al ejercicio No. 12 y se deja como ejercicio al lector.

Problema 41. Encuentre un número que al dividirse por 10 deja residuo 10, al dividirse por 9 deja residuo 8 y así sucesivamente hasta que al dividirse por dos deje residuo 1.

Solución: Tal número N debe cumplir lo siguiente:

$N \equiv 9\ (mod_{10})$	pero como	$9 \equiv -1\ (mod_{10})$	$\Rightarrow$	$N \equiv -1\ (mod_{10})$
$N \equiv 8\ (mod_9)$	“ “	$8 \equiv -1\ (mod_9)$	$\Rightarrow$	$N \equiv -1\ (mod_9)$
$N \equiv 7\ (mod_8)$	“ “	$7 \equiv -1\ (mod_8)$		
.				
.				
.				
$N \equiv 1\ (mod_2)$	“ “	$1 \equiv -1 (mod_2)$	$\Rightarrow$	$N \equiv -1\ (mod_2)$

De las últimas congruencias a satisfacerse por N tenemos que :
N+1 debe ser múltiplo de 2,3,4,5,6,7,8,9 y 10, siendo el menor de esos números
N+1 = (10)(9)(4)(7) = 2520 y por lo tanto el número buscado es **N = 2519.**

Problema 42. - Demostrar que para todo número primo p distinto de 2 y de 5, existen infinitos múltiplos de p de la forma 1111......1 (escrito sólo con unos).

Solución

Veamos primero que p tiene infinitos múltiplos de la forma 999...9. Consideremos la sucesión: 9, 99, 999, ...,999...9 (el último tiene n nueves). Entonces se tiene:

$$9 = 10 - 1;\ 99 = 10^2 - 1;\ \ 999 = 10^3 - 1; ....999..9 = 10^n - 1$$

en la sucesión hay infinitos términos de la forma $10^{p-1} - 1$ con $p \neq 2$, $p \neq 5$ y p primo.
Puesto que, por el teorema de Fermat: $10^{p-1} - 1 \equiv 0$ (mód p) si $p \neq 2$, $p \neq 5$ la afirmación queda demostrada.
Finalmente 999...9 = 9 · 111...1 entonces si p es primo con 9 ($p \neq 3$), p divide al producto, es primo con 9 luego divide a 111...1.
Queda el caso p = 3 que es evidente ya que los infinitos números: 111; 111111, ... son múltiplos de tres.

Problema 43. *(Olimpiada Internacional)* Encontrar el número natural N más pequeño que cumple las siguientes condiciones:

a) En la representación decimal, termina en 6.
b) Si el 6 es trasladado al principio del número, el resultado es 4N.

Solución: Al número N lo podemos expresar de la forma

N = 10y + 6	por ejemplo abc6 = (abc)(10) + 6
$6(10^m) + y = 4(10y + 6)$	“ “ “ $6abc = 6(10^3) + abc = 4(abc0) + 6$
$6(10^m) - 24 = 39y$	

Lo cual significa que $6(10^m) \equiv 24\ (mod_{39})$.

Es decir al dividir 600...0 (m ceros) deja residuo 39, y tal número es 600,000, pues

```
                  15384
             39 | 600000
     210
        150
          330
            180
            24
```

En consecuencia **N = 153,846**.

Problema 44. *(Olimpiada Nacional)* Una oficina de Turismo va a realizar una encuesta sobre número de días soleados y número de días lluviosos que se dan en el año. Para ello recurre a seis regiones que le transmiten los datos de la siguiente tabla:

Región	Soleados o lluviosos	Inclasificables
A	336	29
B	321	44
C	335	30
D	343	22
E	329	36
F	330	35

La persona encargada de la encuesta no es imparcial y tiene esos datos más detallados. Se da cuenta de que, prescindiendo de una de las regiones, la observación da un número de días lluviosos que es la tercera parte del de días soleados. Razonar cuál es la región de la que prescindirá.

Solución:

Al suprimir una región, la suma de días soleados o lluviosos de las restantes ha de ser múltiplo de 4. Las seis regiones suman 1994 que dividido entre 4 da resto 2. El único dato de esta columna que da resto 2 al dividirlo entre 4 es 330 correspondiente a la región F.

En términos de congruencias tenemos que:

$$\begin{array}{c} 336 \equiv 0 \pmod 4 \\ 321 \equiv 1 \pmod 4 \\ 335 \equiv 3 \pmod 4 \\ 343 \equiv 3 \pmod 4 \\ 329 \equiv 1 \pmod 4 \\ 330 \equiv 2 \pmod 4 \\ \hline 1994 \equiv 10 \pmod 4 \end{array}$$

pero como $10 \equiv 2 \pmod 4$, tenemos que $1994 \equiv 2 \pmod 4$.

Si omitimos 330, obtendremos una cantidad congruente con 0 , lo cual significa que deja residuo 0 al dividirla entre 4.
A la congruencia $1994 \equiv 2 \pmod{4}$, le restamos la congruiencia $330 \equiv 2 \pmod{4}$, obteniendo

$$1664 \equiv 0 \pmod{4}$$

En consecuencia, suprimiendo esta región (F) quedan entre las cinco restantes 416 días lluviosos y (3)(416) = 1248 días soleados.

Problema 45. Demuestre que si a es primo con 240 entonces 240 es un divisor de $a^4 - 1$.
Solución: La factorización de 240 en primos es:

$$240 = (2^4)(3)(5)$$

Así pues, debemos probar que $2^4 \mid a^4 - 1$, $3 \mid a^4 - 1$, $5 \mid a^4 - 1$
Claramente, por el teorema de fermat, $3 \mid a^4 - 1$ y $5 \mid a^4 - 1$
Como $(a, 240) = 1$ y 2 es un factor de 240, 2 no puede ser un factor de a y en consecuencia $a = 2k + 1$ $\Rightarrow a^2 = 4k^2 + 4k + 1$ es decir $a^2 - 1 = 4k(k + 1)$ y como $k(k + 1)$ es par $\Rightarrow 8 \mid a^2 - 1$.
Por otro lado como a es impar, a^2 también es impar y por lo tanto $a^2 + 1$ es par
$8 \mid a^2 - 1$ y $2 \mid a^2 - 1 \Rightarrow 2^4 \mid a^4 - 1$.

Problema 46. ***(Concurso Nacional)*** Pruebe que $n^{n-1} - 1$ es divisible por $(n-1)^2$ para todo entero $n > 1$.
Solución:

$$n^{n-1} - 1 = (n-1)(n^{n-2} + n^{n-3} + \ldots + n + 1)$$

Como $n \equiv 1 \pmod{n-1}$, se tiene que $n^k \equiv 1 \pmod{n-1}$, para todo entero positivo k.
Así $(n^{n-2} + n^{n-3} + \ldots + n + 1) \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 \equiv n-1 \pmod{n-1}$
y por lo tanto, $(n-1)^2$ divide a $n^{n-1} - 1$.

Problema 47. ***(Concurso Estatal Puebla 1999)*** Probar que $1^{1999} + 2^{1999} + 3^{1999}$ es divisible por 11

Solución: Tomando en cuenta que $2^5 = 32$ y que $3^5 = 243$, entonces

$$2^5 \equiv -1 \pmod{11} \quad y \quad 3^5 \equiv 1 \pmod{11}$$

Elevando ambas congruencias a la potencia 399, tendremos

$$(2^5)^{399} \equiv -1 \pmod{11} \quad y \quad (3^5)^{399} \equiv 1 \pmod{11}$$

$$\text{es decir} \quad 2^{1995} \equiv -1 \pmod{11} \quad y \quad 3^{1995} \equiv -1 \pmod{11}$$

$$\text{y} \quad 2^4 \bullet 2^{1995} \equiv -16 \equiv -5 \pmod{11} \quad y \quad 3^4 \bullet 3^{1995} \equiv 81 \equiv 4 \pmod{11}$$

lo cual nos lleva

$$2^{1999} \equiv -5 \pmod{11}, \quad 3^{1999} \equiv 4 \pmod{11} \quad y \quad 1^{1999} \equiv 1 \pmod{11}$$

y en consecuencia $1^{1999} + 2^{1999} + 3^{1999} \equiv 0 \pmod{11}$
lo cual significa que que $1^{1999} + 2^{1999} + 3^{1999}$ es divisible por 11

Problema 48. Justifique, utilizando congruencias, el procedimiento descrito a continuación para adivinar un número.

Diga a alguien que seleccione un número entero menor que 1000, que lo divida entre 7, 11 y 13 y proporcione los tres residuos de la división. Usted podrá entonces decirle que número seleccionó originalmente. Esto se hace multiplicando los tres residuos respectivamente por los “números mágicos” 715, 364 y 924, sumando los productos resultantes y restando de la suma el mayor múltiplo de 1001 que deje una diferencia positiva. <u>**Esta diferencia es el número seleccionado.**</u>
Ejemplo: Si el número en cuestión es 523, los residuos son 5,6 y 3 respectivamente y usted escribiría:

$$
\begin{array}{r}
715*15 = 3575 \\
364*6 = 2184 \\
924*3 = \underline{2772} \\
8531
\end{array}
$$

El múltiplo de 1001 más cercano menor que 8531 es el 8008 y al restarlos obtenemos 523.
<u>**Solución:**</u> Sea *x* el número desconocido seleccionado, a, b y c los respectivos residuos cuando x es dividido entre 7, 11 y 13 respectivamente, entonces:

$$
\begin{array}{lll}
x \equiv a \pmod{7} & y & 715x \equiv (715)a \pmod{7} \\
x \equiv b \pmod{11} & y & 364x \equiv (364)b \pmod{11} \\
x \equiv c \pmod{13} & y & 924x \equiv (924)a \pmod{13}
\end{array}
$$

restando de ambos miembros de cada congruencia, tenemos

$$
\begin{array}{ll}
715(x-a) \equiv 0 \pmod{7} & (1) \\
364(x-b) \equiv 0 \pmod{11} & (2) \\
924(x-c) \equiv 0 \pmod{13} & (3)
\end{array}
$$

Como la congruencia (1) es divisible por 11 y 13 y en consecuencia por 11, 13 y 7, ó por 1001 (1001 = 7*11*13).
Análogamente las congruencias (2) y (3) también son divisibles por 1001 y sumando, tendremos

$$2003x - (715a + 364b + 924c) \equiv 0 \pmod{1001}$$

ó equivalentemente

$$2003x \equiv 715a + 364b + 924c \pmod{1001}$$

pero como

$$2003x \equiv x \pmod{1001}$$

tenemos que

$$x \equiv 715a + 364b + 924c \pmod{1001}$$

Así pues, como pedimos que x < 1000, x dejará residuo x al dividirse entre 1001 y 715a +364b + 924c también dejará residuo x al dividirse entre 1001.

ANEXO 1

Teoría y ejercicios resueltos de Divisibilidad

Definición: Se dice que un entero b es DIVISIBLE por un entero a si existe un entero c tal que b = ac. Se escribe a | b y se dice que a es un DIVISOR de b, o que b es un múltiplo de a.

Si a | b y 0 < a < b, entonces a es un divisor propio de b.

Ejemplos:

1. 6 | 24 , pues 24 = (6)(4) en este caso c = 4.
2. 3 | -21, pues -21 = (3) (-7) en este caso c = -7.
3. 5 | 5, pues 5 = (5)(1) en este caso c = 1.
4. a | 0 , para cualquier entero a, pues 0 = (a)(0), en este caso c = 0.

Ejercicio 1. Encuentre el número de divisores positivos de 48 y 300 respectivamente.
Solución.

a). Los divisores positivos de 48 los podemos enlistar fácilmente:
1,2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, y 48, así pues hay 10 divisores positivos de 48

b) Los divisores de 300 también los podriamos enlistar, solamente que sería muy tedioso. Lo haremos de otra manera:

Expresando a 300 como un producto de primos:

$$300 = 2^2 \text{ x } 3 \text{ x } 5^2$$

Obsérvese que todo divisor de 300 será de la forma:
$2^p \text{ x } 3^q \text{ x } 5^r$ con $p = 0, 1$ ó 2; $q = 0,$ ó 1 y $r = 0, 1$ ó 2.
Es decir a p lo podemos escoger de tres formas, a q de dos y a r de tres. Por el principio fundamental del conteo, los posibles divisores de 300 serán 3 x 2 x 3 = 18.

Observe que este procedimiento puede utilizarse para el caso anterior, ó bien en cualquier otro caso.

Ejercicio 2. ¿Cuántos enteros positivos dividen a 20! ?. (I Olimpiada Mexicana de Matemáticas)
Solución.
Como 20! = 1 x 2 x 3 x ... x 20
$= 1x2x3x2^2x5x2x3x7x2^3x3^2x2x5x11x2^2x3x13x2x7x3x5x2^4x17x2x3^2x19x2^2x5$
$= 2^{18} \text{ x } 3^8 \text{ x } 5^4 \text{ x } 7^2 \text{ x } 11 \text{ x } 13 \text{ x } 17 \text{ x } 19$
Se tiene que un número divide a 20! Si es de la forma $2^a \text{ x } 3^b \text{ x } 5^c \text{ x } 7^d \text{ x } 11^e \text{ x } 13^f \text{ x } 17^g \text{ x } 19^h$
Con $0 \le a \le 18$; $0 \le b \le 8$; $0 \le c \le 4$; $0 \le d \le 2$; $0 \le e, f, g, h \le 1$
Por lo que 20! Tendrá 19 x 9 x 5 x 3 x 2 x 2 x 2 x 2 = 41,040 posibles divisores.

Ejercicio 3. ¿ Cuántos enteros entre 100 y 1000 son divisibles entre 7 ?
Solución.
Los enteros divisibles entre 7 son los de la forma 7k donde k es cualquier entero.

$$100 < 7k < 1000 \quad \Rightarrow \quad \frac{100}{7} < k < \frac{1000}{7} \quad \Rightarrow \quad 14.2 < k < 142.8$$

Así pues k debe satisfacer: $15 \leq k \leq 142$, habiendo por lo tanto $(142 - 15) + 1 = 128$ múltiplos de 7 entre 100 y 1000.

Ejercicio 4. Demuestre que si n es impar , entonces $8 \mid (n^2 - 1)$.

Solución.

$n = 2k + 1 \Rightarrow n^2 - 1 = 4k^2 + 4k = 4k(k + 1)$.

Además sabemos que en dos enteros consecutivos siempre hay uno par, es decir $k(k + 1) = 2m$, y por lo tanto $n^2 - 1 = 4(2m) = 8m$, lo cual significa que es múltiplo de 8, on lo que es lo mismo 8 es un divisor de $n^2 - 1$.

A continuación enlistamos las principales propiedades de la divisibilidad:

Teorema.

a) $a \mid a$ para cualquier entero a (REFLEXIVIDAD)
b) $a \mid b$ y $b \mid c \Rightarrow a \mid c$ (TRANSITIVIDAD)
c) $a \mid b \Rightarrow a \mid bc$ para cualquier entero c.
d) $a \mid b$ y $a \mid c \Rightarrow a \mid (bx + cy)$ para cualesquiera enteros x, y.
e) $a \mid b$ y $b \mid a \Rightarrow a = \pm b$
f) $a \mid b$, $a > 0$, $b > 0 \Rightarrow a \leq b$

Demostración.

Las demostraciones de estas proposiciones se deducen inmediatamente a partir de la definición de divisibilidad y se dejan como ejercicio. A manera de ilustración, demostraremos solamente d).

Como $a \mid b$ y $a \mid c$ existen enteros r y s tales que $b = ar$ y $c = as$, en consecuencia $bx + cy = arx + asy$, es decir $bx + cy = a(rx + sy)$, y por lo tanto $a \mid (bx + cy)$.

Utilizando estos resultados, podemos deducir fácilmente algunas reglas de divisibilidad muy conocidas pero que probablemente nunca se haya visto una demostración.

Ejercicio 5. **(Regla de divisibilidad por dos)**

El entero N es divisible por 2 si el dígito de las unidades es par.

Dicho de otra manera para un entero de cuatro cifras.

N = abcd es divisible por 2 si d es divisible por 2, es decir

$$2 \mid d \Rightarrow 2 \mid N$$

Solución.

Aunque la demostración la haremos para números de 4 cifras, es válida en general.

Expresemos al entero N = abcd de la forma:

$$N = d + 10c + 100b + 1000a$$

Como 2 es un divisor de 10, 100 y 1000, por d) del teorema anterior, 2 es un divisor de $10c + 100b + 1000a$ y si $2 \mid d$ entonces, por el mismo resultado, $2 \mid (d + 10c + 100b + 1000a)$, es decir $2 \mid N$.

Ejercicio 6. **(Regla de divisibilidad por tres)**
El entero N es divisible por 3 si la suma de sus dígitos es divisible por 3.
Dicho de otra manera para un entero de cuatro cifras.
N = abcd es divisible por 3 si a + b + c + d es divisible por 3, es decir

$$3 \mid (a + b + c + d) \Rightarrow 3 \mid N$$

Solución.
Expresemos al entero N = abcd de la forma:

$$N = d + 10c + 100b + 1000a$$

Obsérvese que en este caso 3 no es divisor de las potencias de 10, pero si de ellas disminuidas en una unidad para lo cual expresamos a N de la forma:

$$N = d + 9c + c + 99b + b + 999a + a$$

Y como $3 \mid (9c + 99b + 999a)$ entonces claramente si $3 \mid (a + b + c)$ entonces por el teorema anterior, 3 dividirá a la suma de estos, la cual es N, es decir:
Si $3 \mid (9c + 99b + 999a)$ y $3 \mid (a + b + c)$ entonces $3 \mid (d + 10c + 100b + 1000a)$

Ejercicio 7. En una reunión hay 201 personas de 5 nacionalidades diferentes. Se sabe que, en cada grupo de 6, al menos dos tienen la misma edad. Demostrar que hay al menos 5 personas del mismo país, de la misma edad y del mismo sexo.
Solución:
Si en cada grupo de 6 personas, 2 son de la misma edad, sólo puede haber 5 edades diferentes, ya que, si hubiese 6 edades diferentes, eligiendo una persona de cada edad tendríamos 6 personas de edades distintas contra la hipótesis.
Como $200 = 2 \cdot 100 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 101 personas del mismo sexo.
$101 = 5 \cdot 20 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 21 personas de la misma edad y sexo.
$21 = 4 \cdot 5 + 1 \Rightarrow$ al menos hay 5 personas de la misma nacionalidad, edad y sexo.

ANEXO 2

Teoría y ejercicios resueltos de Congruencias

Con el fin de motivar el concepto de **CONGRUENCIA**, analizaremos los siguientes dos problemas.

***Ejercicio 1*.** Se tiene un edificio de dos pisos con los cuartos numerados como en la figura

1	3	5	7	9	…	.	.	.	.
Ad.	2	4	6	8	…	.	.	.	.

¿En que piso localizamos el cuarto No. 98 ?

Solución: En la planta baja, pues claramente observamos que en el primer piso están los cuartos con números impares y en la planta baja (Ad.) los de números pares.

***Problema 2*.** Se tiene un edificio de cinco pisos con los cuartos numerados como en la figura.

4	9	14	19	24	**…**	.	.	.	.
3	8	13	18	23	**…**	.	.	.	.
2	7	12	17	22	**…**	.	.	.	.
1	6	11	16	21	**…**	.	.	.	.
Ad.	5	10	15	20	**…**	.	.	.	.

¿En que piso localizamos el cuarto No. 98 ?

Solución: En el problema anterior, por su sencillez, pudimos mentalmente dividir al conjunto de los enteros (positivos) en dos clases ajenas: pares e impares. En este segundo problema tenemos que dividirlos en 5 clases ajenas y ser capaces de ubicar a cualquier entero en alguna de ellas.
Si observamos detenidamente la figura, podemos ubicar a los cuartos de la siguiente manera:

No. de Piso	**Característica**	**Forma**
Primer piso:	Múltiplos de 5	5k
Segundo piso:	Los que exceden en una unidad a un múltiplo de 5	5k+1
Tercer piso:	Los que exceden en dos unidades a un múltiplo de 5	5k+2
Cuarto piso:	Los que exceden en tres unidades a un múltiplo de 5	5k+3
Quinto piso:	Los que exceden en cuatro unidades a un múltiplo de 5	5k+4.

Después de este pequeño análisis, podemos decir que el cuarto No. 98 se encuentra en el cuarto piso, puesto que 98 = 5(19) + 3.

Obsérvese que los del primer piso son aquellos que al dividirse entre 5 dejan residuo cero, los del segundo piso son aquellos que al dividirse entre 5 dejan residuo 1 y así sucesivamente.

Si consideramos el conjunto de los enteros, con este criterio podemos dividirlos en 5 clases:
$C_0 = \{\dots, -15, -10, -5, \mathbf{0}, 5, 10, 15, \dots\}$
$C_1 = \{\dots, -14, -9, -4, \mathbf{1}, 6, 11, 16, \dots\}$
$C_2 = \{\dots, -13, -8, -3, \mathbf{2}, 7, 12, 17, \dots\}$
$C_3 = \{\dots, -12, -7, -2, \mathbf{3}, 8, 13, 18, \dots\}$
$C_4 = \{\dots, -11, -6, -1, \mathbf{4}, 9, 14, 119, \dots\}$.
La característica de la clase C_r es que al dividirse cualquiera de sus elementos entre cinco, deja residuo r.

Si dos enteros pertenecen a la misma clase, diremos que ellos son congruentes módulo 4.

En general tenemos la siguiente definición:

DEFINICIÓN.- Decimos que los enteros *a* y *b* son <u>CONGRUENTES MÓDULO m</u> , m>0 si al dividirse entre m dejan el mismo residuo, y lo denotaremos como:

$$a \equiv b \pmod{m}$$

Ejemplos. $-13 \equiv 17 \pmod{5}$ pues ambos pertenecen a C_2.
$5 \equiv 15 \pmod{5}$ pues ambos pertenecen a C_0
$8 \equiv 17 \pmod{3}$ pues al dividirse entre 3, dejan residuo 2.

PROPOSICIÓN.- $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow m \mid (b-a)$.

Demostración:
a) ($\Rightarrow$)
Si $a = mq_1 + r$ y $b = mq_2 + r$ con $0 \lneq r < m \Rightarrow b-a = m(q_2 - q_1) \Rightarrow m \mid (b-a)$.
b) ($\Rightarrow$
$m \mid (b-a) \Rightarrow b-a = mk$ para algún entero k
Por el algoritmo de la división $a = mq_1 + r_1$ y $b = mq_2 + r_2$ con $0 \lneq r_1 < m$, $0 \lneq r_1 < m$ restando estas igualdades obtenemos:
$b-a = m(q_2 - q_1) + (r_2 - r_1)$. Pero como $b-a = mk$, tenemos que $r_2 - r_1 = 0$ y por lo tanto $r_2 = r_1$, por lo que $a \equiv b \pmod{m}$

Teorema: La relación congruencia módulo m tiene las siguientes propiedades:
a) $a \equiv a$ (mod $_m$)
b) Si $a \equiv b$ (mod $_m$) entonces $b \equiv a$ (mod $_m$)
c) Si $a \equiv b$ (mod $_m$) y $b \equiv c$ (mod $_m$) entonces $a \equiv c$ (mod $_m$)

Demostración: Sólo demostraremos 3), dejando al lector el resto, como ejercicio.
Como $a \equiv b$ (mod $_m$), se tiene que m | (b-a), es decir $b\text{-}a = mk$ (*)
Análogamente como $b \equiv c$ (mod $_m$) tenemos que m | (c-b), es decir $c\text{-}b = mp$ (**)
Sumando (*) y (**) tenemos que $c\text{-}a = (b\text{-}a) + (c\text{-}b) = mk - mp = mh$
lo cual significa que $a \equiv c$ (mod $_m$).
Es de esperarse, en vista del teorema anterior, que las congruencias se comporten en muchos aspectos como igualdades. Esta semejanza queda ilustrada en el siguiente teorema:

Teorema: Sean a, b, c enteros y m entero positivo.
1. Si $a \equiv b$ (mod $_m$) entonces:
   a) $a+x \equiv b+x$ (mod $_m$) para todo entero x.
   b) $ax \equiv bx$ (mod $_m$) para todo entero x
2. Si $a \equiv b$ (mod $_m$) y $c \equiv d$ (mod $_m$), entonces:
   a) $a+c \equiv b+d$ (mod $_m$)
   b) $a\text{-}c \equiv b\text{-}c$ (mod $_m$)
   c) $ac \equiv bd$ (mod $_m$)
   d) $a^n \equiv b^n$ (mod $_m$) para todo entero positivo n

Demostración: 1. Es inmediata y se deja como ejercicio al lector, así como 2 a) y 2 b).
Para la demostración de 2 c) procedemos aplicando 1 b) y la propiedad 3 del teorema anterior.

Si $a \equiv b$ (mod $_m$) entonces $ac \equiv bc$ (mod $_m$)
Si $c \equiv d$ (mod $_m$) entonces $bc \equiv bd$ (mod $_m$)

y en consecuencia $ac \equiv bd$ (mod $_m$).

***Ejercicio 3*. (Regla de la divisibilidad entre 9)**
Demuestre que un entero N, expresado en notación decimal, es divisible entre 9 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 9.

Solución: sea $N = a_0\, a_1\, a_2 \ldots a_{n-1}\, a_n$

$$N = a_n x10^0 + a_{n-1}\, x10^1 + a_{n-2} x10^2 \text{ x } \ldots \text{ x } a_1 x10^{n-1} + a_0\, x10^n$$

Como

$$10^0 \equiv 1 \text{ (mod } _9) \quad \Rightarrow \quad a_n x10^0 \equiv a_n \text{ (mod } _9)$$
$$10^1 \equiv 1 \text{ (mod } _9) \quad \Rightarrow \quad a_{n-1} x10^1 \equiv a_{n-1} \text{ (mod } _9)$$
$$10^2 \equiv 1 \text{ (mod } _9) \quad \Rightarrow \quad a_{n-2} x10^2 \equiv a_{n-2} \text{ (mod } _9)$$

.   .
.   .
.   .

$10^{n-1} \equiv 1 \pmod 9 \quad \Rightarrow \quad a_1 x 10^{n-1} \equiv a_1 \pmod 9$
$10^{n} \equiv 1 \pmod 9 \quad \Rightarrow \quad a_0 x 10^{n} \equiv a_0 \pmod 9$

Sumando término a término, obtenemos: $N \equiv a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n \pmod 9$
Lo cual significa que $9 \mid N \Leftrightarrow 9 \mid (a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_{n-1} + a_n)$

***Ejercicio 4*. (Regla de la divisibilidad entre 3)**
Demuestre que un entero N, expresado en notación decimal, es divisible entre 3 si y sólo si la suma de sus dígitos es divisible entre 3.

Solución: Se deja al lector

***Problema 5*. (Otra regla de la divisibilidad entre 3)**
Demuestre que un entero **N = abcd** de cuatro cifras, expresado en notación decimal, es divisible entre 9 si y sólo si **a-2b+4c+d** divisible entre 9.

Solución: Se deja al lector

Teorema 3. Si $ca \equiv cb \pmod m$ y $(c,m) = d$, de modo que $m = dw$, entonces $a \equiv b \pmod w$.

Demostración. $c = dv$ y $m = dw$ donde $(v,w) = 1$.
$dw \mid c(a-b)$ y por lo tanto $w \mid v(a-b)$ y como $(v,w) = 1$ se tiene que $w \mid (a-b)$,
es decir $a \equiv b \pmod w$.

Como un caso particular tenemos el siguiente resultado:

Corolario: Si $ca \equiv cb \pmod m$ y $(c,m) = 1$, entonces $a \equiv b \pmod m$

A continuación enunciaremos sin demostración un importante resultado de la teoría de los números, conocido como:

Teorema de Fermat. Si p es primo y no divide al entero a, entonces $\boldsymbol{a^{p-1} \equiv 1 \pmod p}$.

Problemas propuestos

1. Pruebe que si a y b son enteros, entonces a + b y a - b tienen la misma paridad, es decir, ambos son pares o ambos impares.
2. Probar que 4 no es un divisor de $n^2 + 2$ para cualquier entero n. (Sugerencia: Analice por separado los casos n par y n impar)
3. Diga cuántos enteros entre 65 y 10,000 son divisibles entre 18.
4. Encuentre todos los divisores positivos de 10,000
5. Demuestre que si a | b y c | d entonces ac | bd.
6. Prueba que si x, y son impares, entonces $x^2 + y^2$ es par pero no divisible entre 4.
7. Pruebe que todo entero n es de la forma 5k, 5k + 1, 5k + 2, 5k + 3 ó 5k + 4
8. Probar que si un entero es de la forma 6k + 5, entonces es necesariamente de la forma 3m - 1, pero no inversamente.
9. Probar que 4 no es divisor de $n^2 + 2$ para cualquier entero n. (Sugerencia: Pruébelo por separado en cada uno de los casos: n = 4k, n = 4k + 1, n = 4k + 2, n = 4k + 3).
10. Demuestre que N es divisible entre 9 si la suma de los dígitos es divisible entre 9 (Sugerencia: Vea la regla de divisibilidad por 3)
11. Demuestre que N es divisible por 4 si el entero formado por el dígito de las decenas y el de las unidades es divisible entre 4, es decir: Si N = abcd entonces 4| N si 4 | cd. Por ejemplo, 5315 es divisible entre 4 pues 16 lo es. (Sugerencia: Vea la regla de divisibilidad por 3)
12. Demuestre que n^5 - n es divisible entre 30.
13. Demuestre que el cuadrado de cualquier entero es de la forma 3k ó bien 3k+1, pero no de la forma 3k+2. (Sugerencia: Todo entero es de la forma 3k, 3k +1 ó 3k + 2)
14. ¿ Cuántos ceros tiene al final (100)! ?
15. Encuentre todos los números de cuatro cifras con las siguientes propiedades: a) La primera y la tercera cifra son iguales; b) La segunda y la cuarta cifra son iguales y c) el número más uno es un cuadrado perfecto.
16. Calcule el producto de todos los enteros positivos menores que 100 y que tengan exactamente tres divisores positivos. Compruebe además que dicho número es un cuadrado perfecto.
17. Demuestre que el número de tres cifras aba es divisible entre tres si y sólo si | a - b | es múltiplo de tres.
18. Demuestre que si al dividir a y b entre 5 obtenemos residuos r_1 y r_2 tales que $r_1 + r_2 = 5$, entonces a +b es divisible entre 5.
19. Demuestre que en cualquier colección de 7 ó más enteros siempre es posible encontrar dos cuya diferencia sea divisible entre 6. (Sugerencia: Los posibles residuos en la división por 6 son: 0, 1, 2, 3, 4, 5 y utilice un resultado similar al del ejercicio 18).
20. Demuestre que n^{6k} -1 es divisible entre 7 para cualquier entero positivo k, si n y 7 no tiene otro factor en común que el uno.

Bibliografía

1. **Olimpiadas de Matemáticas: 140 Problemas, seis años de éxitos.**
   Varios autores
   Academia de la Investigación Científica 1993

2. **Recreations in The Theory of Numbers, The Queen of Mathematics Entertains.**
   Autor: Albert H. Beiler
   Dover Publications, Inc, New York 1966

3. **Folletos de Problemas para las Olimpiadas Mexicanas de Matemáticas.**
   Varios autores
   Sociedad Matemática Mexicana- Academia de la Investigación Científica.

4. **Problemario hacia la XI Olimpiada Mexicana de Matemáticas, Sonora 1997.**
   Autores:
   Enrique Hugues Galindo, Miguel Angel Moreno Núñez, Eduardo Tellechea Armenta. Universidad de Sonora, Marzo de 1997.

5. **Soluciones al Problemario hacia la XI Olimpiada Mexicana de Matemáticas.**
   Autores: Enrique Hugues Galindo , Miguel Angel Moreno Núñez, Carlos Alberto Robles Corbalá, Eduardo Tellechea Armenta.
   Universidad de Sonora.

6. **Problemas de la Olimpiada Matemática Española**
   Dirección Electrónica: http://platea.pntic.mec.es/~csanchez/olimprob.htm

7. **Problemas de la Olimpiada Sonorense de Matemáticas**
   Dirección Electrónica: http://www.mat.uson.mx/eduardo/homep2.htm