Métodos de Integración

I n d i c e

Introducción.

En esta sección, ya con la ayuda del Teorema Fundamental del Cálculo, desarrollaremos las principales técnicas de Integración que nos permitirán encontrar las integrales indefinidas de una clase muy amplia de funciones. En cada uno de los métodos de integración, se presentan ejemplos típicos que van desde los casos más simples, pero ilustrativos, que nos permiten llegar de manera gradual hasta los que tienen un mayor grado de dificultad.

estudiaremos los principales métodos de integración, consistiendo todos ellos en reducir la integral buscada a una integral ya conocida, como por ejemplo una de las de la tabla, ó bien reducirla a una integral más sencilla.

Regresar al índice

El Método de Cambio de Variable.

Antes de ver la fórmula de cambio de variable, resolveremos algunos ejercicios sencillos que nos llevarán de manera natural a la mencionada fórmula.

Tomemos la primera fórmula de la tabla de integrales del capítulo anterior:

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad si\ \alpha \neq -1$$

a partir de ésta podemos encontrar integrales como

$$\int x^4\ dx = \frac{x^5}{5} + k\ , \qquad \int \sqrt{x}\ dx = \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + k \qquad , \quad \text{etc.}$$

Sin embargo, si la variable no aparece de manera sencilla en la función a integrar, ¿podemos afirmar que

$$\int (3x-5)^4\ dx = \frac{(3x-5)^5}{5} + k\ ?$$

La respuesta es <u>NO</u>, pues al derivar el lado derecho no obtenemos el integrando

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(3x-5)^5}{5}\right] = 3(3x-5)^4$$

lo correcto sería

$$\int 3(3x-5)^4\ dx = \frac{(3x-5)^5}{5} + k$$

o bien

$$\int (3x-5)^4\,dx = \frac{1}{3}\left[\frac{(3x-5)^5}{5}\right] + k$$

Análogamente ¿podemos afirmar que $\int (\cos x)^4\,dx = \frac{(\cos x)^5}{5} + k$?

De nuevo la respuesta es <u>NO</u>, pues al derivar el lado derecho no obtenemos el integrando

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{(\cos x)^5}{5}\right] = -senx(\cos x)^4$$

lo correcto sería

$$\int senx(\cos x)^4\,dx = -\frac{(\cos x)^5}{5} + k$$

En el cálculo de estas dos integrales

$$\int 3(3x-5)^4\,dx = \frac{(3x-5)^5}{5} + k \qquad\qquad \int senx(\cos x)^4\,dx = -\frac{(\cos x)^5}{5} + k$$

como una variante de la fórmula

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad si\ \alpha \neq -1$$

advertimos que si la variable x se reemplaza por una función u(x), para que la integral se calcule sustituyendo u(x) por x, en el integrando debe aparecer u'(x) multiplicando a $u(x)^{\alpha}$, es decir

$$\int [u(x)]^{\alpha}\, u'(x) dx = \frac{[u(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + k \qquad si\ \alpha \neq -1$$

En general, si partimos de una integral conocida

$$\int f(x)\,dx = g(x) + k$$

y cambiamos la variable x por la función derivable $u(x)$, tal que $u'(x)$ es continua, obtenemos **LA FORMULA DE CAMBIO DE VARIABLE**

$$\boxed{\int f\left[u(x)\right]u'(x)dx = g\left[u(x)\right] + k}$$

Podemos comprobar fácilmente su validez, derivando el lado derecho

$$\frac{d}{dx}\left[g\left[u(x)\right] + k\right] = g'\left[u(x)\right]u'(x) = f\left[u(x)\right]u'(x)$$

este último paso utilizando el hecho de que g es una primitiva para f.

Si en la fórmula anterior escribimos $u = u(\mathrm{x})$ y $u'(x)dx = du$, la fórmula de cambio de variable nos quedaría como:

$$\boxed{\int f(u)du = g(u) + k}$$

En todos los ejemplos que veremos a continuación, trataremos de reducir el grado de dificultad de la integral mediante un cambio de variable, de tal manera que la integral resultante sea más fácil de integrar ó que sea una integral conocida. ***Para que la fórmula de cambio de variable tenga posibilidades de éxito, debemos identificar en el integrando a una función u y a u', su derivada.***

Ejemplo 1. Encuentre $\int (3x-5)^4 dx$

Solución. En este caso sencillo podemos observar que esta integral "se parece" a $\int u^4 du$, lo cual nos sugiere tomar el cambio de variable $u = 3x\text{-}5$

$u = 3x\text{-}5 \quad \Rightarrow \quad du = 3\ dx \quad \Rightarrow \quad dx = (1/3)du$

Sustituyendo en la integral,

$$\int (3x-5)^4 dx = \int u^4\ du/3 = \frac{1}{3}\int u^4\ du = \frac{1}{3}\left(\frac{u^5}{5}\right) + c = \frac{u^5}{15} + c = \frac{(3x-5)^5}{15} + c$$

coincidiendo con el resultado anterior.

Ejemplo 2. Encuentre $\int \cos^4 x\ senx\ dx$

Solución. En este caso podemos observar que esta integral "se parece" a $\int u^4 du$, lo cual nos sugiere tomar el cambio de variable u = cosx

$$u = cosx \quad \Rightarrow \quad du = -senx\ dx \quad \Rightarrow \quad senx\ dx = -du$$

Sustituyendo en la integral,

$$\int (\cos x)^4 (\ senx\ dx) = \int (u^4)(-du) = -\int u^4\ du = -(\frac{u^5}{5}) + c = -\frac{\cos^5 x}{5} + c$$

coincidiendo con el resultado anterior.

Ejemplo 3. Encuentre $\int \frac{(3\ln x - 5)^4}{x}\, dx$

Solución. Advertimos la presencia de la función *lnx* y su derivada *1/x*, lo cual nos sugiere tomar el cambio de variable:

$$u = lnx \quad \Rightarrow \quad du = dx/x$$

Sustituyendo en la integral,

$$\int \frac{(3\ln x - 5)^4}{x}\, dx = \int (3u - 5)^4\ du$$

A su vez esta integral tendría que resolverse por cambio de variable, tomando w = 3u-5, como se hizo en el ejemplo 1, obteniendo:

$$\int \frac{(3\ln x - 5)^4}{x}\, dx = \int (3u - 5)^4 du = \frac{(3u - 5)^5}{15} + c = \frac{(3\ln x - 5)^5}{15} + c$$

Sin embargo para evitar tomar dos o más cambios de variable, debemos percatarnos de que lo importante es que aparece la expresión 1/x que es la derivada de lnx, que también lo es de (3lnx-5), salvo constantes.

Más precisamente, podemos tomar el cambio de variable:

$$u = 3lnx\text{-}5 \quad \Rightarrow \quad du = 3dx/x, \text{ ò bien } dx/x = du/3,$$

y al sustituir en la integral original:

$$\int \frac{(3\ln x - 5)^4}{x}\, dx = \frac{1}{3}\int u^4 du = \frac{1}{3}\frac{u^5}{5} + c = \frac{(3\ln x - 5)^5}{15} + c$$

Observación: ***De lo anterior podemos concluir que el cambio de variable procede cuando en el integrando aparece una función u y su derivada multiplicada por una constante. Además que la integral de la variable u sea posible resolverla.***

Ejemplo 4. Encuentre $\int 3x^6\sqrt{2-x^7}\ dx$

Solución. En este caso aparece la función $u = 2\text{-}x^7$ y su derivada ($-7x^6$) multiplicada por la constante (-3/7), precisando:

$$u = 2\text{-}x^7 \quad \Rightarrow \quad du = -7x^6\ dx$$

Como en la integral tenemos que sustituir $3x^6\ dx$,

$$du = -7x^6\ dx \ \Rightarrow\ x^6 dx = \frac{-1}{7}du \quad \Rightarrow \quad 3x^6 dx = \frac{-3}{7}du$$

$$\int 3x^6\sqrt{2-x^7}\ dx = \frac{-3}{7}\int \sqrt{u}\ du = \frac{-3}{7}\left(\frac{u^{3/2}}{3/2}\right) + c = \frac{-2}{7}u^{3/2} + c = \frac{-2}{7}(2-x^7)^{3/2} + c\,,$$

así pues

$$\int 3x^6\sqrt{2-x^7}\ dx = \frac{-2}{7}\sqrt{(2-x^7)^3} + c\,,$$

Nótese que una vez identificado el cambio de variable u, vemos que la integral por resolver es $\int \sqrt{u}\ du$, es decir, resolver nuestra integral $\int 3x^6\sqrt{2-x^7}\ dx$ se reduce a resolver $\int \sqrt{u}\ du$ mediante el citado cambio de variable ó en otras palabras nuestra integral de la variable x es similar a $\int \sqrt{u}\ du$

Existen otras situaciones en que el cambio de variable no es tan evidente en términos de la función u y su derivada, por lo cual tenemos que echar la vista adelante y ver a que función fácil de integrar es similar nuestra función.

Ejemplo 5. Encuentre $\int \frac{x^2}{1+x^6}\ dx$

Solución. En una primera vista no advertimos la presencia de una función u y su derivada, ya que la derivada de $1 + x^6 = 6x^5$ y en el integrando no aparece x^5 sino x^2. No debemos perder de vista que al hacer un cambio de variable es por que nuestra integral es similar ó se puede reducir a otra fácil de resolver.

Si pensamos que $x^2\,dx$ será el nuevo diferencial, entonces u tendría que ser x^3, es decir

$$u = x^3 \;\Rightarrow\; du = 3x^2\,dx$$

como se ve al expresar la integral de la siguiente manera:

$$\int \frac{x^2}{1+(x^3)^2}\,dx = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\arctan u + c = \frac{1}{3}\arctan(x^3) + c$$

Ejemplo 6. Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^3}{\sqrt{1-9x^8}}\,dx$

Solución. En analogía al ejemplo anterior, podemos decir que esta integral se reduce a $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}\,du$, ya que si tomamos el cambio de variable $u^2 = 9x^8$, ó equivalentemente

$u = 3x^4 \;\Rightarrow\; du = 12x^3\,dx$, es decir $x^3\,dx = (1/12)du$, y sustituyendo:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1-9x^8}}\,dx = \frac{1}{12}\int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{12}\,arcsen(u) + c = \frac{1}{12}\,arcsen(3x^4) + c$$

Podemos utilizar el método de cambio de variable para encontrar las integrales de algunas funciones conocidas

Ejemplo 7. Encuentre $\displaystyle\int \tan x\,dx$

Solución. $\displaystyle\int \tan x\,dx = \int \frac{senx}{\cos x}\,dx$

$u = cosx \;\Rightarrow\; du = -senx$

$$\int \frac{senx}{\cos x}\,dx = -\int \frac{du}{u} = -\ln u + c = -\ln(\cos x) + c$$

Como $-\ln(\cos x) = \ln 1 - \ln(\cos x) = \ln(1/\cos x) = \ln(\sec x)$

Podemos expresar

$$\boxed{\int \tan x \, dx = \ln|\sec x| + C}$$

Análogamente

$$\boxed{\int \cot x \, dx = \ln|senx| + C}$$

Ejemplo 8. Encuentre $\int \frac{dx}{9+x^2}$

Solución. Debemos poder reducir esta integral a $\int \frac{du}{1+u^2}$ mediante un cambio de variable, por la similitud de las expresiones.

Primeramente vemos que en el denominador la variable al cuadrado esta sumada a 1, lo cual nos sugiere factorizar el 9 para tener algo similar, es decir:

$$\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+x^2/9} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+(x/3)^2}$$

y esto nos sugiere tomar el cambio de variable

$$u = x/3 \quad \Rightarrow \quad du = dx/3$$

$$\int \frac{dx}{9+4x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+(x/3)^2} = \left(\frac{3}{9}\right)\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\arctan u + c = \frac{1}{3}\arctan(x/3) + c$$

En general podemos deducir la fórmula que engloba todo este tipo de integrales.

Ejemplo 9. Encuentre $\int \frac{dx}{a^2+x^2}$

Solución. En analogía al problema anterior:

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{1}{a^2}\right)x^2}$$

y tomando el cambio de variable u =(1/a)x y por lo tanto du =(1/a)dx

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a^2}\int \frac{dx}{1+(\frac{1}{a^2})x^2} = \left(\frac{a}{a^2}\right)\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{a}\arctan u + c = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c$$

es decir:

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x}{a}\right)+c} \quad \text{----------} \quad \text{(I)}$$

a reserva de probarlo más adelante, aceptaremos la siguiente fórmula:

$$\boxed{\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right|+c} \quad \text{---------} \quad \text{(II)}$$

y probaremos lo siguiente:

Las integrales de la forma $\int \frac{dx}{ax^2+bx+c}$ **, con a ≠ 0, se reducen a las fórmulas (I) ó (II) mediante cambio de variable.**

El procedimiento consistirá en completar trinomio cuadrado perfecto y tomar el cambio de variable adecuado.

Ejemplo 10. Encuentre $\int \frac{dx}{2x^2+12x+10}$

Solución. Completemos el trinomio cuadrado perfecto.

$2x^2+12x+10 = 2[x^2 + 6x + 5] = 2[x^2 + 6x + 9\text{-}9 + 5] = 2[(x^2 + 6x + 9) - 4] = 2[(x+3)^2 - 4]$

sustituimos en la integral e identificamos con la fórmula (II)

$$\int \frac{dx}{2x^2+12x+10} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+3)^2-4} = -\frac{1}{2}\int \frac{dx}{4-(x+3)^2} = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right)\ln\left|\frac{2+(x+3)}{2-(x+3)}\right|+c$$

es decir

$$\int \frac{dx}{2x^2+12x+10} = \left(-\frac{1}{8}\right)\ln\left|\frac{5+x}{-1-x}\right| + c$$

Obsérvese que no importa cual sea el trinomio cuadrado, al completarlo nuestra integral siempre se reducirá a una de las dos fórmulas.

Una vez visto lo anterior, veremos un procedimiento que nos permitirá calcular integrales de la forma

$$\boxed{\int \frac{(Ax+B)}{ax^2+bx+c}\ dx \qquad \text{con } a \neq 0}$$

Ejemplo 11. Encuentre $\int \frac{(5x+3)dx}{3x^2+4x+2}$

Solución. Por supuesto que el tipo más sencillo de este tipo de integrales es cuando en el numerador aparece la derivada del término cuadrático del denominador.

$$\int \frac{(6x+4)dx}{3x^2+4x+2} = \ln\left|3x^2+4x+2\right| + c$$

Partiremos de esta función y modificaremos el numerador para obtener una expresión fácil de integrar

$$\int \frac{(5x+3)}{3x^2+4x+2}\ dx = \int \frac{\frac{5}{6}(6x+4)+3-\frac{20}{6}}{3x^2+4x+2}\ dx = \int \frac{\frac{5}{6}(6x+4)-\frac{1}{3}}{3x^2+4x+2}\ dx =$$

$$= \tfrac{5}{6}\int \frac{(6x+4)}{3x^2+4x+2}\ dx - \frac{1}{3}\int \frac{dx}{3x^2+4x+2}$$

La primera de las integrales ya está resuelta y la segunda se resuelve con el procedimiento descrito en el ejemplo anterior.

$3x^2+4x+2 = 3[x^2 + 4/3x + 2/3] = 3[(x^2 + 4/3x + 4/9) + 2/3\text{-}4/9] = 3[(x+2/3)^2 + 2/9]$

$$\int \frac{dx}{3x^2+4x+2} = \frac{1}{3}\int \frac{dx}{(x+\frac{2}{3})^2+\frac{2}{9}} = \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\arctan\left(\frac{3(x+\frac{2}{3})}{\sqrt{2}}\right) + c$$

En consecuencia :

$$\int \frac{(5x+3)dx}{3x^2+4x+2} = \frac{5}{6}\ln\left|3x^2+4x+2\right| - \frac{1}{3\sqrt{2}}\arctan\left(\frac{3x+2}{3\sqrt{2}}\right) + c$$

Regresar al índice

El método de Integración por partes

Este método nos permitirá resolver integrales de funciones que pueden expresarse como un producto de una función por la derivada de otra. Más precisamente, deduciremos la fórmula de integración por partes a partir de la regla para derivar un producto de dos funciones.

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

integrando en ambos lados

$$\int [f(x)g(x)]'\,dx = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

obtenemos:

$$f(x)g(x) = \int f'(x)g(x)\,dx + \int f(x)g'(x)\,dx$$

y despejando la segunda integral:

$$\boxed{\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) + \int f'(x)g(x)\,dx}$$

obtenemos finalmente la FORMULA DE INTEGRACIÓN POR PARTES.

A continuación veremos en algunos ejemplos como utilizar esta fórmula.

Ejemplo 1. Encuentre $\int x\cos(x)\,dx$

Solución. Con el fin de utilizar la fórmula anterior, tomaremos $f(x) = x$ y $g'(x) = \cos(x)$, es decir el integrando $x\cos(x) = f(x)\,g'(x)$

$f(x) = x$	$g'(x) = \cos(x)$
$f'(x) = 1$	$g(x) = \text{sen}(x)$

$$\int x\cos(x)\,dx = xsen(x) - \int sen(x)\,dx = -\,xsen(x) + \cos(x) + c$$

Observe que también hubiéramos podido hacer la siguiente elección de *f* y *g*':

$f(x) = \cos(x)$	$g\,'(x) = x$
$f\,'(x) = -\text{sen}(x)$	$g(x) = x^2/2$

sólo que la función por integrar en el lado derecho tiene un mayor grado de dificultad para resolverse que la original.

$$\int x\cos(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\cos(x) - \int -\frac{x^2}{2}\,sen(x)\,dx$$

<u>NOTACIÓN</u>. Con el fin de ser congruentes con la notación utilizada en la mayoría de los libros del mercado, le llamaremos

$u = f(x)$ y $v = g(x)$ y en consecuencia $du = f\,'(x)dx$ así como $du = g\,'(x)dx$. Con esta nueva notación resolveremos los siguientes ejercicios.

Ejemplo 2. Encuentre $\int xe^x\,dx$

Solución. Utilizaremos el siguiente cuadro

$u = x$	$v = \text{e}^x$
$du = dx$	$dv = \text{e}^x\,dx$

obsérvese que con esta notación, en vez de tomar $g'\,(x) = \text{e}^x$, tomamos su diferencial $dv = \text{e}^k dx$ y análogamente con *f*, permitiendo que una parte del integrando sea *u* y el resto sea *dv*.

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + c$$

En estos primeros dos ejemplos, una adecuada elección de *u* y *dv* nos lleva en un solo paso a resolver nuestra integral reduciéndola a una integral más fácil de resolver.

Existen otras situaciones, como se verá en los siguientes ejemplos, en que si bien la integral del lado derecho tiene un menor grado de dificultad, no es una integral inmediata, requiere de un nuevo proceso de integración por partes ó resolverla por cambio de variable, ó algún otro procedimiento.

Ejemplo 3. Encuentre $\int x^2 e^x \, dx$

Solución. Utilizaremos el siguiente cuadro

$u = x^2$	$v = e^x$
$du = 2x dx$	$dv = e^x \, dx$

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x \, dx$$

la integral del lado derecho se resuelve por partes (Ejemplo 2), obteniendo:

$$\int x^2 e^x \, dx = x^2 e^x - 2(x e^x - e^x) + c$$

<u>Observación</u>: La elección $u = e^{x,}$ $dv = x^2 dx$ nos lleva a una integral con un mayor grado de dificultad.

Ejemplo 4. Encuentre $\int \arctan x \, dx$

Solución. Utilizaremos el siguiente cuadro

$u = \arctan x$	$v = x$
$du = \dfrac{dx}{1+x^2}$	$dv = dx$

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

En este caso, la integral del lado derecho se resuelve por un cambio de variable, obteniendo:

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

y en consecuencia:

$$\int \arctan x \, dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + c$$

Ejemplo 5. Encuentre $\int \text{sen}^2(x)\, dx$

Solución. Utilizaremos el siguiente cuadro

u = sen*x*	*v* = -cos*x*
du =cos *dx*	*dv* = sen*x dx*

$$\int sen^2(x)\, dx = -senx\cos x - \int -\cos^2(x)\, dx = -senx\cos x + \int \cos^2(x)\, dx$$

La integral del lado derecho, al parecer tiene el mismo grado de dificultad que la integral original, incluso es de la misma naturaleza que la original, lo que nos sugiere utilizar de nuevo el método de integración por partes

u = cos*x*	*v* = sen*x*
du =-sen *dx*	*dv* = cos *dx*

$$\int \cos^2(x)\, dx = -senx\cos x - \int -sen^2(x)\, dx = senx\cos x + \int sen^2(x)\, dx$$

que al sustituirse nos da:

$$\int sen^2(x)\, dx = -senx\cos x + \int \cos^2(x)\, dx = -senx\cos x + senx\cos x + \int sen^2(x)\, dx$$

obteniendo la identidad

$$\int sen^2(x)\, dx = -senx\cos x + senx\cos x + \int sen^2(x)\, dx$$

en la que si dejamos en el lado izquierdo las integrales, obtenemos <u>0 = 0</u>, que no nos ayuda a encontrar el valor de nuestra integral.

La alternativa en este caso es utilizar la identidad trigonométrica $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ inmediatamente después de la primera integración por partes.

$$\int sen^2(x)\, dx = -senx\cos x + \int \cos^2(x)\, dx = -senx\cos x + \int (1 - sen^2 x)\, dx$$

$$\int sen^2(x)\,dx = -senx\cos x + x - \int sen^2(x)\,dx\,.$$

Si bien nos vuelve a aparecer la misma integral, esta vez aparece con distinto signo, lo que nos permite ***despejarla***, es decir si dejamos del lado izquierdo las integrales, obtendremos:

$$2\int sen^2(x)\,dx = -senx\cos x + x\,.$$

O bien

$$\int sen^2(x)\,dx = \frac{x - senx\cos x}{2} + c\,.$$

Ejemplo 6. Encuentre $\int e^x sen(x)\,dx$

Solución. Utilizaremos el siguiente cuadro

$u = e^x$	v = -cos$x$
$du = e^x\,dx$	dv = sen$x$ dx

$$\int e^x sen(x)\,dx = -e^x\cos x + \int e^x\cos x$$

De nuevo como en el ejemplo anterior, la integral del lado derecho es de la misma naturaleza y del mismo grado de dificultad, por lo que podríamos intentar utilizar de nuevo el método de integración por partes.

$u = e^x$	v = sen$x$
$du = e^x\,dx$	dv = cos$x$ dx

$$\int e^x\cos x\,dx = e^x senx - \int e^x senx\,dx$$

Sustituyendo, obtenemos:

$$\int e^x senx\, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x = e^x senx - e^x \cos x - \int e^x senx$$

$$\int e^x senx\, dx = e^x senx - e^x \cos x - \int e^x senx$$

de donde podemos despeja a la integral

$$2\int e^x senx\, dx = e^x senx - e^x \cos x$$

y en consecuencia

$$\int e^x senx\, dx = \frac{e^x senx - e^x \cos x}{2} + c$$

A continuación abordaremos unos ejemplos en que, debido a la gran cantidad de posibilidades debe tenerse un criterio preciso para decidir sobre la elección de u y dv.

Ejemplo 7. Encuentre $\int x^3 e^{x^2}\, dx$

Solución. En este tipo de funciones a integrar, hay muchas maneras de expresar al integrando como un producto:
$u = x^3$, $dv = e^{x^2}\, dx$; $u = x^2$, $dv = x\,e^{x^2}\, dx$; $u = x$, $dv = x^2 e^{x^2}\, dx$; $u = 1$, $dv = x^3 e^{x^2}\, dx$;
$u = x^3 e^{x^2}\, dx$, $dv = dx$, etc.
¿Cuál de estas opciones elegir?

Lo primero que debemos hacer es asegurarnos que en nuestra elección, dv sea una función fácil de integrar. Si examinamos con detalle las opciones, sólo la opción
$u = x^2$, $dv = x\,e^{x^2}$ dx cumple con esto ya que *dv* es fácil integrar por un simple cambio de variable:

$$v = \int xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}\int 2xe^{x^2} dx = \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Así pues el cuadro para la integración por partes será:

$u = x^2$	$v = \frac{1}{2}e^{x^2}$
$du = 2x\, dx$	$dv = xe^{x^2} dx$

$$\int x^3 e^{x^2}\, dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2}x^2 e^{x^2} - \frac{1}{2}e^{x^2} + c$$

Ejemplo 8. Encuentre $\int x^9 \sqrt{6-3x^5}\, dx$

Solución. Con un criterio similar al del caso anterior, tomamos la siguiente elección:

$u = x^5$	$v = \frac{-2}{45}(6-3x^5)^{\frac{3}{2}}$
$du = 5x^4\, dx$	$dv = x^4\sqrt{6-3x^5}dx$

donde $v = \int dv = \int x^4 \sqrt{6-3x^5}\, dx = \frac{-1}{15}\int -15x^4(6-3x^5)^{\frac{1}{2}}\, dx = \left(\frac{-1}{15}\right)\left(\frac{2}{3}\right)(6-3x^5)^{\frac{3}{2}}$

$$\int x^9\sqrt{6-3x^5}\, dx = \frac{-2x^5}{45}(6-3x^5)^{\frac{3}{2}} + \frac{10}{45}\int x^4(6-3x^5)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{-2x^5}{45}(6-3x^5)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{10}{45}\right)\left(\frac{-1}{15}\right)\int -15x^4(6-3x^5)^{\frac{3}{2}}\, dx$$

$$= \frac{-2x^5}{45}(6-3x^5)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{2}{135}\right)\left(\frac{2}{5}\right)(6-3x^5)^{\frac{5}{2}} + \text{c}$$

Así pues:

$$\int x^9\sqrt{6-3x^5}\, dx = \frac{-2x^5}{45}\sqrt{(6-3x^5)^3} - \left(\frac{4}{675}\right)\sqrt{(6-3x^5)^5} + c$$

Regresar al índice

Integrales de funciones trigonométricas

A continuación veremos algunas reglas para integrar cierto tipo de funciones trigonométricas, que posteriormente se utilizarán en el método de sustitución trigonométrica.

I. Potencias de senos y cosenos $\int sen^n x\, dx \quad \int \cos^n x\, dx$

Para resolver este tipo de integrales, consideraremos dos casos:

a) Si n es impar, es decir $n = 2k + 1$, factorizamos el integrando, por ejemplo

$$\text{sen}^n x\, dx = \text{sen}^{2k+1} x\, dx = (\text{sen}^2 x)^k\, \text{sen}x\, dx$$

Utilizamos la identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$ y tomamos el cambio de variable $u = \cos x$.

De manera análoga en el caso de las potencias del coseno, tomando el cambio de variable $u = \text{sen}x$.

b) Si n es par, es decir n = 2k, factorizamos el integrando, por ejemplo

$$\text{sen}^n x = \text{sen}^{2k} x = (\text{sen}^2 x)^k$$

ó en el caso del coseno

$$\cos^n x = \cos^{2k} x = (\cos^2 x)^k$$

y utilizamos las identidades trigonométricas:

$$sen^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad ó \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

Ejemplo 1. Resolver $\int sen^3 x\, dx$

Solución:

$$\int \text{sen}^3 x\, dx = \int \text{sen}^2 x\, \text{sen}x\, dx = \int (1 - \cos^2 x)\, \text{sen}x\, dx$$

sea u = cosx, entonces du = -sen$x$, y al sustituir en la integral obtenemos:

$$\int sen^3 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\,senx\,dx = -\int (1-u^2)\,du = \frac{u^3}{3} - u + c = \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + c$$

Ejemplo 2. Resolver $\int \cos^5 x\,dx$

Solución:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (\cos^2 x)^2 \cos x\,dx = \int (1-sen^2 x)^2 \cos x\,dx$$

sea u = sen$x$, entonces du = cos$x$, y al sustituir en la integral obtenemos:

$$\int \cos^5 x\,dx = \int (1-u^2)^2\,du = \int (1-2u^2+u^4)du = u - \frac{2u^3}{3} + \frac{u^5}{5} + c = senx - \frac{2sen^3 x}{3} + \frac{sen^5 x}{5} + c$$

Ejemplo 3. Resolver $\int sen^4 x\,dx$

Solución:

$$\int sen^4 x\,dx = \int (sen^2 x)^2\,dx = \int \left(\frac{1-\cos(2x)}{2}\right)^2\,dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos(2x)+\cos^2(2x))\,dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx - \frac{1}{2}\int \cos(2x)\,dx + \frac{1}{4}\int \cos^2(2x)\,dx$$

II. Productos de potencias de senos y cosenos $\int sen^m x \cos^n x\,dx$ **.**

a) Si m y n son pares, utilizaremos las identidades:

$$sen^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2} \qquad y \qquad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$$

b) Si m ó n es impar, utilizaremos la identidad $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

II. Productos de potencias de tangentes y secantes $\int \tan^m x \sec^n x\,dx$ **.**

a) Si n es par, utilizamos la identidad: $\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$.

b) Si *m* es impar, utilizamos la identidad: $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$.

c) Si *n* es impar y m par usamos algún otro método como por ejemplo integración por partes.

Regresar al índice

El Método de Sustitución Trigonométrica

Este método, el cual es un caso especial de cambio de variable, nos permitirá integrar cierto tipo de funciones algebraicas cuyas integrales indefinidas son funciones trigonométricas, como por ejemplo nuestra conocida fórmula:

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = arcsenx + c$$

la cual "resolveremos" con el fin de motivar el uso del método.

Observe que si tomamos el cambio de variable

$x = \operatorname{sen}\theta$ donde $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ pues $-1 < x < 1$

y en consecuencia $dx = \cos\theta\, d\theta$ y

$$\sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-sen^2\theta} = \sqrt{\cos^2\theta} = |\cos\theta| = \cos\theta$$

pues $\cos\theta > 0$ en el intervalo $-\pi/2<\theta<\pi/2$

Sustituyendo x en términos de θ, obtenemos una integral en la variable θ, la cual resolvemos fácilmente y del cambio de variable la expresamos en términos de x.

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \frac{1}{\cos\theta}\cos\theta\, d\theta = \int d\theta = \theta + c = arcsenx + c$$

Como podemos apreciar, al abordar este tipo de integrales siempre tendremos que resolver una integral trigonométrica, como las que se resolvieron en la sección anterior.

Primer caso.

Si en el integrando aparece un radical de la forma $\sqrt{a^2 - x^2}$ tomamos el cambio de variable

$$x = a\ \text{sen}\theta, \text{ con } a > 0.$$

Como se apreció anteriormente, la variación de x en el intervalo ($-a$, a) se corresponde con la variación de θ en el intervalo ($-\pi/2$, $\pi/2$)

En este primer caso la expresión del radical en términos de θ será:

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 sen^2\theta} = \sqrt{a^2(1 - sen^2\theta)} = a\sqrt{\cos^2\theta} = a|\cos\theta| = a\cos\theta$$

esta última igualdad pues $\cos\theta > 0$ en el intervalo ($-\pi/2$, $\pi/2$)

También del cambio de variable obtenemos el valor de

$$\theta = \text{arcsen}x,$$

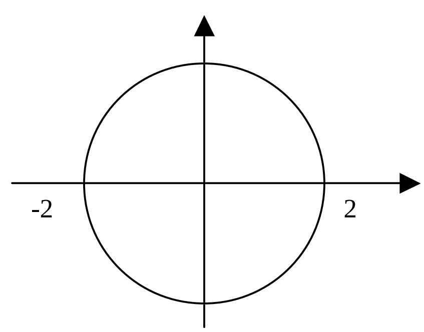
pues la función inversa de $f(x) = \text{sen}x$ se encuentra definida precisamente en el intervalo ($-a$,a) y con valores en ($-\pi/2$, $\pi/2$).

Ejemplo 1. Encuentre el área del círculo de radio 2.

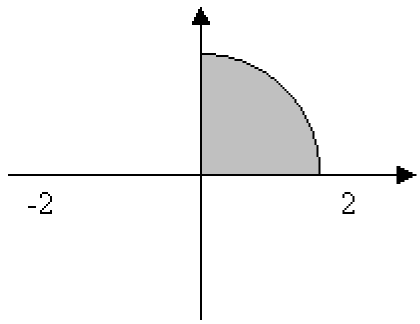
Solución. La ecuación de la circunferencia de radio 2 y centro en le origen es:

$$x^2 + y^2 = 4$$

cuya gráfica es:



Evidentemente esta gráfica no corresponde a una función, pero podemos restringirnos al intervalo [0, 2], calcular el área bajo la grafica y multiplicarla por 4 para obtener el área deseada.



La función de la figura la obtenemos despejando a y en términos de x, en la ecuación de la circunferencia:

$$y = \sqrt{4 - x^2}$$

Así pues el área buscada será:

$$A = 4\int_0^2 \sqrt{4 - x^2}\, dx$$

Primeramente encontraremos $\int \sqrt{4 - x^2}\, dx$

En esta integral, tomamos el cambio de variable trigonométrico

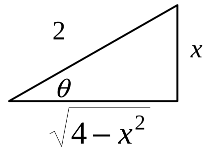
$$x = 2\text{sen}\,\theta \quad \text{por lo cual} \quad dx = 2\cos\theta\, d\theta \;\text{ y }\; \sqrt{4 - x^2} = 2\cos\theta\,.$$

sustituyendo en la integral original, en términos de la nueva variable θ, e integrando, obtenemos:

$$\int \sqrt{4 - x^2}\, dx = \int (2\cos\theta)(2\cos\theta)d\theta = \int 4\cos^2\theta\, d\theta = \frac{4}{2}(\theta + sen\,\theta\cos\theta) + c$$

Del cambio de variable $x = 2\text{sen}\,\theta$ obtenemos que $\text{sen}\,\theta = x/2$, es decir, $\theta = \text{arcsen}(x/2)$.

Asimismo del cambio de variable, podemos construir el triángulo:



En este caso particular senθ = x/2   y cosθ = $\dfrac{\sqrt{4-x^2}}{2}$.

Así pues la integral resuelta en términos de la variable θ, la expresamos en términos de la variable original, x.

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{4}{2}(\theta + sen\theta\cos\theta) + c = 2(arcsen\theta + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{4}) + c$$

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2arcsen\theta + \frac{x\sqrt{4-x^2}}{2} + c$$

Calculemos ahora la integral definida

$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = 2arcsen(1) + \frac{2\sqrt{4-2^2}}{2} - 2arcsen(0) + \frac{0\sqrt{4-0^2}}{2} = 2arcsen1 = 2(\pi/2) = \pi$$

y finalmente el área será:

$$A = 4\int_0^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = 4\pi$$

Ejemplo 2. Encuentre $\displaystyle\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}}$

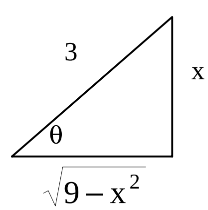
Solución. Tomemos el cambio de variable trigonométrico:

$$x = 3\text{sen}\theta \quad \text{por lo cual} \quad dx = 3\cos\theta\,d\theta \ \text{ y } \ \sqrt{9-x^2} = 3\cos\theta\,.$$

sustituyendo en la integral original, en términos de la nueva variable θ, e integrando, obtenemos:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = \int \frac{3\cos\theta}{(3sen\theta)(3\cos\theta)}d\theta = \frac{1}{3}\int \frac{1}{sen\theta}d\theta = \frac{1}{3}\int \csc\theta d\theta = \frac{1}{3}\ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| + c$$

Del cambio de variable x = 3senθ obtenemos que senθ = x/3, y , podemos construir el triángulo:



A partir del cual podemos encontrar cualquier función trigonométrica de θ.

En este caso particular cscθ = 3/x y cotθ = $\dfrac{\sqrt{9-x^2}}{3}$.

Así pues la integral resuelta en términos de la variable θ, la expresamos en términos de la variable original, x.

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|\csc\theta - \cot\theta\right| + c = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{x} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right| + c$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{9-x^2}} = \frac{1}{3}\ln\left|\frac{3}{x} - \frac{\sqrt{9-x^2}}{x}\right| + c$$

Ejemplo 3. Encuentre $\displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}}$

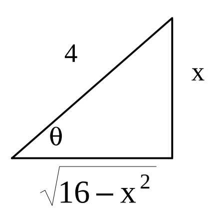
Solución. Tomemos el cambio de variable trigonométrico:

$$x = 4\text{sen}\theta \quad \text{por lo cual} \quad dx = 4\cos\theta\, d\theta \ \text{ y } \ \sqrt{16-x^2} = 4\cos\theta\,.$$

sustituyendo en la integral original, en términos de la nueva variable θ, e integrando, obtenemos:

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}} = \int \frac{(4sen\theta)(4\cos\theta)}{(4\cos\theta)}\,d\theta = 4\int sen\theta\, d\theta = -4\cos\theta + c$$

Del cambio de variable x = 4senθ obtenemos que senθ = x/4, y , podemos construir el triángulo:



Y a partir de él calcular $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{16-x^2}}{4}$.

Así pues la integral resuelta en términos de la variable θ , la expresamos en términos de la variable original, *x*.

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{16-x^2}} = -4\cos\theta + c = -4\left(\frac{\sqrt{16-x^2}}{4}\right) + c = \frac{\sqrt{16-x^2}}{4} + c$$

<u>Observación:</u> Esta integral puede resolverse también con un sencillo cambio de variable algebraico $u = 16 - x^2$. Compruebe este resultado como ejercicio.

Ejemplo 4. Encuentre $\displaystyle\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

Solución. Nótese que para verlo como una integral del primer caso, debemos hacer un cambio de variable ó sencillamente factorizar el 9 en el radical:

$$\sqrt{4-9x^2} = \sqrt{9(4/9-x^2)} = 3\sqrt{4/9-x^2}\,.$$

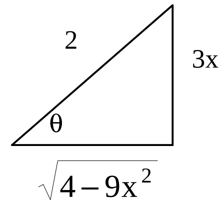
A continuación tomamos el cambio de variable:

$$x = \frac{2}{3}sen\theta \qquad \text{por lo cual} \qquad dx = \frac{2}{3}\cos\theta\,d\theta \qquad \text{y} \qquad \sqrt{4/9-x^2} = \frac{2}{3}\cos\theta\,.$$

sustituyendo en la integral original, obtenemos:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{1}{3}\int \frac{(\frac{2}{3}sen\theta)^3(\frac{2}{3}\cos\theta)}{(\frac{2}{3}\cos\theta)}d\theta = \frac{8}{81}\int sen^3\theta\,d\theta = \frac{8}{81}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right) + c$$

Del cambio de variable $x = \dfrac{2}{3}sen\theta$, obtenemos que $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3x}{2}$, y podemos construir el triángulo:



Y a partir de él, calcular cosθ = $\dfrac{\sqrt{4-9x^2}}{2}$.

Finalmente:

$$\int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{4-9x^2}} = \frac{8}{81}\left(\frac{1}{3}\cos^3\theta - \cos\theta\right) + c = \frac{8}{243}\left(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}\right)^3 - \frac{8}{81}\left(\frac{\sqrt{4-9x^2}}{2}\right) + c$$

Segundo caso.

Si en el integrando aparece un radical de la forma $\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}$ tomamos el cambio de variable

$$x = a\tan\theta, \text{ con } a > 0.$$

En este tipo de radicales la variación de x es en toda la recta real, razón por la cual se toma a la tangente, la cual varía tiene esta misma variación en el intervalo (-π/2 , π/2)

En este segundo caso la expresión del radical en términos de θ será:

$$\sqrt{a^2+x^2} = \sqrt{a^2+a^2\tan^2\theta} = \sqrt{a^2(1+\tan^2\theta)} = a\sqrt{\sec^2\theta} = a|\sec\theta| = a\sec\theta$$

y al igual que en el caso anterior como $\cos\theta > 0$ en el intervalo (-π/2 , π/2), también lo será $\sec\theta$.

También del cambio de variable obtenemos el valor de

$$\theta = \arctan x.$$

Pues la inversa de la función $f(x) = \tan x$ se encuentra definida en todos los reales y con valores en (-π/2 , π/2)

Ejemplo 5. Encuentre $\int \sqrt{2+x^2}\,dx$

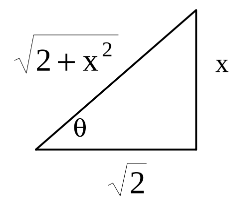
Solución. Tomamos el cambio de variable:

$x = \sqrt{2}\tan\theta$ por lo cual $dx = \sqrt{2}\sec^2\theta\,d\theta$ y $\sqrt{2+x^2} = 2\sec\theta$.

sustituyendo en la integral original, obtenemos:

$$\int\sqrt{2+x^2}\,dx = \int(\sqrt{2}\sec\theta)(\sqrt{2}\sec^2\theta)d\theta = 2\int\sec^3\theta\,d\theta = 2(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta| + c$$

Del cambio de variable $x=\sqrt{2}\tan\theta$, obtenemos que $\tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, y podemos construir el triángulo:



Y a partir de él calcular $\sec\theta = \dfrac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2}}$ y $\tan\theta = \dfrac{x}{\sqrt{2}}$, que al sustituir en la integral obtenemos:

$$\int\sqrt{2+x^2}\,dx == 2(\sec\theta\tan\theta + \ln|\sec\theta+\tan\theta|\,) + c = 2\left(\frac{x\sqrt{2+x^2}}{2}\right) + 2\ln\left(\frac{x+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2}}\right) + c$$

En general el método de sustitución trigonométrica se utiliza cuando aparece un radical de las formas señaladas en los casos, lo cual no significa que debe aparecer solo (elevado a la potencia 1). En el siguiente ejemplo calcularemos una integral en la que el radical aparece elevado al cubo.

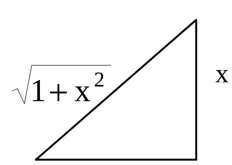
Ejemplo 6. Encuentre $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}}$

Solución. Tomamos el cambio de variable:

$x=\tan\theta$ por lo cual $dx=\sec^2\theta\,d\theta$ y $\sqrt{\left(1+x^2\right)^3} = \left(\sqrt{1+x^2}\right)^3 = \sec^3\theta$.
sustituyendo en la integral original, obtenemos:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = \int\frac{\sec^2\theta\,d\theta}{\sec^3\theta} = \int\cos\theta\,d\theta = sen\theta + c$$

Del cambio de variable $x=\tan\theta$, podemos construir el triángulo:



θ

1

a partir del cual calculamos $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^3}} = sen\theta + c = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + c$$

A continuación encontraremos la integral de una función en la que no aparece explícitamente el radical.

Ejemplo 7. Encuentre $\int (1+x^2)^{-2}\,dx$

Solución. Obsérvese que el integrando lo podemos expresar como

$$(1+x^2)^{-2} = \frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}\right)^4}$$

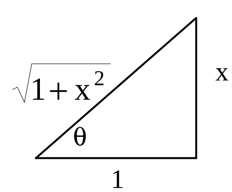
Tomamos el cambio de variable:

$x = \tan\theta$ por lo cual $dx = \sec^2\theta\, d\theta$ y $\left(\sqrt{1+x^2}\right)^4 = \sec^4\theta$.

sustituyendo en la integral original, obtenemos:

$$\int (1+x^2)^{-2}\,dx = \int \frac{dx}{\sqrt{(1+x^2)^4}} = \int \frac{\sec^2\theta\, d\theta}{\sec^4\theta} = \int \cos^2\theta\, d\theta = \frac{1}{2}(\theta + \operatorname{sen}\theta\cos\theta) + c$$

Del cambio de variable $x = \tan\theta$, construimos el triángulo:



a partir del cual calculamos $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ y $\cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

Obteniendo finalmente:

$$\int (1+x^2)^{-2}\,dx = \frac{1}{2}(\theta + sen\theta\cos\theta) + c = \frac{1}{2}(\arctan x + \frac{x}{1+x^2}) + c$$

Tercer caso.

Si en el integrando aparece un radical de la forma $\sqrt{x^2 - a^2}$ tomamos el cambio de variable $x = a \sec\theta$, con $a > 0$.

En este tipo de radicales la variación de x es en $(-\infty, -a)\cup(a, \infty)$, razón por la cual se toma $x = a\sec\theta$, la cual tiene esta misma variación en $(0, \pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$, justamente donde la función secante tiene inversa.

En este tercer caso la expresión del radical en términos de θ será:

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2\theta - a^2} = \sqrt{a^2(\sec^2\theta - 1)} = a\sqrt{\tan^2\theta} = a|\tan\theta|$$

solamente que en este dominio, la tangente toma valores positivos y negativos, por lo que no podemos quitar impunemente el valor absoluto.

Para resolver este conflicto, asociaremos las variaciones de x y de θ, de la siguiente manera:

$$x > k \iff 0 < \theta < \pi/2$$

$$x < -a \iff \pi < \theta < 3\pi/2$$

siendo la función tangente, positiva en estos intervalos para poder tomar

$$\sqrt{x^2 - a^2} = a\tan\theta$$

tomaremos el valor de θ de la siguiente manera:

$$\theta = arc\sec\left(\frac{x}{a}\right) \quad si \quad x > a$$

$$\theta = 2\pi - arc\sec\left(\frac{x}{a}\right) \quad si \quad x < -a$$

Como ejercicio, encuentre $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 9}}$.

Regresar al índice

El Método de las Fracciones Parciales

Este método nos permitirá integrar cierta clase de funciones racionales (cociente de polinomios)

A manera de ilustración consideremos la siguiente integral:

$$. \int \frac{x^2 + x + 3}{x - 2} dx.$$

Obsérvese que difícilmente podríamos abordarla con alguno de los métodos que disponemos. Procederemos efectuando la división de los polinomios:

$$\begin{array}{r|l} & x + 3 \\ \hline x - 2 & x^2 + x + 3 \\ & \underline{-x^2 + 2x} \\ & \quad 3x + 3 \\ & \quad \underline{-3x + 6} \\ & \qquad\quad 9 \end{array}$$

Posteriormente aplicamos el algoritmo de la división y obtenemos:

$$x^2 + x + 3 = (x - 2)(x + 3) + 9$$

Para obtener en el lado izquierdo de la igualdad la función que queremos integrar, dividimos en ambos lados entre $(x - 2)$:

$$\frac{x^2+x+3}{x-2} = (x+3) + \frac{9}{x-2}$$

descomponiendo de esta manera nuestra fracción "*complicada*" en una suma de fracciones "*sencillas*" a las que llamaremos ***fracciones parciales***, las cuales son fáciles de integrar.

$$\int \frac{x^2+x+3}{x-2}\,dx = \int (x+3)\,dx + \int \frac{9}{x-2}\,dx = \frac{x^2}{2} + 3x + 9\ln|x-2| + c$$

En general si queremos integrar un cociente de polinomios $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en el que el grado de $P(x)$ es mayor o igual al grado de $Q(x)$, procederemos como en el caso anterior, aplicando el algoritmo de la división

$$\begin{array}{r|l} & q(x) \\ \cline{2-2} Q(x) & P(x) \\ & r(x) \end{array}$$

Donde $r(x) = 0$ ó grad $r(x) <$ grad $Q(x)$

$$P(x) = Q(x)\,q(x) + r(x)$$

Dividiendo entre $Q(x)$, obtenemos:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

en donde la integral buscada,

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int q(x)\,dx + \int \frac{r(x)}{Q(x)}\,dx \qquad con\ gr\, r(x) < gr\, Q(x)$$

se reduce a calcular la integral de un polinomio q(x) y la integral de una función racional en la cual el numerados tiene grado menos que el denominador.

A continuación describiremos varios casos de descomposición de fracciones racionales (en las cuales el polinomio del numerador tiene grado menor que el denominador) como una suma de fracciones parciales las cuales son fáciles de integrar.

Primer caso.

[Q(x) tiene todas sus raíces reales y distintas]
Cuando la factorización del polinomio $Q(x)$ es en factores lineales y distintos, es decir:

$$Q(x) = (x - a_1)\,(x - a_2)\,(x - a_3)...\,(x - a_n),$$

hacemos la siguiente descomposición:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \frac{A_3}{x-a_3} + ... + \frac{A_n}{x-a_n}$$

donde A_1, A_2, A_3,... A_n son constantes reales.

Nótese que una vez efectuada la descomposición, la integración es inmediata pues:

$$\int \frac{A_k}{x-a_k}\,dx = \ln|x-a_k| + c$$

y por lo tanto:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \int \frac{A_2}{x-a_2}\,dx + \int \frac{A_3}{x-a_3}\,dx + ... + \int \frac{A_n}{x-a_n}\,dx$$

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \ln|x-a_1| + \ln|x-a_2| + \ln|x-a_3| + ... + \ln|x-a_n| + c$$

Ejemplo 1. Calcular $\int \frac{dx}{x^2-16}$

Solución: En este ejemplo $Q(x) = x^2 - 16 = (x-4)\,(x+4)$.

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4},$$

en la que bastará determinar las dos constantes A y B para poder encontrar nuestra integral.

Procederemos a la determinación de las constantes, efectuando la suma del lado derecho:

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{A(x-4)+B(x+4)}{(x+4)(x-4)} = \frac{Ax-4A+Bx+4B}{(x+4)(x-4)} = \frac{x(A+B)+(4B-4A)}{(x+4)(x-4)},$$

Observamos que la primera y la última fracción son iguales y tienen el mismo denominador, por lo que sus numeradores forzosamente son iguales, es decir:

$$1 = x(A+B) + (4B-4A)$$

o bien

$$0x + 1 = x(A+B) + (4B-4A)$$

de donde obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas:

$$A+B = 0$$

$$4B - 4A = 1$$

que resolviéndolo nos queda

$$4A+4B = 0$$

$$\underline{4B - 4A = 1}$$

$$8B = 1$$

por lo que $B = 1/8$, y sustituyendo en la primera ecuación, $A = -B = -1/8$.

Una vez determinadas nuestras constantes A y B, las sustituimos en la descomposición inicial, obteniendo:

$$\frac{1}{x^2-16} = \frac{A}{x+4} + \frac{B}{x-4} = \frac{1/8}{x+4} - \frac{1/8}{x-4},$$

quedando finalmente la integración:

$$\int \frac{dx}{x^2-16} = \int \frac{1/8}{x+4}\,dx - \int \frac{1/8}{x-4}\,dx = \frac{1}{8}\ln|x+4| - \frac{1}{8}\ln|x-4| + c$$

o bien , utilizando las propiedades de los logaritmos:

$$\int \frac{dx}{x^2-16} = \frac{1}{8}\ln\left|\frac{x+4}{x-4}\right| + c$$

Observación: Esta integral es un caso particular de la fórmula presentada sin demostración en el método de cambio de variable

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a-u}{a+u} \right| + c$$

la cual puede ahora probarse con el método de fracciones parciales como un ejercicio.

Ejemplo 2. Calcular $\int \frac{x+2}{x^2 - 2x - 15}\, dx$

Solución: En este ejemplo, $Q(x) = x^2 - 2x - 15 = (x-5)(x+3)$.

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{x+2}{x^2 - 2x - 15} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3},$$

y siguiendo el procedimiento del ejemplo anterior

$$\frac{x+2}{x^2 - 2x - 15} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-5)}{(x-5)(x+3)} = \frac{x(A+B) + (3A - 5B)}{(x-5)(x+3)},$$

igualando coeficientes, obtenemos el sistema:

$$A + B = 1$$

$$\underline{3A - 5B = 2}$$

que al resolverlo nos da:

$$5A + 5B = 5$$

$$\underline{3A - 5B = 2}$$

$$8A = 7$$

obteniendo el valor de $A = 7/8$.

Para encontrar B, la despejamos en la primera ecuación

$$B = 1 - A = 1 - 7/8 = 1/8$$

Así pues, la descomposición en fracciones parciales es:

$$\frac{x+2}{x^2 - 2x - 15} = \frac{7/8}{x-5} + \frac{1/8}{x+3},$$

y nuestra integral:

$$\int \frac{x+2}{x^2-2x-15}\,dx = \int \frac{7/8}{x-5}\,dx + \int \frac{1/8}{x+3}\,dx = \frac{7}{8}\ln|x-5| + \frac{1}{8}\ln|x+3| + c$$

<u>Observación</u>: En cada uno de los casos de este método se afirma que se puede dar una descomposición en fracciones parciales, lo cual es un resultado del álgebra y que por lo tanto debería probarse algebraicamente, ya que podría surgir la duda de que en una de estas descomposiciones se produjera un sistema de ecuaciones sin solución. No daremos aquí la demostración pero veremos que por lo menos en el primer caso siempre será posible encontrar las constantes, es decir los sistemas resultantes si tendrán solución.

Otro método para determinar las constantes:
Tratemos de "despejar" la constante *A* de la descomposición deseada:

Multiplicamos en ambos lados de la ecuación por (*x*-5)

$$\frac{x+2}{(x-5)(x+3)} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{x+3}$$

obteniendo:

$$\frac{x+2}{x+3} = A + \frac{B(x-5)}{x+3}$$

despejamos a la constante A

$$A = \frac{x+2}{x+3} - \frac{B(x-5)}{x+3}$$

evaluamos en x = 5 y obtenemos

A =7/8

Obsérvese que estos pasos para determinar A se pueden comprimir en uno solo:

<u>Determinando las constantes por otro método</u>*:* ***De la expresión a descomponer en fracciones parciales, se elimina del denominador el factor lineal correspondiente a esta constante y finalmente se evalúa en el punto donde este factor eliminado se anula.***

Es decir $A = \frac{x+2}{x+3}$ evaluado en $x = 5$, resultando A = 7/8.

Similarmente para obtener el valor de *B*, multiplicamos en ambos lados de la ecuación original por (x+3), despejamos *B* y evaluamos en x = -3, obteniendo:

$$B = \frac{x+2}{x-5} \quad \text{evaluado en } x = -3$$

$$B = 1/8.$$

Ejemplo 3. Calcular $\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 6x^2 + 8x}\, dx$

<u>S</u>olución: En este ejemplo, $Q(x) = x^3 - 6x^2 + 8x = x(x-4)(x-2)$.

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{2x^2 - 3x + 1}{x(x-4)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-4} + \frac{C}{x-2},$$

siendo los valores de las constantes:

$$A = \frac{2x^2 - 3x + 1}{(x-4)(x-2)} \quad \text{evaluado en } x = 0 \quad \Rightarrow \quad A = 1/8$$

$$B = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x(x-2)} \quad \text{evaluado en } x = 4 \quad \Rightarrow \quad B = 21/8$$

$$C = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x(x-4)} \quad \text{evaluado en } x = 2 \quad \Rightarrow \quad C = -3/4$$

Así pues

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 6x^2 + 8x}\, dx = \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x} + \frac{21}{8}\int \frac{dx}{x-4} - \frac{3}{4}\int \frac{dx}{x-2}$$

es decir:

$$\int \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^3 - 6x^2 + 8x}\, dx = \frac{1}{8}\ln|x| + \frac{21}{8}\ln|x-4| - \frac{3}{4}\ln|x-2| + c$$

Segundo caso.

[Q(x) tiene todas sus raíces reales pero puede haber repetidas]
Cuando la factorización del polinomio $Q(x)$ es en factores lineales no necesariamente distintos, es decir:

$$Q(x) = (x - a_1)^{m_1} (x - a_2)^{m_2} (x - a_3)^{m_3} \ldots (x - a_n)^{m_n}$$

Por cada factor lineal aparecerán tantas fracciones parciales como multiplicidad tenga este factor, por ejemplo para el factor $(x\text{-}a_k)^{mk}$ habrá m_k fracciones parciales:

$$\frac{A_1}{(x-a_k)} + \frac{A_2}{(x-a_k)^2} + \ldots + \frac{A_{m_k}}{(x-a_k)^{m_k}}$$

donde A_1, A_2, A_3,... A_{mk} son constantes reales.

De nuevo como en el caso anterior la integración de las fracciones parciales es sencilla y se reduce a calcular integrales de la forma:

$$\int \frac{dx}{(x-a)^n}$$

las cuales, para n > 1, se resuelven por un sencillo cambio de variable.

Ejemplo 4. Calcular $\displaystyle\int \frac{3x+8}{x^3 - 4x^2 + 4x}\, dx$

Solución: En este ejemplo, $Q(x) = x^3 - 4x^2 + 4x = x(x - 2)^2$.

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{3x+8}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2}$$

Al desarrollar e igualar los polinomios del numerador, como en los ejemplos anteriores, obtendremos las constantes de resolver un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas. Si observamos con detalle la igualdad anterior nos daremos cuenta que la constante B no puede determinarse por el método "corto", pero sí las otras dos, es decir del sistema de tres por tres ya habremos determinado dos de las incógnitas y de cualquiera de las ecuaciones en que aparezca B la despejamos.

$$A = \frac{3x+8}{(x-2)^2} \text{ evaluado en } x = 0 \text{ nos da } A = 2$$

$$C = \frac{3x+8}{x} \text{ evaluado en } x = 2 \text{ nos da } C = 7$$

Efectuando las operaciones y factorizando x^2 y x, tenemos:

$$\frac{3x+8}{x(x-2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} = ... = \frac{x^2(A+B) + x(-4A-2B+C)+4A}{x(x-2)^2}$$

igualando los coeficientes de los numeradores, obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$A+B = 0$$

$$-4A - 2B + C = 3$$

$$4A = 8$$

Como sólo falta determinar la constante B, la despejamos de la primera ecuación, obteniendo $B = -2$.

Sustituyendo e integrando:

$$\int \frac{3x+8}{x(x-2)^2}\, dx = \int \frac{2}{x}\, dx + \int \frac{-2}{x-2}\, dx + \int \frac{7}{(x-2)^2}\, dx$$

$$\int \frac{3x+8}{x(x-2)^2}\, dx = 2\ln|x| - 2\ln|x-2| - \frac{7}{x-2} + c$$

Ejemplo 5. Calcular $\int \frac{x+8}{x^6 - 2x^4 + x^2}\, dx$

Solución: En este ejemplo, $Q(x) = x^6 - 2x^4 + x^2 = x^2(x^4 - 2x^2 + 1) = x^2(x^2 - 1)^2$

$$Q(x) = x^2(x+1)^2(x+1)^2$$

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{x+8}{x^2(x+1)^2(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} + \frac{D}{(x+1)^2} + \frac{E}{x-1} + \frac{F}{(x-1)^2}$$

Por el método corto podemos fácilmente encontrar que $B = 8$, $D = 7/4$ y $F = 9/4$.

Para determinar el resto de las constantes tenemos que plantear el sistema de ecuaciones:

$$\frac{x+8}{x^2(x^2-1)^2} = \frac{A(x^5-2x^3+x)+B(x^4-2x^2+1)+C(x^5-x^4-x^3+x^2)}{x^2(x^2-1)^2} +$$

$$+\frac{D(x^4+2x^3+x^2)+E(x^5+x^4-x^3-x^2)+F(x^4+2x^3+x^2)}{x^2(x^2-1)^2}$$

conduciéndonos al siguiente sistema de 6 ecuaciones con 6 incógnitas

$$A + C + E = 0$$

$$B - C + D + E + F = 0$$

$$-2A - C + 2D - E + 2F = 0$$

$$-2B + C + D - E + F = 0$$

$$A = 1$$

$$B = 8$$

Como ya tenemos los valores $A = 1$, $B = 8$, $D = 7/4$ y $F = 9/4$, sustituyéndolos en las primeras dos ecuaciones, encontraremos los valores de C y E resolviendo el sistema:

$$C + E = -1$$

$$\underline{-C + E = -12}$$

cuya solución es $C = 11/2$ y $E = -13/2$.

El valor de la integral, entonces será:

$$\int \frac{x+8}{x^6-2x^4+x^2}\,dx = \ln|x| - \frac{8}{x} + \frac{11}{2}\ln|x+1| - \frac{13}{2}\ln|x-1| - \frac{9}{4(x-1)} + c$$

Tercer caso.

[$Q(x)$ tiene raíces complejas distintas]
Cuando en la factorización del polinomio $Q(x)$ aparecen factores cuadráticos de la forma

$$ax^2 + bx + c \quad \text{con} \quad b^2 - 4ac < 0$$

a cada uno de estos factores le corresponderá una fracción parcial de la forma

$$\frac{Ax+B}{ax^2+bx+c}$$

donde A y B son constantes reales.

Ejemplo 6. Calcular $\int \frac{3x+1}{x^3+2x^2+5x}\,dx$

Solución: En este ejemplo, $Q(x) = x^3 + 2x^2 + 5x = x(x^2 + 2x + 5)$

Con $b^2 - 4ac = 4\text{-}20 = -16 < 0$

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{3x+1}{x(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} = \frac{A(x^2+2x+5)+x(Bx+C)}{x(x^2+2x+5)}$$

el sistema a resolver:

$$A + B = 0$$

$$2A + C = 3$$

$$5A = 1$$

y la solución: $A = 1/5$, $B = -1/5$ y $C = 13/5$

$$\int \frac{3x+1}{x^3+2x^2+5x}\,dx = \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{5}\int\frac{x-13}{x^2+2x+5}\,dx = \frac{1}{5}\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{5}\int\frac{\frac{1}{2}(2x+2)-13-1}{x^2+2x+5}\,dx =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{10}\int\frac{(2x+2)}{x^2+2x+5}\,dx + \frac{14}{5}\int\frac{dx}{x^2+2x+5} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{10}\ln|x^2+2x+5| + \frac{14}{5}\int\frac{dx}{(x+1)^2+4} =$$

$$= \frac{1}{5}\ln|x| - \frac{1}{10}\ln|x^2+2x+5| + \frac{14}{5}\left(\frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+1}{2}\right)\right) + c$$

Cuarto caso.

[$Q(x)$ tiene raíces complejas repetidas]
Cuando en la factorización del polinomio $Q(x)$ aparecen factores cuadráticos repetidos de la forma

$$(ax^2 + bx + c)^n \quad \text{con} \quad b^2 - 4ac < 0$$

a cada uno de estos factores le corresponderán n fracciones parciales de la forma

$$\frac{A_1x + B_1}{ax^2 + bx + c} + \frac{A_2x + B_2}{(ax^2 + bx + c)^2} + ... + \frac{A_nx + B_n}{(ax^2 + bx + c)^n}$$

donde A_k y B_k son constantes reales para k = 1,2 ... n.

Ejemplo 7. Calcular $\int \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx$

Solución: En este ejemplo, $Q(x) = x^4 + 2x^2 + 1 = (x^2 + 1)^2$

$$\text{Con} \quad b^2 - 4ac < 0$$

La descomposición en fracciones parciales sería:

$$\frac{x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax + B}{x^2 + 1} + \frac{Cx + D}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3 + Bx^2 + Ax + B + Cx + D}{(x^2+1)^2}$$

planteándose el sistema de ecuaciones:

$$A = 0$$

$$B = 1$$

$$A + C = 0$$

$$B + D = 0$$

Con solución $A = 0$, $B = 1$, $C = 0$ y $D = -1$

Así pues la integral

$$\int \frac{x^2}{x^4 + 2x^2 + 1}\, dx = \int \frac{dx}{x^2 + 1} - \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$$

donde la primera integral es la inversa de la tangente y la segunda se resuelve mediante el segundo caso de sustitución trigonométrica.

Regresar al índice